В.К.ГАВИН

ГИДРО-ГЕОДИНАМИКА

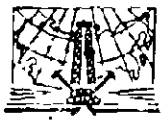
ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

1988 к
18571

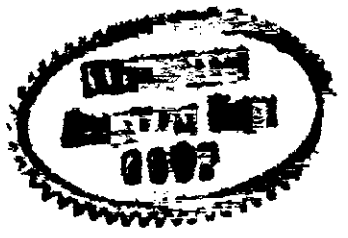
И.К.ГАВИЧ

ГИДРО-ГЕОДИНАМИКА

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника
для студентов вузов,
обучающихся по специальности
«Гидрогеология и инженерная
геология»



МОСКВА "НЕДРА" 1988



ВНИМАНИЮ СПЕЦИАЛИСТОВ!

Издательство „Недра„ готовит к выпуску в 1988 году новые книги

ГОНЧАРОВ М. А.

МЕХАНИЗМ ГЕОСИНКЛИНАЛЬНОГО СКЛАДКООБРАЗОВАНИЯ. 20 л. 3 р. 30 к.

Изложена новая (термофлюидная адвективная) концепция геосинклинального складкообразования. Показано, что складчатость в осадочной толще может рассматриваться как следствие адвекции (ограниченной конвекции). Установлено, что к адвекции приводит цепь последовательных событий: избыточное обводнение толщи, проникновение в нее теплового импульса из мантии, увеличение объема и инверсия плотности в толще. Применен комплексный подход к складкообразованию, как одному из элементов эндогенного геосинклинального режима, с использованием данных структурной геологии, тектонофизики, геотектоники, морской геофизики, нефтяной геологии, гидрогеологии, литологии, петрологии и конвективной гидродинамики.

Для научных работников — геологов и геофизиков, изучающих тектонику и металлогению крупных регионов.

План 1988 г., № 53

ЛОМАКИН Е. А., МИРОНЕНКО В. А., ШЕСТАКОВ В. М.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОФИЛЬТРАЦИИ. 15 л. 75 к.

Изложены теоретические и методические основы численного моделирования геофильтрационных процессов. Рассмотрены основные направления использования численного моделирования в инженерной геологии. Освещены вопросы, связанные с созданием, анализом точности и апробацией на конкретных задачах эффективных методов численного моделирования. Проанализированы достоверность гидрогеологического опробования и прогноз работы инженерных сооружений в сложных гидрогеологических условиях с помощью разработанных методов и программ.

Для гидрогеологов, занимающихся моделированием гидрогеологических процессов.

План 1988 г., № 134.

ББК 26.326
Г12
УДК 532.5+556.3(075.8)

Рецензенты: кафедра гидрогеологии МГУ, д-р геол-минер наук *В. А. Мироненко*

Г $\frac{1904060000-176}{043(01)-88}$ 140—88

ISBN 5—247—00066—8

© Издательство «Недра», 1988

ПРЕДИСЛОВИЕ

На XXVII съезде КПСС указывалось, что советская наука призвана занимать ведущие позиции по основным направлениям научно-технического прогресса, находить эффективные и современные решения текущих и перспективных производственных и социально-экономических проблем. В решении сложной задачи ускорения социально-экономического развития страны на основе научно-технического прогресса специалистам-гидрогеологам отводится важное место, так как они получают и обрабатывают гидрогеологическую информацию, используемую для обоснования и планирования различных хозяйственных мероприятий и освоения минеральных ресурсов, проектирования, строительства и эксплуатации инженерных сооружений. При этом они должны найти оптимальный вариант взаимодействия инженерного сооружения с природной, главным образом геологической средой. Все это требует от специалиста творческого отношения к своему делу, наличия глубоких теоретических профессиональных знаний, четкого понимания инженерной задачи и умения решить ее с использованием количественных методов, т. е. дать научно обоснованный прогноз изменения гидрогеологических условий под влиянием проектируемых мероприятий и сооружений.

Поэтому главная задача курса «Динамика подземных вод» (или, как в настоящее время его стали называть, «Гидрогеодинамика») состоит в том, чтобы студент усвоил важные теоретические положения, которые составляют объективную основу количественного изучения закономерностей движения подземных вод в гидролитосфере (подземной гидросфере), получил необходимые знания о методах и способах количественного анализа различных форм движения в толщах земной коры, приобрел некоторые навыки в выполнении количественных оценок этих форм движения при решении наиболее часто встречающихся практических задач, «почувствовал» внутреннюю логику связи динамики подземных вод (ДПВ) с другими научными дисциплинами и в первую очередь с региональной гидрогеологией и методами гидрогеологических исследований (методикой постановки и проведения основных видов гидрогеологических работ, а также с другими методами гидрогеологических исследований).

Настоящий учебник дает систематическое изложение основ ДПВ и соответствует учебной программе специальности 0107 «Гидрогеология и инженерная геология». В нем последовательно рассматриваются гидрогеологические, физические и математические основы движения подземных вод главным образом для зоны активного водообмена, принципы схематизации гидрогеологических условий и основы аналитических и численных исследований геофильтрации, влагопереноса и массотеплопереноса в гидрогеологических системах (ГГС). Значительное внимание уделено проблемам изучения гидродинамики естественных потоков подземных вод, прогнозированию их режима

и баланса на мелиорируемых территориях, режимно-балансовым наблюдениям (РБН), что имеет в настоящее время важное практическое значение.

Не все разделы книги написаны с одинаковой детальностью. Учтено, что подробно проблемы тепло- и массопереноса, а также определения параметров по данным опытно-фильтрационных и опытно-миграционных работ, расчета дренажа, изучения движения подземных вод вблизи морских побережий, а также приемы аналогового моделирования изложены в учебниках по ДПВ В. М. Шестакова [54] и В. А. Мироненко [31]. Эти учебники и настоящий следует рассматривать как дополняющие друг друга учебные пособия по курсу ДПВ. Приняты во внимание возросшие требования практики к повышению надежности гидрогеологических прогнозов, к контролю за режимом подземных вод, соответственно введены разделы, в которых эти проблемы обсуждаются с позиций ДПВ. Учитывая важность понимания молодыми специалистами теоретических аспектов решения задач рационального использования подземных вод, введена глава, в которой излагаются простейшие способы решения задач оптимизации, а также расширены разделы, посвященные численным методам исследований.

Обратим внимание на методологическое построение книги и особенности изложения материала.

1. В учебнике развиваются традиции кафедры гидрогеологии МГРИ и идеи Г. Н. Каменского о том, что понимание физического и геологического содержания изучаемых гидрогеологических процессов определяет правильность математической постановки и решения задач ДПВ. В связи с этим обращено внимание на гидрогеологическое обоснование математической постановки задачи, выявление на основе полученных решений общих гидрогеологических закономерностей, свойственных изучаемому процессу, а применительно к инженерному решению задачи — на те погрешности, которые связаны с принятыми упрощениями при построении геолого-математической модели этого процесса. Поэтому в первых главах книги рассмотрены виды потоков подземных вод в ГГС, их гидродинамические особенности, общие принципы и критерии схематизации гидрогеологических условий. Описание математических моделей процессов дано с использованием только детерминистического подхода, хотя в последние годы в практике гидрогеологических исследований стали использоваться детерминированно-стохастические модели. Это сделано, исходя из следующих соображений. Детерминированные модели позволяют: во-первых, наглядно продемонстрировать взаимосвязь факторов и основных показателей процесса; во-вторых, показать, как теоретически устанавливаются закономерности процессов движения подземных вод; в-третьих, проиллюстрировать различия в закономерностях изменений уровней и расходов потока для стационарных и нестационарных процессов, используя привычные для студента представления. Составление стохастических моделей процессов движения подземных вод требует большей абстрактности мышления и определенного уровня математической подготовки. По ходу изложения материала даются ссылки на возможность использования вероятностных представлений.

2. При изложении курса ДПВ по возможности использован системный подход, с позиций которого реальные гидрогеологические объекты рассматриваются как ГГС различного уровня (т. е. ранга и содержания), а применительно к ДПВ выделены гидрогеодинамические системы (ГДС). Последние в природной обстановке рассматриваются как различного вида потоки подземных вод, а применительно к математическому анализу — как математические модели этих потоков. Такой подход позволяет наглядно показать, что все уровни ГДС характеризуются некоторыми общими свойствами и, следовательно, общими расчетными параметрами, но каждый обязательно имеет собственные новые свойства и отвечающие им параметры. Это имеет не только теоретическое, но и практическое значение для постановки гидрогеологических исследований.

3. Рассматривается только теоретическая основа методов математического моделирования, так как методика и технология их применения являются предметом специального курса. Однако, понимая важность формирования у молодого специалиста навыков сочетания различных методов исследования и умения выбирать метод решения поставленной задачи, даны разъяснения, какие задачи и почему целесообразно решать тем или иным способом.

4. Учитывая актуальность проблемы получения надежных значений расчетных параметров и результатов гидрогеологических прогнозов, большое внимание уделено выявлению диагностических особенностей процессов для наиболее распространенных типовых расчетных схем. Знание этих особенностей может быть использова-

но, например, при обосновании выбора модели процесса и постановки режимных наблюдений, при обработке данных опытных работ и т. п.

5. Для лучшего усвоения теоретического материала предлагаются для самостоятельного решения задачи, а также контрольные вопросы в конце глав. Все, вместе взятое, развивает у студента навыки самостоятельного анализа, помогает формировать творческий подход к решению поставленных задач, в котором математический анализ занимает важное место.

6. В настоящее время теория движения глубинных вод в нижних этажах разреза земной коры, для всей области крупных гидрогеологических бассейнов со сложной гидрогеохимической зональностью, а также для гидрогеологических массивов с резко выраженной блоковой тектоникой разработана слабо. Неясны физические и гидродинамические модели чрезвычайно медленных движений подземных вод при наличии глубинных процессов петролитоаквагенеза и роль существенно иной термодинамической обстановки, чем в зоне активного водообмена. Учитывая сказанное, автор ограничился изложением в учебнике теории движения подземных вод для зоны активного водообмена.

Материал подразделен на основной и вспомогательный (задачи и разд. 18.9), последний используется для углубленной проработки и самостоятельной научной работы студента. Отдельные разделы книги могут быть полезны при усвоении других курсов специальности, а

также интересны инженерам и научным сотрудникам, работающим в области гидрогеохимических и региональных исследований.

Настоящий учебник подготовлен в результате чтения автором лекций по динамике подземных вод для студентов специальности «Гидрогеология и инженерная геология» на кафедре гидрогеологии МГРИ в течение 30 лет. Курс лекций претерпевал изменения, связанные с развитием самого предмета, форм его изложения и увязкой с другими курсами; будет он совершенствоваться и в дальнейшем.

Автор выражает свою признательность заведующему кафедрой гидрогеологии проф. В. М. Швецу за поддержку и помощь в написании учебника, а также доцентам Н. Н. Ленченко, В. В. Данилову, А. В. Михайловой за обсуждение многих разделов учебника и всем сотрудникам кафедры за благожелательное отношение. Автор благодарит за сотрудничество В. И. Угорца и А. Б. Воронова, принявших участие в составлении глав 7, 16, и 18 (разд. 18.9), Т. И. Гавича, А. М. Данилову, Н. Б. Козырскую и И. А. Самулекину за помощь в подготовке рукописи к изданию, а также проф. В. М. Шестакова за полезные замечания, способствовавшие улучшению учебника.

ВВЕДЕНИЕ

Динамика подземных вод (ДПВ) — одна из фундаментальных дисциплин гидрогеологии, которая изучает количественные закономерности движения подземных вод в толщах земной коры под влиянием естественных и техногенных факторов, разрабатывает математическую теорию этого движения и рационального управления режимом, балансом, ресурсами и качеством подземных вод.

До середины 1960-х гг. в ДПВ изучался главным образом процесс фильтрации воды в горных породах. Движение рассматривалось в обобщенном виде, при котором не учитывают конкретные скорости движения в порах и трещинах, а геологическую среду рассматривают укрупненно, что дает возможность применить к исследованию фильтрации известные в механике сплошных сред методы и приемы расчета. На этой основе изучают общее количество движущейся воды — фильтрацию воды из водохранилищ и каналов, водоприток к скважинам и т. п.

С середины 1960-х гг. внимание специалистов-гидрогеологов было привлечено к двум сложным формам движения подземных вод в горных породах — процессам инфильтрации и гидрогеохимической миграции. Первый наблюдается в зоне аэрации, характеризуется наличием трехфазной среды скелет породы — вода — воздух и участием в движении парообразной, пленочной, капиллярной и инфильтрационной воды под влиянием градиентов влажности и температур, гидростатического давления, капиллярного потенциала. Такое движение изучается на основе теории тепло-влагопереноса.

Гидрогеохимическая миграция в пористой и трещиноватой средах представляет собой физико-химическую форму движения, при которой наблюдается изменение количества вещества в подземных водах, т. е. массоперенос. Физико-химические процессы обусловливают изменение минерализации и состава подземных вод (сорбция, ионный обмен и др.). Для исследования гидрогеохимической миграции используют методы теории тепло-массопереноса и физико-химической термодинамики необратимых процессов. Такой подход необходим при изучении процессов загрязнения подземных вод, условий формирования водно-солевого режима и баланса подземных вод на орошаемых территориях, проблем формирования подземных вод.

ДПВ четко отделяется от гидромеханики и общей теории фильтрации. В этих дисциплинах разрабатывается математический аппарат для абстрактных расчетных схем, описывающих движение разнообразных флюидов (нефть, газ, вода) в существенно идеализированной среде. Геологические закономерности движения и их гидрогеологическая интерпретация не являются предметом исследования этих научных направлений. В ДПВ математический аппарат служит только средством решения специальных гидрогеологических задач, а главное содержание этой дисциплины — обоснование и разработка гидрогео-

логической теории количественного описания закономерностей движения подземных вод и их прогнозирования (расчета) в конкретных гидрогеологических условиях.

На эти основные цели ДПВ указывал в своих работах Г. Н. Каменский, который в 1933 г. впервые выделил ДПВ как специальный раздел гидрогеологии, определил ее содержание, задачи и методы исследований, изложив все это в первых учебниках по ДПВ [19]. Г. Н. Каменский всегда подчеркивал геологическую направленность ДПВ. В «Основах динамики подземных вод» он писал, что основным принципом при изучении движения подземных вод должно быть стремление к наиболее полному отражению в теории конкретных особенностей геологического строения водоносных пластов и режима подземных вод.

Таким образом, по своим задачам, естественным и физическим основам, натурным методам исследований, способам получения и интерпретации информации ДПВ — отрасль гидрогеологии, неразрывно связанная со многими дисциплинами геолого-географического цикла, такими, как структурная и динамическая геология, литология, тектоника, геохимия, гидрология, почвоведение, инженерная геология и др. Геологическое строение и литолого-фациальный состав определяют геологические формы и физические параметры среды, в которой происходит движение подземных вод, их физические и химические свойства, а совместно с физико-географическими факторами — условия питания и расходования, формирования запасов и качества, характер связей подземных вод с наземной гидросферой и атмосферой. Инженерные сооружения также воздействуют на движение подземных вод.

Теоретические представления ДПВ опираются, с одной стороны, на геологические закономерности, свойственные водоносным горизонтам и разделяющим их водоупорным толщам как геологическим телам, а с другой — на физико-математические основы, устанавливающие общие законы движения жидкостей и газов в разнообразных средах. Поэтому ДПВ имеет тесную связь с науками физико-математического цикла — физикой, математикой, гидравликой, гидромеханикой и ее разделами (теория фильтрации, теория массо-теплопереноса), что выражается в использовании при решении гидрогеологических задач общих физических законов, дифференциальных уравнений, математических методов, разработанных в этих науках, для количественного изучения закономерностей движения подземных вод в толщах земной коры.

Использование теории подобия дает возможность установить математическое сходство между многими различными по своей физической сущности процессами: фильтрацией, диффузией, распространением тепла в твердых средах, движением электрического тока в проводнике, упругой деформацией горных пород под влиянием изменения давления на их кровлю и др. Такое тождество позволяет активно применять в ДПВ для описания конкретных форм движения подземных вод имеющиеся в других науках математические решения, распространять данные единичного расчета на целый класс подобных

или аналогичных процессов. В. И. Ленин отмечал, что «единство природы обнаруживается в «поразительной аналогичности» дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений».

Движение подземных вод в земной коре в настоящее время рассматривается с позиций системного подхода [11, 12, 37, 45], который используется в геологии, инженерной геологии и других науках. Согласно системному подходу любой гидрогеологический объект или процесс рассматривается как некоторая система, элементы (подсистемы) которой находятся в определенных отношениях между собой и с окружающей средой. Существует иерархия систем, все они взаимосвязаны и взаимодействуют между собой.

Системный подход позволяет установить те свойства и особенности, которыми обладают все системы независимо от их содержания. Это дает возможность исследовать разные системы одними и теми же методами, более четко выявлять принципиальные различия гидрогеологических объектов, устанавливать их соподчиненность, взаимосвязь.

Используя разработанные в общей теории систем [18, 48] принципы оптимального управления системами, можно управлять режимом подземных вод, эксплуатационными запасами и ресурсами гидрогеологических систем. Таким образом расширяется научная база ДПВ, появляются новые методы, которые можно использовать при количественном изучении гидрогеологических объектов.

С позиций системного подхода ДПВ можно определить как научную дисциплину, объектом изучения которой являются гидрогеологические системы, а предметом — количественное исследование, прогноз их свойств, условий формирования и поведения (состояния) под влиянием естественных и техногенных факторов.

Развитие ДПВ связано с развитием наук физико-математического и геологического циклов, а также народного хозяйства в целом, с разработкой минерально-сырьевых ресурсов, так как именно практика ставит перед ДПВ все новые и более сложные задачи количественного прогнозирования изменений гидрогеологических условий под влиянием работы инженерных сооружений, водохозяйственных и других мероприятий.

Как самостоятельная научная гидрогеологическая дисциплина ДПВ оформилась в начале 1930-х гг. Основоположником ее считается Г. Н. Каменский, который первым обобщил и применил к решению гидрогеологических задач многое из того, что было разработано к тому времени в теории фильтрации. Он создал теории движения естественных потоков в неоднородных пластах и стационарного подпора грунтовых вод в различных гидрогеологических условиях, разработал гидродинамические основы изучения режима и баланса подземных вод на основе метода конечных разностей.

Первые фундаментальные разработки в области теории фильтрации относятся к середине XIX в. Они связаны с именами гидравликов А. Дарси, который эмпирически обосновал основной закон филь-

---

* *В. И. Ленин.* Полн. собр. соч., т. 18, с. 306.

трации в пористой среде, и Ж. Дюпюи, применившего этот закон к изучению движения воды в песчаных пластах и к скважинам. В конце XIX — начале XX вв. значительный вклад в теорию фильтрации внесли гидромеханики Н. Е. Жуковский, Ф. Форхгеймер и Ж. Буссинеск, которые предложили дифференциальные уравнения для описания фильтрации реальных жидкостей в пористой среде и применили их к решению задач водопритока к скважинам и изучению грунтовых вод. Дальнейшее развитие математических основ теории фильтрации связано с работами многих ведущих гидромехаников в области гидротехнического (Н. Н. Павловский, В. И. Аравин и С. Н. Нумеров [3], П. Я. Полубаринова-Кочина [40] и др.) и ирригационного (В. В. Ведерников, С. Ф. Аверьянов [1], Н. Н. Веригин [29, 30], А. Я. Олейник и др.) строительства, а также разработки месторождений нефти и газа (Л. С. Лейбензон, И. А. Чарный, В. Н. Щелкачев [53] и др. [4]).

Основные достижения ДПВ за последние 20—30 лет связаны с трудами гидрогеологов, которые решали сложные проблемы, поставленные развитием геологоразведочных и горных работ, мелиоративным освоением новых земель, сооружением крупных водозаборов и рациональным использованием подземных вод. Отметим труды С. К. Абрамова, Н. Н. Биндемана, Ф. М. Бочевера [6, 7], В. М. Гольдберга [16], И. Е. Жернова [17], В. И. Лялько [27], В. А. Мироненко [31, 32], Е. Л. Минкина, И. С. Пашковского [56], А. Б. Ситникова [46], В. М. Шестакова [54], Ф. Форхгеймера [50], Л. Лукнера [26], М. Гылыбова [28, 61], Р. де Уиста, Ж. Фрида [52], М. Хантуша [62] и др.

Развитие теории и практики ДПВ в 1930—1950-е гг. отражено в учебниках Г. Н. Каменского [19] и А. И. Силина-Бекчурина, в 1960—1970-е гг.— в учебниках В. М. Шестакова [54] и В. А. Мироненко [31], где показаны тесные связи ДПВ с механикой горных пород. Были изданы практикумы по ДПВ в 1950—1960-е гг. И. В. Гармоновым и И. А. Скабаллановичем, П. П. Климентовым, а в 1970-е гг.— В. М. Шестаковым, И. П. Кравченко и И. С. Пашковским [55]. Из зарубежных трудов по ДПВ следует назвать работы Я. Бэра и др. [8], П. Доменико [59], Р. Фриза и Д. Черри [60].

В настоящее время ДПВ обладает современной комплексной методологией, включающей методы геолого-структурного и литолого-фациального анализов, гидрогеологической аналогии, лабораторного изучения движения подземных вод, полевого опробования опытно-фильтрационными и опытно-миграционными работами (ОФР и ОМР), наблюдения за гидрогеодинамическим, гидрогеохимическим и гидрогеотермическим режимами и балансами подземных вод по специальной сети скважин и балансовых площадок, математического анализа движения подземных вод в горных породах, построенные на использовании аналитических и численных способов расчета, а также математического моделирования гидрогеологических процессов. Расширяется использование вероятностно-статистических методов, информационного анализа, методов оптимизации и теории планирования эксперимента, внедряется системный подход.

ЧАСТЬ I
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Глава 1
ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

1.1. ПРИРОДНЫЕ И ПРИРОДНО-ТЕХНОГЕННЫЕ ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. ИСХОДНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Системный подход базируется на понятии с и с т е м а. Определений этого понятия много, но во всех подчеркивается главное, что обязательно проявляется в системе, это — целостность, т. е. структурно-функциональное единство элементов (предметов, вещей, материальных или идеальных), образующих упорядоченный комплекс (множество). Это означает, что элементы любой системы (компоненты, подсистемы) находятся в определенных отношениях между собой и с внешней (по отношению к данной системе) средой. Системы имеют разные размеры (масштабы, ранги, уровни).

Литосфера представляет собой верхнюю твердую оболочку Земли, состоящую из минерального вещества, подземной воды или других (например, нефть) жидких компонентов, свободных газов и живого вещества, с присущими им физическими полями. Все компоненты находятся во взаимосвязи и взаимодействии. При таком понимании литосферу в целом, как и любые выделенные ее части, называют г е о с и с т е м а м и. В этом случае подземную воду в виде самостоятельной фазы рассматривают как одну из подсистем этой геосистемы. Однако в геологии принято определять литосферу в более узком смысле — как геологическое пространство, сформированное твердым минеральным веществом. Будем в дальнейшем пользоваться таким определением. В практической и научной деятельности имеют дело с отдельными частями литосферы, т. е. геологическими телами разного ранга. Под г е о л о г и ч е с к и м т е л о м будем понимать некоторый объем геологического пространства, внутри которого сохраняются непрерывными те геологические параметры, на основе которых выделены границы этого тела. Г е о л о г и ч е с к а я г р а н и ц а — это поверхность, при пересечении которой геологический признак терпит разрыв.

Подземные воды — сложный раствор, состоящий из молекул и диссоциированных ионов воды, ионов других элементов, коллоидных частиц, органических соединений, растворенных газов, взвешенных частиц, содержащийся в порово-трещинном пространстве геологических тел и находящийся в разных агрегатных состояниях. Подземная вода часто не сингенетична содержащим ее геологическим телам; она об-

разует в них самостоятельную фазу, поэтому водную оболочку в литосфере называют подземной гидросферой. Учитывая, что подземная вода вне горных пород не является объектом гидрогеологии, целесообразно воспользоваться понятием гидролитосфера, понимая под этим верхнюю твердую оболочку Земли, в той или иной степени насыщенную подземной водой, находящейся в непрерывном взаимодействии и связи с горными породами. Отдельные части гидролитосферы можно рассматривать как гидрогеологические тела разного ранга. В этом случае гидрогеологическое тело представляет собой некоторый объем гидролитосферного пространства, внутри которого сохраняются непрерывными те гидрогеологические признаки, на основе которых выделены границы этого тела. Гидрогеологическая граница — это поверхность, при пересечении которой гидрогеологические признаки терпят разрыв. Гидрогеологические границы могут не совпадать с геологическими.

Гидрогеологическая система (ГГС) представляет собой совокупность гидрогеологических тел, характеризующихся определенными отношениями между собой и с внешней средой. Выделение гидрогеологических объектов (систем) и выбор критериев разделения на подсистемы определяются целевым назначением исследований. ГГС подразделяются на природные (ПГС) и природно-техногенные (ПТГС) [12, 38]. Последние отличаются от природных тем, что в качестве подсистем (элементов) содержат искусственные объекты (инженерные сооружения) или существенно измененные человеком природные объекты. Одну и ту же ГГС можно разделить на разные подсистемы, используя различные критерии их выделения. Если декомпозиция предусматривает использование вещественного состава литосферы, то в качестве геологических подсистем могут быть выделены в зависимости от ранга геологические формации, генетические комплексы пород и другие геологические тела; при рассмотрении степени и характера водонасыщенности или проницаемости геологических тел — водоносные, относительно водоупорные, водоупорные слои и зоны как гидрогеологические тела; при учете комплекса гидрогеологических показателей — гидрогеологические бассейны и массивы, водоносные комплексы и горизонты и т. п.

Связи и взаимодействия между элементами и системами могут быть следующие: 1) *прямые*, когда взаимодействие осуществляется непосредственно через общую границу (действие паводка на реке через ее русло на водоносный горизонт при отсутствии экранирующих пород, откачка из скважины); 2) *непрямые*, при которых воздействие передается через другие элементы данной или граничащей с ней системы (воздействие паводка на водоносный пласт при наличии в русле реки экранирующих пород, инфильтрационное питание грунтовых вод через зону аэрации); 3) *косвенные*, опосредованные, передающиеся в данную систему извне через другую систему (загрязнение водоносного горизонта речными водами, изменившими минерализацию под действием сточных вод, поступающих в реку вне границ рассматриваемой системы).

Таблица 1.1

Характеристика ГГС разных категорий

Категория ГГС	Характеристики ГГС				
	Компоненты подсистемы «область гидролитосферной среды»	Природные и техногенные связи и взаимодействия	Режим функционирования	Границы	Методы количественного исследования
Элементарная	Слои, зоны, часть водоносного горизонта, сферы взаимодействия. Однородные в отношении развития гидрогеологических процессов. Образуют связную область гидролитосферного пространства (ГЛП)	Прямые, непрямые	Одинаковый в пределах всей ГГС (переходный, квазистационарный)	Условные (устанавливаются расчетом размеров сфер взаимодействия), геологические	Детерминированные
Локальная	Водоносный горизонт, сферы взаимодействия элементарных ГГС. Неоднородные в отношении развития гидрогеологических процессов. Образуют связную область ГЛП	Преимущественно прямые и непрямые, редко косвенные	Различный в соответствии с состоянием элементарных ГГС (квазистационарный, нестационарный)	Комбинаторные (устанавливаются как огибающие границ элементарных ГГС, находящихся в приграничной области)	Детерминировано-стохастические
Региональная	Водоносный горизонт, комплекс, бассейн, области взаимодействий локальных ГГС. Неоднородные в отношении развития гидрогеологических процессов. Образуют связную и несвязную области ГЛП	Прямые, непрямые и косвенные	Различный, сложный	Комбинаторные, учитывают сферу действия техногенных и естественных факторов	Стохастически-детерминированные

ГГС можно подразделить на категории элементарных, локальных и региональных. *Элементарная* ГГС не делится на более мелкие элементы. Примером ПГС может быть однородный водоносный пласт с одной границей (рекой) и сфера ее взаимодействия с пластом. В качестве ПТГС можно выделить отдельное сооружение и водоносный пласт. Связи между элементами и с внешней средой могут быть прямыми и непрямыми.

Локальная ГГС состоит из комплекса элементарных ГГС. Ее структура определяется соотношением и взаимосвязью между собой элементарных ГГС, которые могут граничить друг с другом (несколько водоносных горизонтов) или пересекаться между собой так, что на функционирование одной оказывает действие другая (несколько взаимодействующих водозаборных скважин в пласте; одна скважина, работающая у реки). В этом случае формируется связная область сферы взаимодействия.

Региональные ГГС включают локальные (природные и техногенные) подсистемы. Гидролитосферное пространство, как правило, неоднородное. Если некоторые локальные ПТС не взаимодействуют между собой (удаленные друг от друга водозаборы), но находятся в области взаимодействия естественных источников возмущения (одной реки), то по естественным взаимодействиям формируется связная область, а по техногенным — несвязная, которая отличается сложным механизмом функционирования. Категория ГГС определяется не столько ее размерами, сколько структурой и характером связей, по анализу которых устанавливаются внешние границы ГГС. Некоторые сведения о ГГС различных категорий приведены в табл. 1.1.

Поясним, какое содержание вкладывается в понятие с ф е р а в з а и м о д е й с т в и я применительно к задачам динамики подземных вод. Под сферой взаимодействия гидролитосферного пространства с естественной границей или инженерным сооружением понимается вмещающая сооружение или границу (или примыкающая к ним) область гидролитосферного пространства, внутри которой в результате их взаимодействия развиваются гидрогеологические процессы. Очевидно, что сфера взаимодействия (СВ) разных ПГС и ПТГС будет различаться размером, конфигурацией, строением гидролитосферного пространства и видом происходящих в нем гидрогеологических процессов. В зависимости от строения СВ, ее формы и величины выбирают методы количественных расчетов.

1.2. СВОЙСТВА И КАТЕГОРИИ ГГС

Под физической основой ГГС будем понимать г е о л о г и ч е с к у ю с р е д у (как гидролитосферное пространство), состоящую из двух взаимосвязанных основных компонент и их полей — твердого минерального вещества и подземной воды.

Основные характеристики любой ГГС следующие [12]: а) границы, б) свойства элементов и системы в целом, в) структура, г) характер связей и взаимодействий между элементами и внешней средой.

Границы — наиболее сложные характеристики системы; они сочетают свойства граничащих или пересекающихся друг с другом систем (внешние границы) или ее элементов (внутренние границы). Границы подразделяют на естественные и искусственные; в последнем случае — это контуры инженерных сооружений, по которым они воздействуют на подземные воды (подземный контур плотины, боковая поверхность фильтра скважины и т. п.). К естественным границам относятся урезы рек, озер и других водоемов, контуры вреза долин в коренные отложения, выходы источников, зоны разломов, литолого-фациальные контуры и т. п. Обычно нижняя граница водоносного пласта — это поверхность водоупорного ложа. Верхней границей в грунтовых водах служит свободная поверхность их уровня.

Свойства элементов и системы в целом характеризуются признаками; количественные признаки называют показателями. Свойства и показатели изменяются в пространстве, а некоторые из них и во времени. Изменчивость может быть закономерной (детерминированной), стохастической (вероятностной) или содержать обе тенденции. Показатели изменяются непрерывно или скачками (дискретно). Если во всех точках пространства системы величина данного показателя постоянна, то система по этому показателю называется однородной или гомогенной, а в противном случае — неоднородной. Гетерогенная система состоит из нескольких однородных подсистем; например, если горная порода разбита трещинами на блоки, то трещины — это одна система, а блоки монолитных пород — другая. В результате взаимодействия элементов между собой и с внешней средой в системе формируются новые свойства, которыми элементы не обладают.

Структура системы определяется соотношением в пространстве и во времени слагающих ее элементов и их связей. Пространственный аспект структуры характеризует порядок расположения элементов в системе, а временно́й — отражает смену ее состояний во времени, что обусловлено изменением характера связей и взаимодействий системы, т. е. ее развитием. Структура есть выражение иерархичности, организованности системы. В материальных системах структура характеризуется формой и размером физических тел, принятых за элементы, в идеальных (моделях) на первый план выступают не сами элементы, а их отображения и соотношения, определяется их пространственно-временное положение, для чего используются различные системы координат. Выявить структуру можно только после ее декомпозиции на элементы. Содержание структуры многообразно и зависит от выбора объекта, который рассматривается в качестве системы, принятого членения его на элементы и характера изучаемых процессов. Можно говорить о гидрогеологической, гидродинамической и других структурах системы: в первом случае рассматривается соотношение водоносных и водоупорных слоев, а во втором — линий токов и линий равных напоров, известное как гидродинамическая сетка.

Взаимодействия между элементами системы и с внешней средой представляют собой разнообразные формы энерго- и массообмена, т. е. различные гидрогеологические процессы, идущие в ГГС. Энерго-

и массообмен выражается через взаимодействие полей давления (или пьезометрического уровня), температуры и плотности. Эти взаимодействия проявляются в виде различных видов движений — фильтрации подземных вод, инфильтрации и гидрогеохимической миграции. Наблюдаются непрерывные перенос вещества и превращение энергии, т. е. состояние системы изменяется во времени. Такое поведение системы называется р е ж и м о м. Выделяют гидрогеодинамический, гидрогеохимический и гидрогеотермический режимы в соответствии с основными состояниями и показателями этих состояний.

Различают системы с равновесным, или установившимся, периодическим и переходным, или неустановившимся, режимами. В первом случае состояние и показатели системы во времени не изменяются; во втором — система через равные промежутки времени приходит в одно и то же состояние; в третьем — система, будучи выведена из некоторого начального состояния, изменяется во времени, переходя к равновесному, периодическому, или сохраняет неустановившийся режим весьма долго. В последних двух случаях показатели состояния системы зависят от времени. При установившемся режиме энерго-массообмен в системе и с внешней средой сбалансирован, при неустановившемся — наблюдается направленный энерго-массоперенос в систему или из нее. Изменение состояний системы есть ее движение, развитие, эволюция.

Выделяют о т к р ы т ы е и з а к р ы т ы е системы. В открытой системе происходит взаимодействие с внешней средой, в закрытой оно отсутствует. Полная энергия открытой системы равна сумме кинетической, потенциальной и внутренней энергий. Первые два вида обусловлены наличием внешнего поля сил, а третий определяется тепловым движением молекул. Закрытая система имеет только внутреннюю энергию. Механическая (кинетическая и потенциальная) энергия системы измеряется работой. Взаимодействуя с внешней средой, ГГС изменяется сама и меняет внешнюю среду, в результате формируются так называемые о б р а т н ы е с в я з и.

Процессы, определяемые действием упругих, гравитационных и кулоновских сил, являются о б р а т и м ы м и, т. е. протекают одинаково в противоположных направлениях. Работа этих сил не зависит от формы траекторий их действия, а определяется лишь координатами начала и конца этих траекторий. Силы внутреннего трения зависят от формы траекторий их действия. В связи с этим процессы, в которых они действуют, имеют конечную скорость протекания и являются н е о б р а т и м ы м и. В ряде случаев можно реальные процессы считать квазиобратимыми, пренебрегая, небольшими необратимыми изменениями, например глинистые породы при небольшом изменении внешнего давления на них можно считать такой же упругодеформируемой средой, как песчаные.

Все сказанное позволяет сделать следующие выводы: 1) природные гидрогеологические объекты образуют ГГС различного уровня, взаимосвязанные и взаимодействующие между собой. Каждый уровень характеризуется своими свойствами, структурой, формами связей и комплексом процессов; 2) ГГС являются открытыми термодинами-

ческими системами, в которых протекают обратимые и необратимые процессы обмена энергией, массой вещества и информацией. Эти изменения проявляются в конкретных видах движения, типах режима и баланса. Отсюда следует важная роль режимно-балансовых наблюдений при изучении динамики подземных вод.

1.3. ПОНЯТИЕ О СИСТЕМНОМ ПОДХОДЕ

Системный подход можно определить, как совокупность специальных методологических приемов изученения объектов как систем. В таком понимании системный подход, с одной стороны, является общенаучным приемом, так как содержит общие методологические принципы, вытекающие из самого понятия системы, а с другой — содержит конкретные принципы исследований, так как нацелен на познание ГГС. Отсюда следует, что гидрогеологу надо иметь представление об общих свойствах систем и знать формы и виды их проявления в ГГС и на этой основе вести количественные исследования на конкретном гидрогеологическом объекте.

Главным принципом системного подхода является целостность и определенная последовательность в исследованиях: от свойств объекта через его отношения (взаимодействия) к познанию механизма функционирования (развития) объекта. При изучении движения подземных вод это означает: от изучения свойств, связанных непосредственно с движением подземных вод, к изучению различных видов связей и процессов, проявляющихся при этом движении, и далее к их математическому описанию и установлению закономерностей формирования движения подземных вод в разных гидрогеологических условиях.

1.4. ГИДРОГЕОДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ИХ СВОЙСТВА

Понятием «гидрогеодинамическая система» пользуются при региональных исследованиях в нефтяной гидрогеологии, региональной оценке подземного стока, ресурсов и запасов подземных вод и региональных гидрогеологических исследованиях. Рассмотрим это понятие с позиций системного подхода применительно к динамике подземных вод. Гидрогеодинамическая система — это такая ГГС, в которой основным предметом изучения являются различные формы движения подземных вод как проявления взаимодействия динамических, т. е. силовых, полей, характеризующих изменение энергии (давления, температуры) и массы вещества в подземных водах. Полем какой-либо величины называют область, в которой эта величина изменяется по координатам пространства и времени. Выделяют физические и геологические поля [37]. Под *физическими*, или динамическими, понимают поля сил или их градиентов, которые определяют движение подземных вод в порово-трещинном пространстве горных пород. Это поля состояний — пьезометрического уровня H, температуры T и концентраций C различных компонентов, содержащихся в подземной воде. Графически они представляются в виде кар-

гидро- или пьезоизогипс, изотерм, изохорн и т. п. Под *геологическими* понимают поля показателей, характеризующих изменение свойств гидролитосферного пространства. Это поля таких показателей, как пористость n, коэффициент фильтрации k и т. д. Графически они изображаются в виде карт водопроницаемости, водопроводимости и т. п.

С математической точки зрения физические поля — это поля силовых функций, а геологические — поля аргументов, т. е. тех факторов, которые вызывают изменение этих функций. Если связь между ними детерминированная, то математически она выражается системой дифференциальных уравнений. Показатели действующих сил входят под знак производных, а показатели геологических полей являются коэффициентами у этих производных. Если взаимосвязи показателей состояния и свойств неясны, то они представляются как вероятностные, случайные.

Зная математическое описание физического или геологического поля, можно, измерив в ряде точек величину показателя поля, по этим данным определить его значения в других точках поля, и наоборот, по измеренным в ряде точек поля значениям показателя восстановить форму поля и найти математический закон его описания.

ГДС имеет гидрогеологическую и гидродинамическую структуры. Под г и д р о г е о л о г и ч е с к о й с т р у к т у р о й понимаем форму, размеры, взаимное расположение в выделенном гидролитосферном пространстве водоносных, относительно водоупорных и водоупорных слоев и пластов (если речь идет о системах, сложенных осадочными рыхлыми и полускальными породами) или пространственное соотношение разной степени трещиноватости и водоносности локальных и региональных разломов и зон (если системы сложены метаморфическими и изверженными кристаллическими породами).

Под г и д р о д и н а м и ч е с к о й с т р у к т у р о й при изучении процесса фильтрации понимают форму и взаимное расположение в выделенном пространстве гидродинамических элементов, за которые принимают линии токов и линии равных напоров. Система таких линий образует гидродинамическую сетку движения.

При изучении гидрогеохимической миграции структура ГДС выражается соотношением в гидролитосферном пространстве векторов сил и масс. При изучении процессов фильтрации гидролитосферное пространство называют г е о ф и л ь т р а ц и о н н о й средой, а при исследовании процессов миграции — м и г р а ц и о н н о й.

К основным гидрогеологическим элементам ГДС относятся водоносный пласт, водоупорный, относительно водоупорный и разделяющий слои. В о д о н о с н ы й п л а с т — это выдержанные по площади распространения слой, несколько слоев или зона трещиноватых пород, насыщенные свободной гравитационной водой, с одинаковыми или разными фильтрационными и емкостными свойствами, имеющие единую пьезометрическую поверхность. Эти слои или зоны образуют гидравлическую систему, которая характеризуется единством природы возникновения и действия сил движения, одинаковым расположением областей питания и разгрузки и соотношением их отметок. Водоносный пласт всегда отличается хорошими коллектор-

скими (фильтрационными и емкостными) свойствами. Водоупорный слой — это выдержанные по площади распространения слой или зона непроницаемых плотных пород, содержащие только физически связанную воду и неспособные отдавать ее в данной термодинамической обстановке. Относительно водоупорный (или слабопроницаемый) слой — это выдержанный по площади распространения слой насыщенных свободной и физически связанной водой пород, способных при определенных термодинамических условиях слабо пропускать и отдавать свободную и физически связанную воду и вследствие этого имеющих низкие фильтрационные и емкостные свойства. Разделяющий слой — это слабопроницаемый слой, разделяющий два водоносных пласта и находящийся с ними в тесной гидравлической связи.

Систематизируем гидрогеологические структуры по числу водоносных пластов в ГДС. *Многопластовая* система состоит из нескольких водоносных пластов и разделяющих их слоев, имеющих каждый свою пьезометрическую поверхность, но образующих единую гидравлически связанную слоистую систему. При таком понимании многопластовая система совпадает с понятием «водоносный комплекс» и характеризуется геолого-исторической общностью формирования и проявления в ней движения подземных вод. *Однопластовая* система содержит один водоносный пласт, который подстилается водоупором, а *двухпластовая* — два водоносных пласта, разделенных одним относительно водоупорным слоем.

1.5. ПОТОКИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД И ИХ ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

В гидрогеологии понятие поток подземных вод имеет несколько толкований в зависимости от целевого назначения исследований. Однако исходным является гидрогеодинамическое содержание. В ДПВ понятие поток используется для установления и систематизации гидродинамических особенностей подземных вод, формирующихся в различных природных условиях, что важно для понимания математической постановки задач динамики подземных вод. Гидродинамические особенности потоков определяются условиями залегания водоносных пластов, а также видами и формами областей питания и разгрузки подземных вод, что связано с геолого-структурными, литолого-фациальными и физико-географическими условиями площади их распространения. Представление о потоках применительно к ДПВ было детально разработано в 1930—1940-е гг. Г. Н. Каменским [19], который предложил классификацию потоков подземных вод по типам водовмещающих структур. Эти представления развил Н. Н. Ходжибаев, который использовал понятие о потоке в качестве таксономической единицы гидрогеологического районирования грунтовых вод Узбекистана. Применительно к проблемам общей и региональной гидрогеологии понятие потока использовали А. М. Овчинников, Н. И. Толстихин, В. А. Кирюхин, Е. В. Пиннекер, В. А. Всеволожский и др. В ДПВ оно получило развитие в работах В. М. Шеста-

кова [54] и И. К. Гавич [11, 21]. Определим п о т о к как пространственно-временно́е выражение структуры движения и баланса подземных вод в некотором объеме гидролитосферной среды в пределах принятых границ. В таком содержании поток рассматривается одновременно как геологическая и гидродинамическая системы. Выделение потока основано на анализе гидродинамической сетки.

Разделим потоки подземных вод на е с т е с т в е н н ы е, е с т е с т в е н н о - т е х н о г е н н ы е и т е х н о г е н н ы е. В последнем случае гидродинамическая структура потока определяется в основном воздействием инженерного сооружения. Региональные потоки можно разделить на мега-, макро- и мезопотоки. Типизация и детальная гидрогеологическая характеристика естественных потоков для ГГС с грунтовыми и напорными водами приведены в работе [12].

При систематизации потоков питание (и разгрузка) подразделяется [21] на р а с с е я н н о е (по площади) и с о с р е д о т о ч е н н о е (идущее по контуру). Первое связано с инфильтрацией и глубинным перетеканием, второе — с фильтрацией воды из рек, каналов и т. д. О т к р ы т ы е области питания и разгрузки характеризуются активной и прямой гидравлической связью потока с атмосферой и наземной гидросферой, с к р ы т ы е — имеют непрямые связи. Интенсивность и направленность водообмена можно определить соотношением вертикального и горизонтального расходов потока. Форма внешних границ потока обусловливает характер его движения — линейно-поступательный, веерный, центробежный, или центростремительный, возвратно-поступательный.

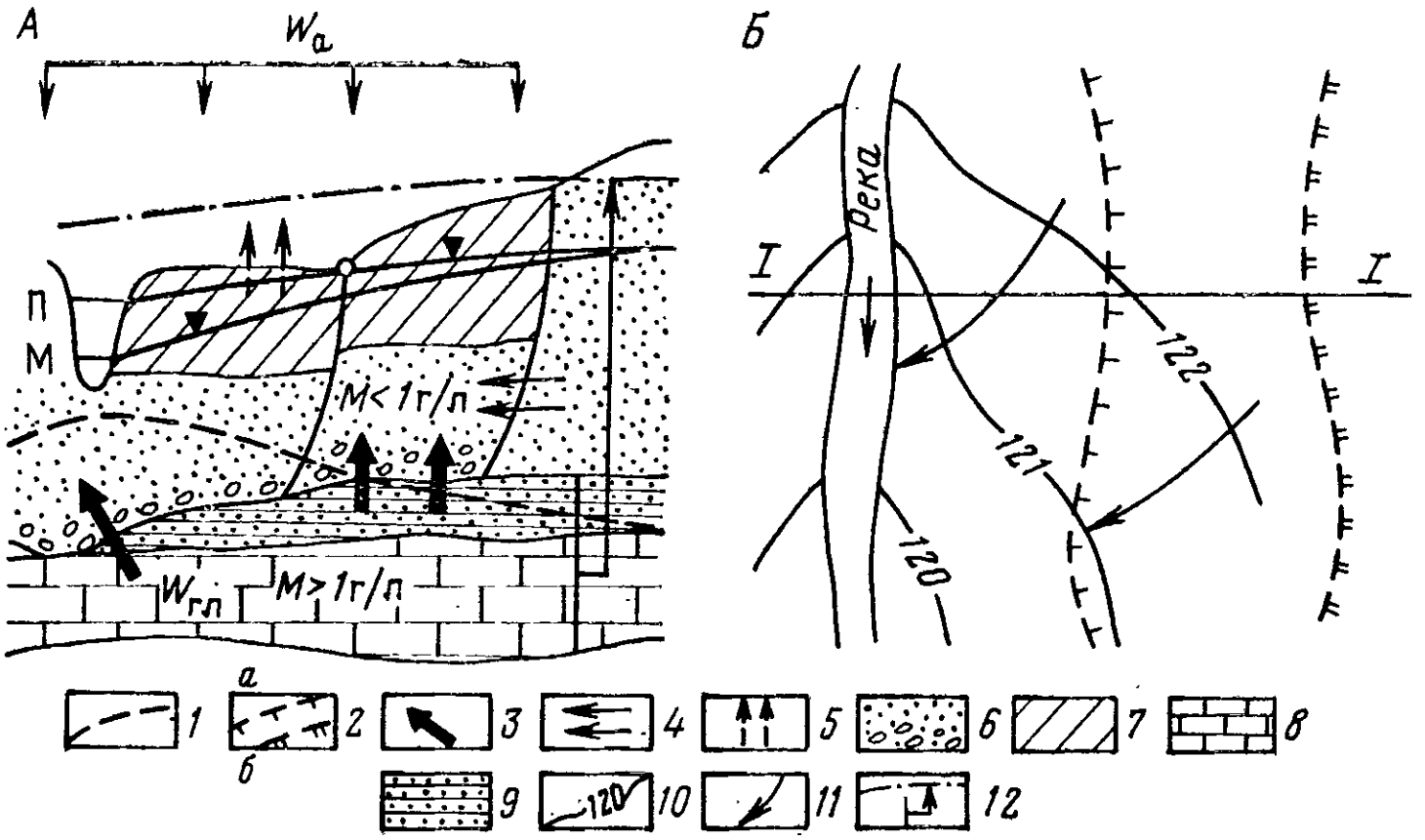


Рис. 1.1. Поток подземных вод равнинной реки:

А — разрез по линии I—I; *Б* — план потока. *1* — контур минерализованных вод, поступающих через нижнюю границу гидродинамической системы (ГДС); *2* — границы I (*а*) и II (*б*) надпойменных террас; *3* — глубинное перетекание; *4* — перелив из другой ГДС; *5* — испарение; *6* — песок; *7* — суглинок; *8* — трещиноватые известняки; *9* — слабопроницаемые породы; *10* — гидроизогипсы и их отметки, м; *11* — направление движения подземных вод; *12* — напор. М — межень; П — паводок; W_a — инфильтрация атмосферных осадков

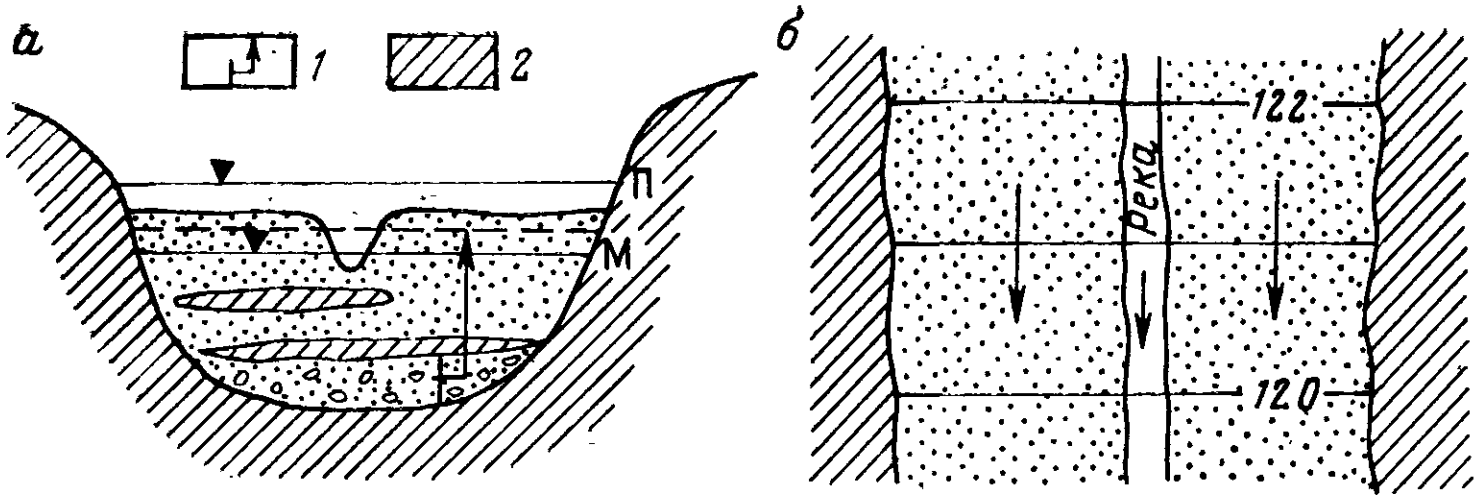


Рис. 1.2. Подрусловой поток:
а — разрез; *б* — план. *1* — субнапориые воды; *2* — водоупор

С учетом этих особенностей выделено шесть основных типов потоков: речных долин, водораздельные, конусов выноса и предгорных равнин, минерализованные с линзами пресных вод, синклинальных структур и напорных вод крупных зон тектонических разломов.

Потоки речных долин (рис. 1.1) чаще всего характеризуются одно- или двухпластовым строением, линейно-поступательным движением, ткрытой или затрудненной наличием суглинков по контакту с руслом связью, сосредоточенными и (в меньшей степени) рассеянными питанием и разгрузкой. Они имеют активный горизонтальный водообмен с рекой и водораздельным потоком, нередко связаны глубинным перетеканием с напорными водами нижележащей ГГС. В зоне многолетнемерзлых пород структура этих потоков усложняется наличием криогенных водоупоров или сквозных таликов, наблюдается сезонное изменение гидрогеологической и гидродинамической структуры потоков. В потоках горных рек (или подрусловых) (рис. 1.2) движение направлено от истоков к устью, взаимодействия с другими потоками нет. Поток в речной долине предгорий характеризуется разной вдоль долины гидравлической связью с потоком грунтовых вод в отложениях конуса выноса (рис. 1.3). В головной части конуса гидравлической связи нет вследствие мощной зоны аэрации. Здесь идет поглощение речного стока путем свободного просачивания (в виде «подземного дождя»), что формирует «бугор» на поверхности потока конуса выноса; по мере движения к устью реки оба потока сливаются в единую гидравлическую систему.

Водораздельные потоки междуречных пространств наиболее распространены в четвертичных ледниковых отложениях и в горизонтально залегающих осадочных отложениях более древнего возраста (рис. 1.4). Характер гидродинамических связей в таких потоках определяется интенсивностью инфильтрационного питания, фильтрационными свойствами разделяющих слоев и глубиной эрозионного расчленения рельефа. В результате формируется многопластовая система гидравлически связанных грунтовых и межпластовых напорных вод (см. рис. 1,4, потоки 3 и 4) или система с существенно иными гидродинамическими связями, когда возникает несколько зон аэрации (см. рис. 1.4, потоки 1 и 2). Питание всех нижележащих (межпла-

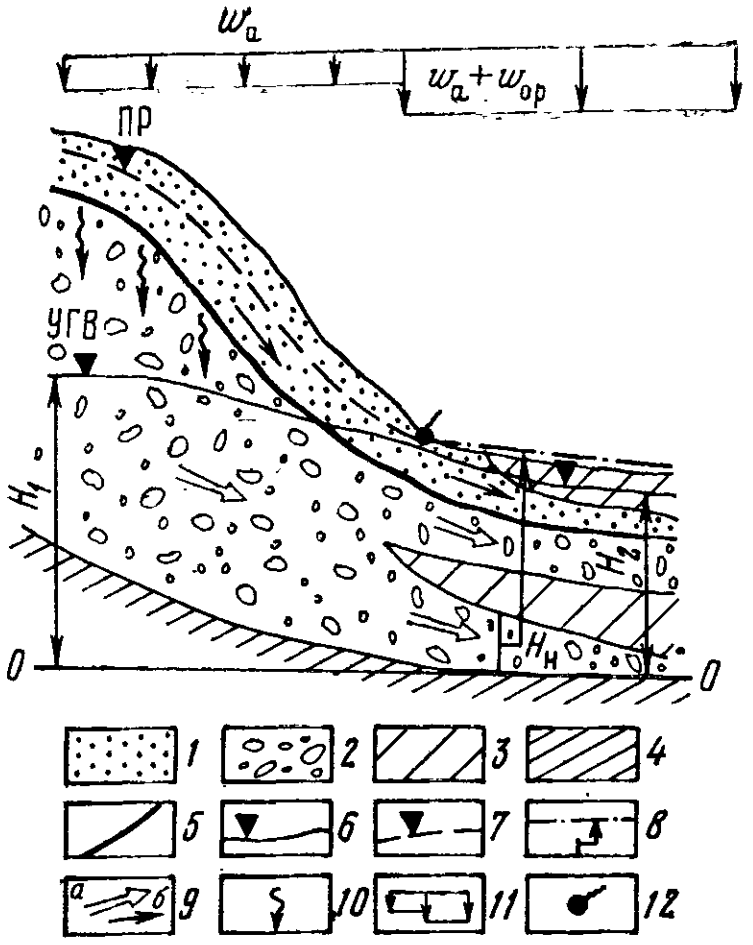


Рис. 1.3. Потоки предгорный речной и конуса выноса:

1 — аллювиальные пески предгорного речного потока; *2—4* — поток конуса выноса (*2* — галечники и пески, *3* — суглинки, *4* — глина); *5* — закольматированный слой; *6, 7* — уровень грунтовых вод (*6* — потока конуса выноса; *7* — предгорного речного потока); *8* — уровень напорных вод конуса выноса; *9* — направление движения потока конуса выноса (*а*) и предгорного речного (*б*); *10* — свободная инфильтрации вод предгорного речного потока; *11* — инфильтрационное питание атмосферное $W_а$ и от орошения $W_{ор}$; *12* —зона частичного выклинивания подземного стока

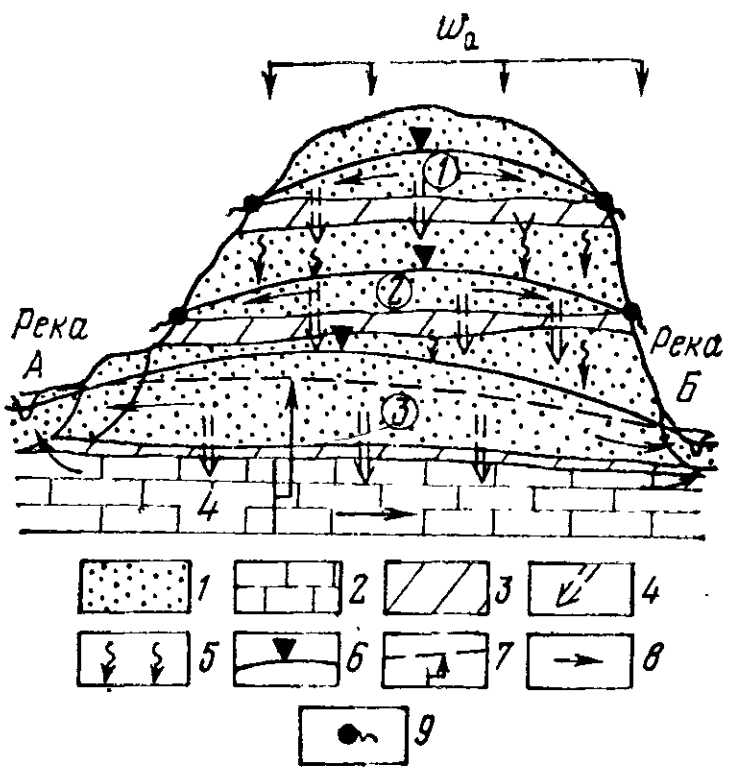


Рис. 1.4. Водораздельный многоярусный поток с межпластовыми грунтовыми и напорными водами и его взаимосвязь с потоками речных долин:

1 — пески; *2* — известняки; *3* — разделяющие суглинистые слои; *4* — фильтрация через разделяющие слои; *5* — свободное просачивание (инфильтрация) в зоне аэрации; *6* — уровень грунтовых вод; *7* — уровень напорных вод; *8* — направление движения подземных вод; *9* — источник

стовых грунтовых и в том числе напорных) горизонтов осуществляется в центральной части водораздела путем последовательного перетекания воды сверху вниз через разделяющие слои. Оно было впервые установлено и математически описано А. Н. Мятиевым в 1946 г. Свидетельством наличия питания являются: снижение напоров в пластах сверху вниз, «выпуклость» всех пьезометрических кривых аналогично форме уровня грунтовых вод, достаточная проницаемость разделяющих слоев. Водораздельные потоки находятся в прямом взаимодействии с потоками речных долин.

Водораздельные потоки междуречных пространств, сложенных трещиноватыми изверженными и метаморфическими породами, имеют однопластовую структуру (рис. 1.5, *а*), водоупором служат плотные породы. Зоны тектонических разломов усложняют структуру потоков, создавая зоны дренирования или непроницаемые экраны. Водораздельные потоки вулканогенных эффузивных пород отличаются резкой фильтрационной неоднородностью и сложной картиной движения.

Для водораздельных потоков характерны горизонтально-вертикальный водообмен с разным по величине соотношением инфильтрационной и глубинной составляющих и пространственная форма веер-

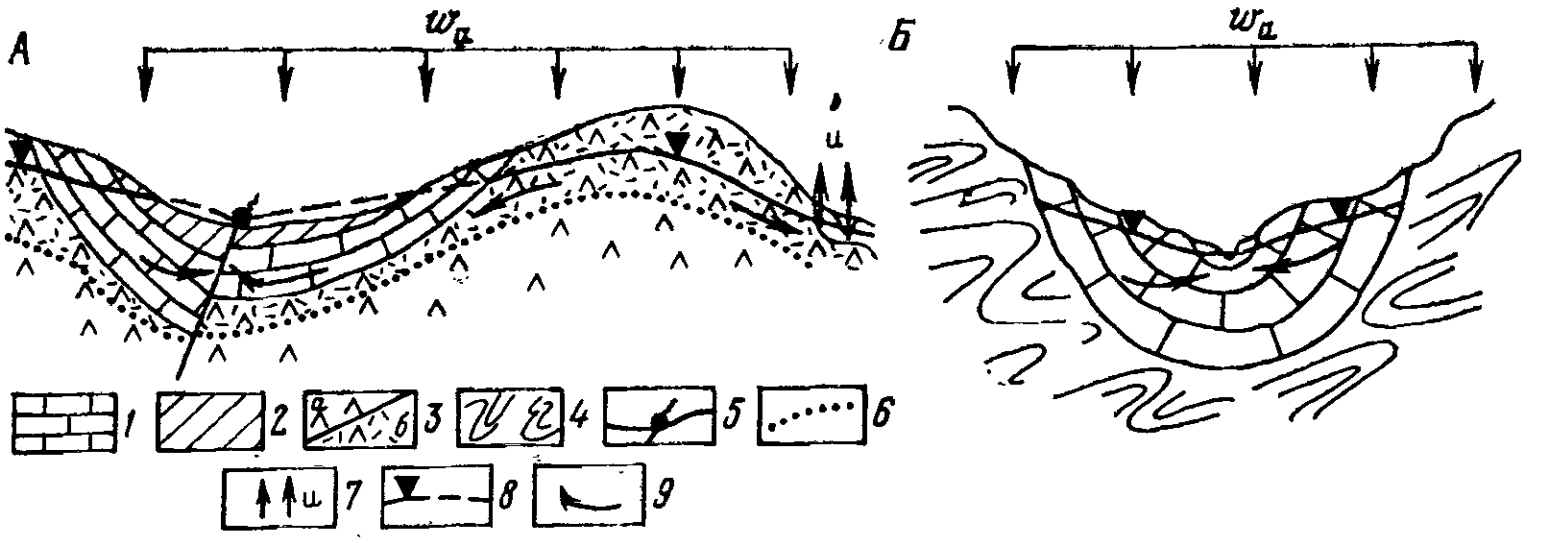


Рис. 1.5. Потоки водораздельных пространств трещиноватых массивов и синклинальных структур горных сооружений:

А — сочленяющийся водораздельный грунтовый поток в трещиноватой зоне эффузивного массива и напорный поток в трещиноватых известняках мульдообразной структуры; *Б* — грунтовый поток в синклинальной структуре. *1* — водоносные известняки; *2* — водоупорные глины; *3* — эффузивные породы плотные, водоупорные (*а*) и трещиноватые, водоносные (*б*); *4* — дислоцированные водоупорные породы; *5* — зона разлома с источником; *6* — граница водоносных и водоупорных пород; *7* — испарение с уровня грунтовых вод; *8* — уровень подземных вод; *9* — направление движения подземных вод

ного центробежного движения от центральной части междуречья к ограничивающим его речным долинам.

Потоки конусов выноса содержат в головной части грунтовые воды, приуроченные к мощной (до 300 м) толще гравийно-галечниковых отложений, а также грунтово-субнапорные и напорные воды — в периферических частях, где появляются слои суглинков и глин разной мощности и выдержанности по простиранию, формирующие многопластовую систему гидравлически связанных водоносных пластов (рис. 1.6, см. рис. 1.3). Характерным является постепенное уменьшение мощности зоны аэрации и проницаемости толщи от предгорий к центру впадин. Одновременно наблюдается увеличение градиентов потока, что обусловливает появление в его средней части зоны частичного выклинивания подземного стока.

На предгорных равнинах формируются системы макропотоков со сложной гидрогеологической структурой, пространственным центростремительным движением от горной части к равнинной, имеющие в плане веерообразную форму, с интенсивным горизонтально-вертикальным водообменом и различными видами сосредоточенного и рассеянного питания и разгрузки.

Потоки с песчаными и подтакырными линзами пресных вод характеризуются вертикальным инфильтрационным водообменом, а потоки с приканальными или подрусловыми линзами,— горизонтальным водообменом и инфильтрационно-фильтрационным типом связи.

Потоки синклинальных структур различаются характером движения подземных вод в зависимости от типа, возраста и размера геологических структур, с которыми они связаны, от типов и литолого-фациального состава пород, к которым они приурочены. В относительно небольших мульдообразных структурах на древних щитах и платформах, как правило, формируются мезопотоки с грунтовыми (см. рис. 1.5, *Б*) и субартезианскими (см. рис. 1.5, *А*) водами. Мега-

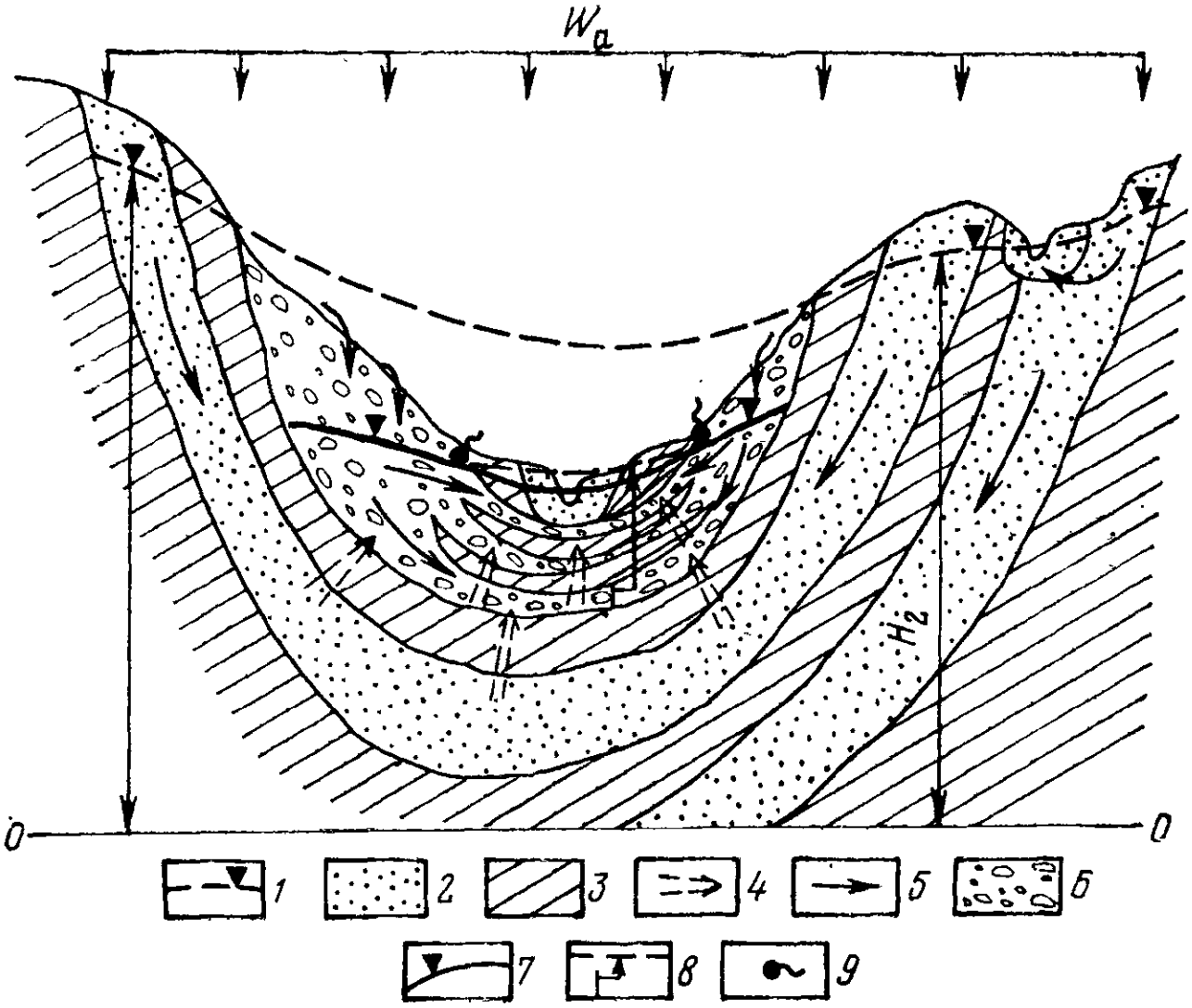


Рис. 1.6. Мегапотоки в межгорной впадине (в верхней части впадины потоки конусов выноса в четвертичных отложениях, в нижних горизонтах — напорные потоки осадочного чехла впадины):

1 — уровень грунтовых вод; *2* — пески; *3* — суглинистые породы; *4* — фильтрация через разделяющие слои; *5* — направление движения подземных вод; *6* — гравийно-галечные отложения; *7* — уровень напорных вод; *8* — напор; *9* — источник

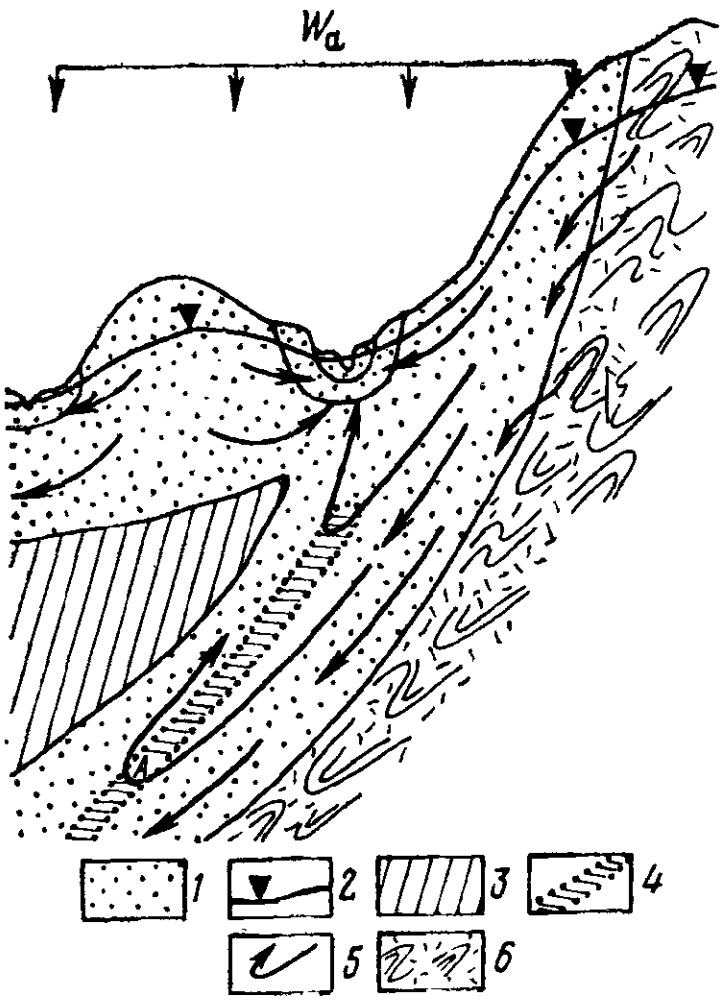


Рис. 1.7. Краевая зона разгрузки потока артезианского бассейна с возвратно-поступательным движением (по А. М. Овчинникову и Т. И. Гавичу):

1 — пески; *2* — уровень подземных вод; *3* — суглинки; *4* — зона застойного режима (с практически нулевыми скоростями движения); *5* — направление движения подземных вод; *6* — породы фундамента

и макропотоки развиваются в ГГС, приуроченных к крупным мульдообразным впадинам, предгорным прогибам и межгорным впадинам (см. рис. 1.6), образующим крупные и средние артезианские бассейны.

Потоки имеют многопластовую структуру, центростремительное или поступательное движение, сложный горизонтально-вертикальный водообмен с преобладанием глубинного перетекания. В краевых зо-

нах разгрузки крупных артезианских бассейнов наблюдаются два типа потоков. Первый — артезианский склон по А. М. Овчинникову, характеризуется возвратно-поступательным движением и наличием застойной зоны. Такое движение обусловлено дренирующим действием глубоко врезанных речных долин, выклиниванием под ними региональных водоупоров и достаточно значительной разностью отметок пьезометрических уровней между областью питания потока и зоной его краевой разгрузки (рис. 1.7). Потоки второго типа имеют поступательное движение, которое создается в тех случаях, когда региональные водоупоры экранируют дренирующее действие речной долины и наблюдается незначительное превышение отметок внешней области питания.

Потоки напорных вод крупных зон тектонических разломов характеризуются блоковым типом гидрогеологической структуры, наличием систем трещин с разными ориентировкой, раскрытостью и протяженностью, что создает трещинно-жильный глубинный тип циркуляции воды.

В заключение отметим, что математическая постановка задач динамики подземных вод наиболее разработана для элементарных, локальных потоков и для макро- и мезопотоков зоны активного водообмена. Практически отсутствуют расчеты для мегапотоков в целом, когда математическим описанием одновременно должны быть охвачены зоны замедленного и весьма замедленного водообмена. Для этих зон еще не установлены те основные законы движения, на которых должно строиться такое описание [38]. Имеются трудности и в математической постановке задач применительно к потокам крупных зон разломов с блоковой структурой.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем различаются понятия «гидрогеологическая система» и «гидрогеодинамическая система?»
2. Что относится к основным характеристикам любой системы?
3. В чем различие открытых и закрытых систем?
4. В чем назначение системного подхода?
5. Что следует понимать под гидрогеологической и гидрогеодинамической структурами системы?
6. В чем гидрогеодинамическое назначение понятия «поток подземных вод»? Какие виды потоков могут быть выделены в ГГС?
7. Укажите принципиальные с позиций ДПВ различия потоков речных долин и водораздельных пространств. Назовите гидродинамические особенности, свойственные только потокам конусов выноса и предгорных равнин.

Глава 2

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

2.1. СВОЙСТВА ВОДЫ КАК ЖИДКОСТИ

Сжимаемость. При постоянной температуре согласно закону Гука изменение давления на Δp вызывает упругообратимое изменение первоначального объема V воды на величину

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{E_в}\Delta p = -\beta_в \Delta p, \qquad (2.1)$$

где $E_в$ — объемный модуль Юнга для пресной негазированной воды, равный 2000 МПа; $\beta_в$ — коэффициент объемного сжатия или расширения воды, равный $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ МПа$^{-1}$, или $0{,}5 \cdot 10^{-5}$ м$^{-1}$.

Наличие растворенного газа и повышение температуры увеличивают сжимаемость воды, но она уменьшается с ростом давления.

Плотность. Плотность можно определить по формуле

$$\rho = \gamma/g, \qquad (2.2)$$

где γ — вес единицы объема воды; g — ускорение свободного падения.

Плотность пресной воды при 4 °С составляет 1 г/см^3, морской — 1,02—1,03 г/см^3, рассолов с минерализацией 300—500 г/л — 1,2—1,3 г/см^3. Плотность уменьшается с ростом температуры и увеличивается с ростом давления.

Вязкость. В пластовых условиях изменение вязкости воды зависит от изменения ее температуры, минерализации и состава растворенных компонентов. Вязкость μ пресной и слабоминерализованной воды при 0 °С составляет $1{,}78 \cdot 10^{-3}$ Па·с, при 10 °С — $1{,}31 \cdot 10^{-3}$ Па·с, при 20 °С — 10^{-3} Па·с, при 90 °С — $0{,}3 \cdot 10^{-3}$ Па·с. Увеличение минерализации воды до 80 г/л вызывает пропорциональный рост μ, при дальнейшем росте минерализации темп увеличения вязкости существенно повышается. Соли $CaCl_2$, $MgCl_2$ обусловливают большее увеличение μ, чем NaCl. Влияние давления на вязкость воды незначительно.

2.2. СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ И ВЯЗКОСТИ

Гидростатическое давление. В покоящейся жидкости давление, например атмосферное, приложенное к ее поверхности, согласно закону Паскаля передается без изменения во все точки жидкого объема. Если дополнительные внешние силы отсутствуют, то избыточное по отношению к атмосферному гидростатическое давление p внутри покоящейся жидкости в любой точке объема определяется только весом расположенного выше столба жидкости высотой h_p (рис. 2.1, *а*, точка *А*):

$$p = \gamma h_p = \rho g h_p. \qquad (2.3)$$

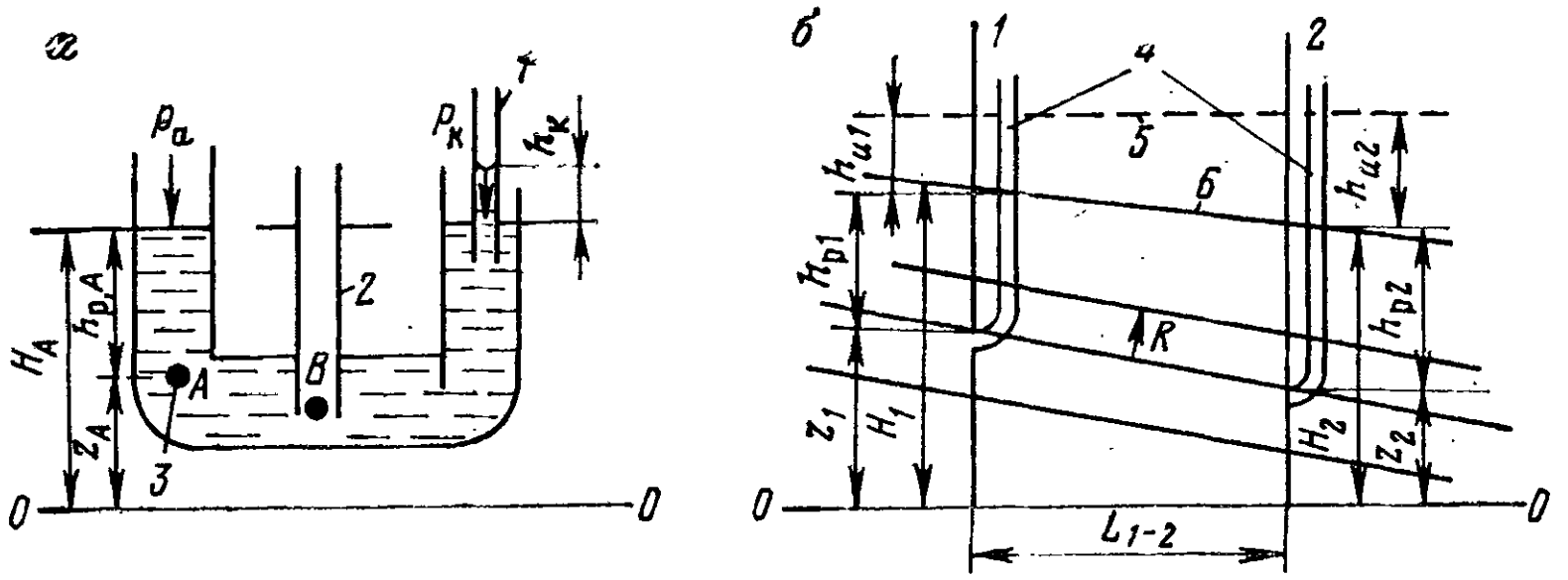


Рис. 2.1. Схемы, иллюстрирующие понятия гидростатического давления и напора (*а*) и гидродинамического напора (*б*):

1 — капиллярная трубка; *2* — измерительная трубка; *3* — элементарный объем *A*; *4* — трубки Пито; *5*, *6* — поверхности (*5* — гидродинамических напоров идеальной жидкости, *6* — гидростатических напоров движущейся вязкой жидкости)

Если плотность воды по глубине изменяется, то жидкость является неоднородной и гидростатическое давление в ней определяется следующим выражением:

$$p = g\int_0^{h_p} \rho(z)\,dz, \qquad (2.4)$$

где z — вертикальная координата.

Равнодействующая сила гидростатического давления выталкивает погруженное в воду тело с силой, равной весу воды в объеме тела. Вода — смачивающая жидкость, поэтому в капиллярах она образует вогнутые мениски, давление под которыми меньше атмосферного; эта разность давлений поднимает воду в капилляре радиусом $r_к$ на высоту, равную согласно формуле Лапласа

$$h_к = 2\alpha_к/\rho g r_к \qquad (2.5)$$

до тех пор, пока не установится равновесие (см. рис. 2.1, *а*)

$$p_а = p_к = -\rho g h_к, \qquad (2.6)$$

где $\alpha_к$ — удельная сила поверхностного натяжения, равная для воды 8 Па·см; $p_а$ и $p_к$ — давление атмосферное и капиллярное.

Гидростатический напор. Известно, что механическая энергия некоторого объема покоящейся жидкости с постоянной плотностью определяется ее потенциальной составляющей и измеряется работой, которую надо совершить, чтобы преодолеть действие сил двух полей; 1) гравитации (поднять этот объем жидкости на высоту z относительно выбранной плоскости сравнения); 2) гидростатического давления (действующего в этом объеме). В качестве показателя потенциальной энергии единицы веса жидкости используется гидростатический на-

пор H, измеряемый в метрах и определяемый с учетом формул (2.1) и (2.2) зависимостью

$$H = h_p + z = \frac{p}{\rho g} + z = \frac{p}{\gamma} + z, \qquad (2.7)$$

где h_p — пьезометрическая высота, характеризующая долю потенциальной энергии, связанной с действием гидростатического давления; z — геометрическая высота положения рассматриваемого объема над плоскостью сравнения.

Задача. На рис. 2.1, *а* показана U-образная труба, причем уровень воды в обоих коленах одинаков. В точку B опущена открытая с двух концов измерительная трубка, диаметр которой больше, чем диаметр капилляра. Определить, на какую высоту поднимется в ней вода, показать, составляющие гидростатического напора для точки B и сделать вывод о значениях гидростатического напора в разных точках рассматриваемого объема воды.

Гидродинамический напор. Механическая энергия движущегося объема жидкости включает потенциальную и кинетическую. Из гидродинамики идеальной жидкости, т. е. несжимаемой, постоянной плотности и не обладающей вязкостью и инерцией, известно, что ее полная энергия определяется уравнением Бернулли (см. рис. 2.1, *б*)

$$H_u = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{u^2}{2g} = \text{const}, \qquad (2.8)$$

где H_u — гидродинамический напор, характеризующий полную энергию движущейся жидкости с определенным весом; $u^2/(2g)$ — скоростной напор, или скоростная высота, h_u, характеризующий дополнительный подъем воды в измерительной трубке (трубка Пито), обусловленный скоростью u установившегося потока жидкости.

Поскольку силы вязкого трения и инерции отсутствуют, то в любом сечении потока идеальной жидкости значение H_u постоянно и поверхность напорных уровней горизонтальна (см. рис. 2.1, *б*, линия *5*). При медленном движении подземных вод, когда u не превышают, 1000 м/сут, величиной H_u можно пренебречь, так как она составляет всего $(1000 \text{ м}/86400 \text{ с})^2 \cdot 0{,}5 \cdot 9{,}8 \text{ м/с}^2 \approx 0{,}01$ мм [31]. Тогда $H_u \approx H$ и гидростатический напор характеризует полную энергию движущейся подземной воды.

Силы вязкости. Реальные жидкости обладают вязкостью, или внутренним трением, т. е. сопротивлением перемещению слоев относительно друг друга. Если возьмем несколько слоев жидкости общей мощностью m (рис. 2.2) и представим, что нижний слой неподвижен, а верхний медленно движется со скоростью u, то все лежащие между ними слои начнут медленно двигаться параллельно друг другу со скоростями, уменьшающимися сверху вниз от u до 0. Вязкость проявляется в том, что частицы жидкости проникают из слоя в слой, и каждый вышележащий слой увлекает за собой нижележащий. И. Ньютон изучил такое параллельно-струйное движение и установил следующее: а) чтобы вызвать перемещение слоев жидкости, к ней надо приложить внешнюю силу и совершить работу по взаимному перемещению слоев, работа превращается в тепловую энергию дви-

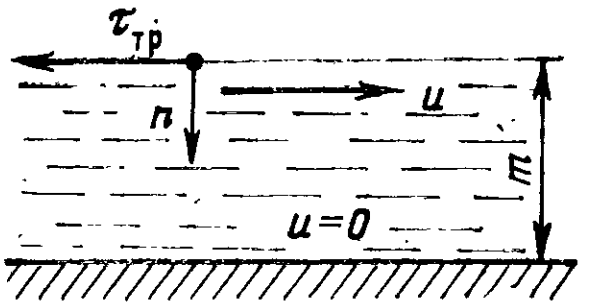


Рис. 2.2. Схема, поясняющая соотношение сил вязкого трения в жидкости

жения молекул жидкости; б) трение между слоями пропорционально поверхности соприкосновения слоев Ω и скорость относительного взаимного перемещения слоев равна

$$|\overline{U}| = \lim_{\Delta n \to 0} \left| \frac{u_1 - u_2}{\Delta n} \right| = \left| \frac{du}{dn} \right|,$$

где u_1, u_2 — скорости слоев, находящихся друг от друга на расстоянии Δn; n — расстояние, перпендикулярное к направлению движения; в) сила трения не зависит от давления в жидкости и различна для разных жидкостей; г) сила вязкого трения направлена противоположно потоку жидкости.

Согласно закону Ньютона сила вязкого трения равна

$$f_{тр} = -\mu\Omega \frac{du}{dn}, \qquad (2.9)$$

а касательное (тангенциальное) напряжение, приходящееся на единицу площади, можно определить по формуле

$$\tau_{тр} = \frac{f_{тр}}{\Omega} = -\mu \frac{du}{dn}. \qquad (2.10)$$

Силы вязкого трения увеличиваются с ростом u и уменьшением толщины слоя жидкости m. Повышение температуры жидкости приводит к ускорению ее движения, так как μ уменьшается. При возрастании давления до 20 МПа μ примерно постоянно, далее быстро увеличивается.

2.3. ДЕЙСТВУЮЩИЕ СИЛЫ И РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ В РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Понятие о гравитационном потенциале. Движение элементарного объема жидкости определяется действием сил: 1) гидростатического давления по поверхности этого объема; 2) тяжести (веса объема жидкости); 3) упругости (определяемых сжимаемостью жидкости); 4) вязкого (внутреннего) трения (условно распределенных по поверхности объема); 5) инерции.

Движение в таких условиях описывается сложным уравнением Навье—Стокса [3, 8, 40]. Если пренебречь инерционными и упругими силами, то силы движения выражаются через г р а в и т а ц и о н н ы й п о т е н ц и а л φ, характеризующий удельную энергию гра-

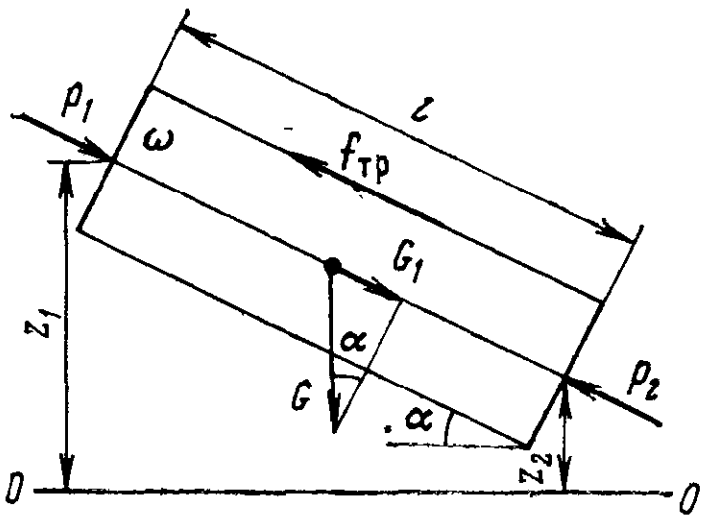


Рис. 2.3. Схема к выводу уравнения гравитационного потенциала

витационных сил в единице объема потока, идущих на преодоление сил вязкости. Выражение для φ можно получить, если рассмотреть [54] условия гидродинамического равновесия столбика воды длиной l и поперечным сечением ω, на концах которого действуют силы давления $P_1 = p_1\omega$ и $P_2 = p_2\omega$, направленные вдоль столбика (рис. 2.3). В объеме столбика $V = \omega l$ действует его вес $G = \rho g \omega l = \gamma \omega l$, направленный вертикально. Этим силам противодействуют силы сопротивления $f_{тр}$. Гидродинамическое равновесие всех сил в проекциях на ось столбика запишется так:

$$P_1 - P_2 + G\sin\alpha = f_{тр}.$$

Учитывая, что $l\sin\alpha = z_1 - z_2$, получим

$$(p_1 + \gamma z_1) - (p_2 + \gamma z_2) = f_{тр}/\omega. \qquad (2.11)$$

Вводя функцию

$$\varphi = p + \gamma z, \qquad (2.12)$$

(где p — гидростатическое давление) уравнение (2.11) с учетом (2.12) приведем к виду

$$\varphi_1 - \varphi_2 = f_{тр} l/V. \qquad (2.13)$$

Величина $f_{тр}l$ выражает работу сил сопротивления по длине потока l, а величина $f_{тр}l/V$ — энергию, требуемую для перемещения единичного объема воды между сечениями 1 и 2. Эта энергия по определению должна равняться разнице значений гравитационного потенциала в данных сечениях. Поэтому из уравнения (2.13) следует, что величина φ согласно формуле (2.12) является гравитационным потенциалом. Разделив выражение (2.13) на l, получим

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} = I_\varphi = \frac{f_{тр}}{V}, \qquad (2.14)$$

т. е. удельные силы сопротивления, действующие в потоке движущейся жидкости, пропорциональны градиенту гравитационного потенциала I_φ. Для пресной и слабоминерализованной воды $\gamma = \text{const}$, тогда от φ можно перейти к выражению гидростатического напора. Из зависимости (2.12) имеем:

$$H = \frac{\varphi}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + z = h_p + z, \qquad (2.15)$$

что совпадает с зависимостью (2.7).

Приведенный напор. Для неоднородных жидкостей в условиях, когда с изменением глубины залегания водоносного пласта происхо-

дит изменение плотности воды, т. е. $\gamma = f(z)$, напор становится величиной переменной и может быть представлен согласно А. И. Силину-Бекчурину [54] приведенным напором $H_{пр}$. Из выражения (2.7) имеем:

$$H_{пр} = \frac{1}{\gamma_0}\left(p + \int_{z_0}^{z} \gamma dz\right), \tag{2.15а}$$

где γ_0 — вес единицы объема воды на плоскости сравнения z_0 (в качестве γ_0 может быть взят вес единицы объема пресной воды); p — пластовое давление, замеренное на глубине z.

В зависимости от закономерностей изменения $\gamma = f(z)$ используют разные способы для вычисления интеграла в выражении (2.15а) и определения приведенных напоров или давлений. Наиболее простой способ предложен А. И. Силиным-Бекчуриным. Согласно этому способу интеграл в выражении (2.15а) представляется как

$$\int_{z_0}^{z} \gamma dz \approx \frac{\gamma_0 + \gamma_1}{2} \Delta z_1 + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \Delta z_2 + \ldots,$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ — вес единицы объема воды соответственно на отрезках ординаты Δz_1, Δz_2 и т. д.; $\sum_{1}^{i} \Delta z_i = z_i - z_0$. Однако в таких расчетах возникают погрешности в результате неопределенности выбора начальной плоскости сравнения z_0 и определения γ. Подробнее этот вопрос освещается в работах [4, 8, 54].

Показатели движения реальной жидкости. Энергия потока при движении реальной жидкости расходуется на преодоление сил вязкого трения и поэтому напорная поверхность понижается по направлению движения, и чем больше силы трения, тем больше перепад напоров и градиент напора (см. рис. 2.1, *б*, линия *6*):

$$I = H_1 - H_2/L_{1-2}, \tag{2.16}$$

где L — расстояние между H_1 и H_2.

Связь градиента напора со скоростью и расходом движения реальной жидкости можно получить, если использовать известные из гидравлики [8, 31, 34, 54] значения скорости u и расхода $Q_т$, характеризующие струйчатое движение вязкой жидкости в трубке радиусом R. Скорость u на расстоянии r от оси этой трубки описывается уравнением

$$u = \frac{\rho g I}{4\mu}(R^2 - r^2), \tag{.17}$$

из которого видно, что скорость в поперечном сечении трубки изменяется по параболическому закону и имеет максимальное значение вдоль оси трубки при $r = 0$ (рис. 2.4):

$$u_{max} = \frac{\rho g I R^2}{4\mu}. \tag{2.18}$$

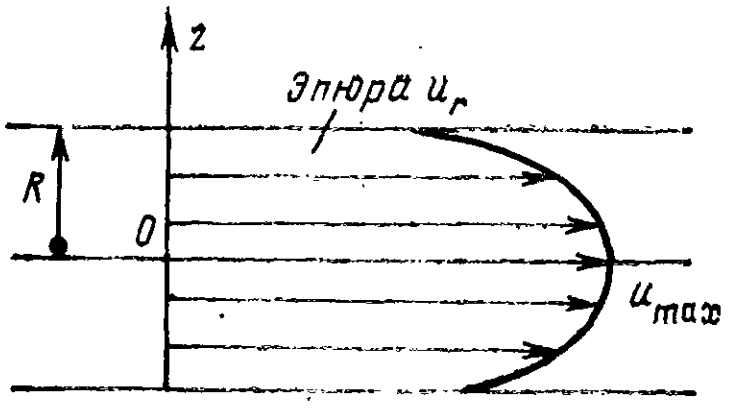


Рис. 2.4. Эпюра скоростей u_r по поперечному сечению трубки при вязком движении жидкости

Получим формулу (2.17), используя зависимости (2.10) и (2.13). Представим (см. рис. 2.1, *б*), что внутри трубки радиусом R на расстоянии r от ее оси находится струйка сечением $\omega = \pi r^2$ и длиной l, характеризующаяся равновесием сил согласно выражению (2.13). Выразим $\Delta\varphi = \gamma\Delta H$, а в правой части уравнения (2.13) силу трения $f_{тр}$ выразим через касательные напряжения τ, действующие по боковой поверхности $2\pi lr$, т. е. $f_{тр} = 2\pi rl\tau$. В результате получим

$$\gamma\Delta H = \frac{2\pi rl\tau}{\pi r^2 l} = \frac{2l\tau}{r} \text{ или } \tau = 0{,}5\gamma rI.$$

Заменяя τ по (2.10), получаем: $-\mu\frac{du}{dr} = 0{,}5\gamma rI$. Разделив переменные, интегрируя в пределах от r до R и приняв во внимание, что при $r = R$ $u = 0$, получаем формулу (2.17). Расход жидкости $Q_т$ в этой трубке определяется как объем тела вращения, разрез которого показан на рис. 2.4:

$$Q_т = 2\pi\int_0^R urdr = \frac{\pi\rho gR^4 I}{8\mu}. \qquad (2.19)$$

Эта зависимость известна как формула Гагена—Пуазейля. Средняя скорость $u_{ср}$ находится как отношение $Q_т$ к площади сечения трубки πR^2:

$$u_{ср} = \frac{\rho gR^2 I}{8\mu}. \qquad (2.20)$$

Как видно из формулы (2.20), средняя скорость пропорциональна квадрату радиуса трубки и напорному градиенту. В ламинарном потоке согласно выражению (2.14)

$$I = \frac{f_{тр}}{V} = \frac{f_{тр}}{\pi R^2\rho gl} = \frac{f_{тр}^V}{\gamma} \qquad (2.21)$$

и, следовательно, напорный градиент пропорционален силам вязкого трения, приходящимся на единицу объема движущейся жидкости.

Как видно из формулы (2.19), движение воды в трубке начинается при любом градиенте $I > 0$. Однако, как показывают опыты, в тонких капиллярах вода обладает кроме внутреннего трения дополнительной структурной прочностью вследствие молекулярного воздействия на нее твердой поверхности. Принято [34, 54] воду считать вязкопластическим телом с начальным напряжением сдвига τ_0. В этом случае по-

лагают, что структурные (молекулярные) связи по сечению поры распределены равномерно. Для таких условий касательное напряжение τ согласно закону вязкопластического течения (закон Бингама—Шведова) может быть выражено следующим образом:

$$\tau = \tau_0 + \mu \left| \frac{du}{dn} \right|. \qquad (2.22)$$

Как видно из выражения (2.22), при $\tau < \tau_0$ движение отсутствует: жидкость будет двигаться только при условии $\tau > \tau_0$. Если к торцам капилляра радиусом R и длиной l приложена разность напоров, $H_1 - H_2$ (см. рис. 2.3), то согласно выражению (2.22) и рис. 2.3, равнодействующая сила гидростатического давления, равная $P = \rho g (H_1 - H_2) \pi R^2$, должна преодолеть дополнительную силу трения $f_0 = \tau_0 2\pi R l$. Движение начнется при $F = f_0$, и можно найти начальный градиент потока I_0, отвечающий моменту возникновения движения воды,

$$I_0 = \frac{H_1 - H_2}{l} = \frac{2\tau_0}{\rho g R} = \frac{2\tau_0}{\gamma R} \qquad (2.23)$$

Величина τ_0 уменьшается почти на порядок при увеличении температуры от 15 до 60 °С и, следовательно, уменьшается величина I_0.

Режимы движения. Различают два режима движения — ламинарный и турбулентный. *Ламинарный* (струйный) наблюдается при малых скоростях движения и характеризуется отсутствием гидравлического перемешивания. Скорость движения согласно выражению (2.17) пропорциональна градиенту гидростатического напора, а силы сопротивления согласно формуле (2.14) пропорциональны первой степени градиента.

Турбулентному режиму свойственны беспорядочность движения струй, пульсация, активное гидравлическое перемешивание, что возникает при больших скоростях потоков и связано с проявлением сил инерции. Касательные напряжения в турбулентном потоке по Л. Прандтлю определяются зависимостью

$$\tau_т = (\mu + \mu_т) \left| \frac{du}{dn} \right| \text{ при } \mu_т = \rho l^2 \left| \frac{du}{dn} \right|, \qquad (2.24)$$

где $\mu_т$ — динамический коэффициент турбулентной вязкости; l — длина пути смещения, пропорциональная расстоянию от данной точки до стенки потока. При турбулентном движении согласно выражению (2.24) силы сопротивления пропорциональны квадрату скорости течения. О. Рейнольдс экспериментально установил, что режимы движения переходят один в другой плавно, между ними имеется переходная зона и можно найти критическую скорость $u_{кр}$, при которой ламинарный режим переходит в турбулентный [8, 35, 53]. Безразмерный параметр, по которому оценивается характер движения, получил название числа Рейнольдса Re и равен

$$\mathrm{Re} = 2\rho u_{ср} R/\mu. \qquad (2.25)$$

Критическое число Рейнольдса $Re_{кр}$, отвечающее верхней границе ламинарного движения воды в гладких трубках, составляет примерно 2200.

2.4. ГЕОМЕТРИЯ И СВОЙСТВА ПОРОВО-ТРЕЩИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Особенности порово-трещинного пространства. Выделяют следующие виды скважности [19]: 1) пористость осадочных не сцементированных (пески, галечники, суглинки, глины) и слабо сцементированных (песчаники, опоки) пород; 2) структурную пористость осадочных пород, связанную с наличием слоистости, структурных трещин и т. п.; 3) относительно равномерную трещиноватость выветривания и литогенетическую; 4) трещиноватость тектоническую (крупные трещины) и кавернозность (полости разной формы в известняках).

По размерам пор или трещин скважность подразделяется на не капиллярную (более 0,5 мм), капиллярную (от 0,5 до 0,0001 мм), субкапиллярную (менее 0,0001 мм). В первой и второй содержится свободная вода, в третьей — только физически связанная вода. Выделяют четыре типа порово-трещинного пространства и соответственно геологической среды: а) пористую, б) с двойной пористостью, в) трещиноватую, г) с двойной трещиноватостью. Первый тип, несмотря на наличие пор разных размеров и формы, статистически характеризуется как достаточно однородная для движения воды среда. Второй тип отличается тем, что наряду с пористостью имеются трещины, которыми толща слабо сцементированных пористых пород разбивается на многочисленные блоки разных размеров. В этом случае среда считается гетерогенной. Третий тип похож на первый и характеризуется наличием незакономерно расположенных небольших трещин, которые образуют достаточно однородную для движения воды среду. Четвертый тип похож на второй, но отличается тем, что в массиве имеются системы крупных трещин или каналов, разбивающие среду на разной крупности трещиноватые блоки. Тем самым создается гетерогенно-блоковая структура трещинного пространства.

Показатели порово-трещинного пространства. К ним относят пористость n, трещиноватость $n_т$, удельную поверхность пустотного пространства S, коэффициент извилистости χ. Пористость характеризует долю порового пространства $V_п$ в общем объеме V горной породы:

$$n = V_п/V, \tag{2.26}$$

а трещиноватость — относительный объем трещин. Кроме того, используется понятие приведенной пористости, представляющее собой отношение $V_п$ к объему скелета $V_с$ породы. В этом случае коэффициент приведенной пористости ε равен

$$\varepsilon = n/(1-n). \tag{2.27}$$

Средние значения пористости для некоторых пород следующие (в %): пески 35—45, глины 45—60, песчаники, опоки, карбонатные породы 5—3, кристаллические метаморфические и изверженные породы — 1—2 и менее. Трещиноватость всегда меньше пористости, часто она составляет менее 1 % и редко превышает 5 %.

Выделяют общую n, открытую n_o и активную n_a пористость (трещиноватость). О б щ а я пористость характеризует весь объем порово-трещинного пространства и не позволяет судить о пропускной и емкостной способностях породы, так как некоторые поры и трещины могут быть несообщающимися (тупиковыми) и содержать физически связанную воду, что уменьшает объем порово-трещинного пространства, через которое движется свободная вода. Пропускная способность породы зависит от размеров пор и трещин. О т к р ы т а я пористость (трещиноватость) характеризует долю сообщающихся между собой пор и трещин, а а к т и в н а я — дополнительно учитывает ту часть порово-трещинного пространства, которая занята физически связанной водой и практически не принимает участия в механическом движении воды. Активная и открытая пористости в песках практически равны общей пористости, а в суглинках и глинах они существенно меньше нее и часто не превышают первых процентов.

Удельная поверхность порово-трещинного пространства (общая поверхность пор и трещин в 1 см^3 породы) весьма значительна, особенно для глин, и может достигать 10 м^2 и более. Поэтому вода, двигаясь в такой среде, расходует дополнительную энергию на трение о стенки пор и трещин, и тем больше, чем меньше их размеры. Относительный характер геометрии порово-трещинного пространства оценивается коэффициентом извилистости χ (коэффициент Клинкенберга, который ввел его при исследовании массопереноса в подземных водах). Он всегда меньше единицы, для рыхлых песков равен 0,5—0,7, а для сцементированных песков — 0,25—0,5.

Упругость горных пород. Размеры пор зависят от укладки минеральных зерен, а размеры трещин — от их раскрытости. Под влиянием внешней нагрузки и с ростом глубины залегания пород скважность (пустотность) пород снижается главным образом за счет более плотной укладки минеральных зерен и уменьшения раскрытости трещин, т. е. сокращения объема пустотности, и в меньшей степени под влиянием упругого сжатия, вязкопластических и других деформаций скелета породы. Пески, галечники, аргиллиты, песчаники и карбонатные породы обычно рассматриваются как упругодеформируемое (или линейно деформируемое) тело, способное после снятия нагрузки восстанавливать первоначальную структуру порово-трещинного пространства. Глины и суглинки при небольших изменениях давления Δp_c на породу ведут се-

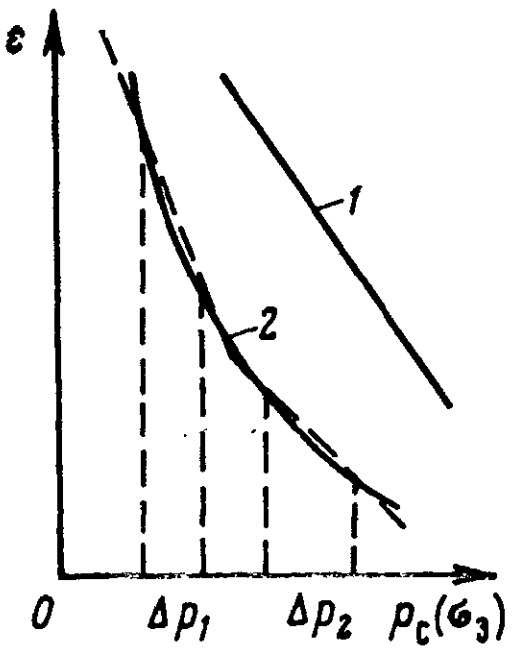


Рис. 2.5. Типовой график сжимаемости порового пространства песчаной (*1*) и глинистой (*2*) породы под влиянием приложенного к ней давления $\varepsilon = f(p)$

бя как условно упругодеформируемое тело, а при значительных — в них проявляются пластические и другие деформации. Характер изменения пустотного пространства под влиянием эффективных давлений p_c на скелет породы оценивается экспериментальной кривой зависимости $\varepsilon = f(p_c)$, которая называется компрессионной кривой [34, 44]. На рис. 2.5 показаны типовые кривые для упругодеформируемой (*1*) и условно упругодеформируемой (*2*) сред. Уклон кривых характеризует величину коэффициента сжимаемости a_c. Часто пользуются показателем удельного сжатия (расширения) скелета породы β_c. Минеральный скелет породы сжимается очень слабо, и для базальтов, кварцитов, аргиллитов, песчаников и известняков величина β_c имеет порядок $(0{,}8—5)\cdot 10^{-11}$ Па$^{-1}$, что на порядок меньше, чем для воды.

Закон Гука для линейно деформируемой породы можно записать в виде

$$\Delta\varepsilon = \Delta V_п / V_c = -a_c \Delta p_c, \qquad (2.28)$$

где учтено, что ε связано с n зависимостью (2.27); $V_п = Vn$ — объем порового пространства в деформируемом объеме V; $V_п = V(1—n)$ — объем минерального скелета породы в заданном объеме V (принимается неизменным).

2.5. ВИДЫ ВОДЫ, МОЛЕКУЛЯРНЫЕ И КАПИЛЛЯРНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СИСТЕМЕ ГП ⇄ ПВ

Виды воды. Для задач динамики подземных вод зоны активного водообмена интерес представляют свободная и физически связанная вода. В качестве критерия для оценки количества связанной воды в поровом пространстве используются максимальная молекулярная $\theta_{мм}$ (для песков) и наименьшая полевая $\theta_{нв}$ (для суглинков и глин) влагоемкости. Для песков $\theta_{мм}$ изменяется от первых до 12 %, а для глин $\theta_{нв}$ составляет 20—25 % и более, что существенно уменьшает живое сечение пор, так как связанную воду считают неподвижной.

Молекулярные взаимодействия. Вода в порово-трещинном пространстве находится под влиянием молекулярных взаимодействий, возникающих между минеральным скелетом и поровым раствором (диссоциированными молекулами воды, ионами, коллоидными частицами, органическими комплексами и т. п.). Влияние этих взаимодействий существенно снижается с удалением от поверхности минерального скелета. Оно максимально в тонкодисперсных (глинистых) породах и мало — в песках с крупными порами. Взаимодействие проявляется в определенной ориентировке дипольных молекул воды и других заряженных частиц раствора около отрицательно заряженных минеральных частиц [25, 44]. Образуются слои или зоны с разными структурой и интенсивностью молекулярной связи (рис. 2.6). Наиболее прочные связи существуют во внутреннем слое и межпакетном пространстве глинистых минералов. В следующем, адсорбционном слое (слой Гельмгольца) ближайшие к твердой поверхности частицы раствора прочно связаны с ней, а другие, более удаленные, строго

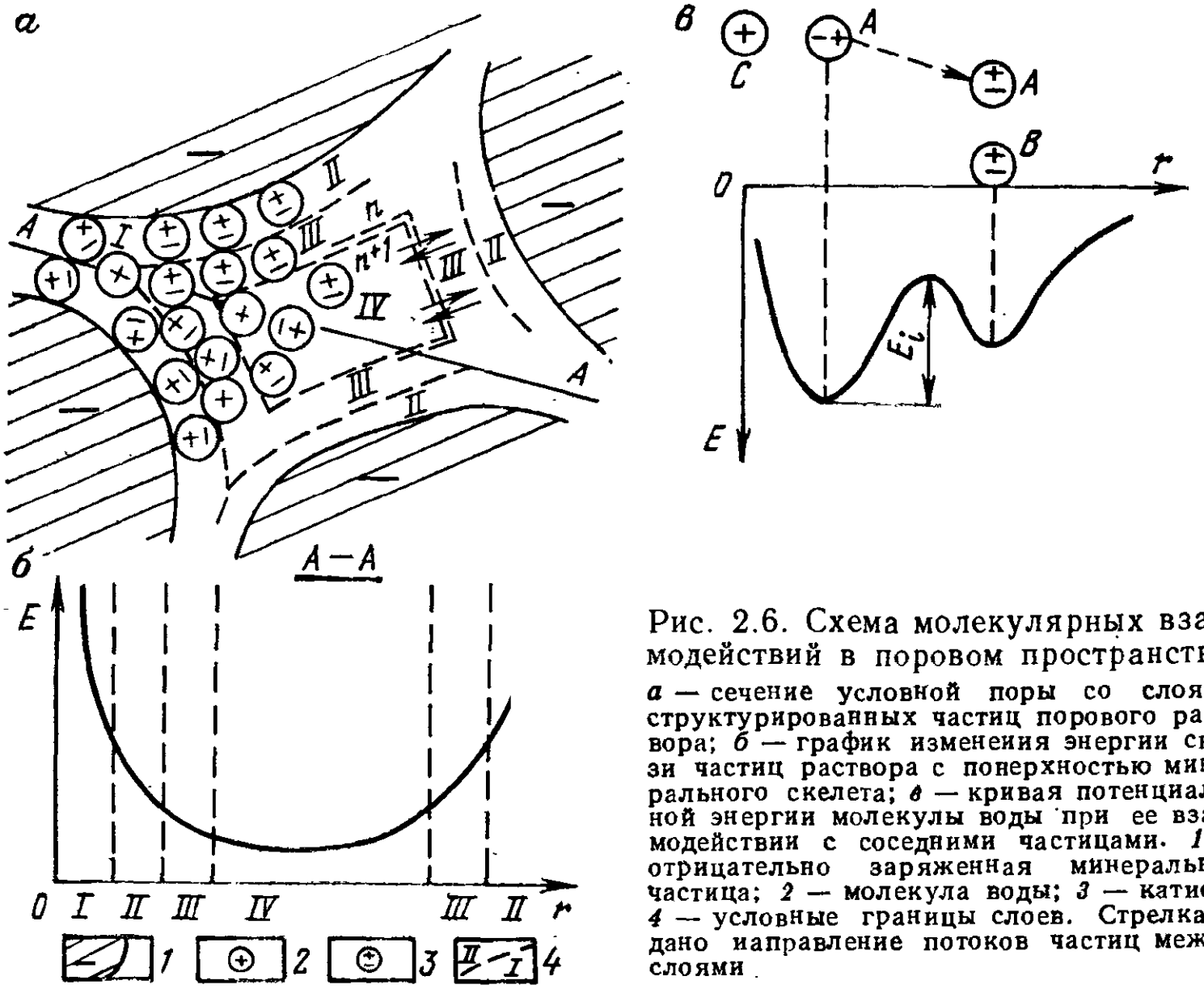


Рис. 2.6. Схема молекулярных взаимодействий в поровом пространстве:

а — сечение условной поры со слоями структурированных частиц порового раствора; *б* — график изменения энергии связи частиц раствора с поверхностью минерального скелета; *в* — кривая потенциальной энергии молекулы воды при ее взаимодействии с соседними частицами. *1* — отрицательно заряженная минеральная частица; *2* — молекула воды; *3* — катион; *4* — условные границы слоев. Стрелками дано направление потоков частиц между слоями.

ориентированы. Энергия связей здесь тоже очень высока. В третьем (диффузном) слое толщиной 1—10 нм молекулы и ионы менее ориентированы (менее структурированы). Энергия их связи с минеральной частицей невелика. В четвертом слое имеется зона свободной воды, где молекулярные взаимодействия практически равны нулю. С ростом температуры и давления толщина диффузного слоя убывает, особенно резкие изменения наблюдаются при 60—80 °С. На толщину этого слоя влияет состав обменных катионов [25]. Структурированность воды влияет на характер ее движения под действием внешних сил.

Молекулы любого вещества совершают тепловые трансляционные колебательные движения около временного положения равновесия, переходя скачками из одного положения равновесия в другое. Положению равновесия отвечает минимум энергии частицы. Основные положения теории трансляционного движения молекул вещества были сформулированы Я. И. Френкелем в 1925 г. В качестве структурной теории водных растворов они получили развитие применительно к проблеме формирования химического состава подземных вод в работах [28, 43], а применительно к исследованию физических основ фильтрации воды в горных породах — в работе [2]. Частица раствора, совершая трансляционное движение и соударяясь с соседними, накапливает некоторый запас энергии, который называется э н е р г и е й а к т и в а ц и и E_a. Из одного положения равновесия в другое она переместится, если ее энергия активации E_a окажется больше, чем

потенциальный барьер E_i, под которым понимают максимум энергии между двумя соседними минимумами, соответствующими положениям временного равновесия данной частицы. На рис. 2.6, *в* на кривой потенциальной энергии молекулы *A* глубокий (левый) минимум отвечает взаимодействию молекулы воды *A* с ионом *C* (ион-дипольное взаимодействие) и временному положению равновесия, а правый (менее глубокий) — взаимодействию двух молекул воды *A* и *B* (диполь-дипольное взаимодействие) и следующему положению равновесия.

Возможны два случая перемещения частицы жидкости, когда $E_a > E_i$ или $(E_a + E_в) > E_i$ (где $E_в$ — энергия внешних сил). В первом случае трансляционный скачок равновероятен во все стороны, а во втором — направлен по действию внешней силы, так как в этом направлении уменьшается E_i.

Молекулы воды и растворенного вещества перемещаются внутри поры из слоя в слой, хотя толщина самих структурированных слоев, обусловленная минеральным составом скелета, характером раствора и термодинамическими условиями, сохраняется. Принимая, что в общем балансе сил, действующих на связанную воду, доля сил гравитации и гидростатического давления невелика, принято считать физически связанную воду практически неподвижной и условно относить ее к минеральному скелету. Однако нельзя забывать, что количество связанной воды в породе и возможность ее перехода в свободную зависят от температуры, механического давления на породу, минерализации и состава поровой воды.

Капиллярные взаимодействия. В зоне аэрации в условиях неполного водонасыщения воздух представляет собой самостоятельную непрерывную фазу, поэтому в поровом пространстве на контакте воды и воздуха проявляется действие капиллярных сил, описываемое выражениями (2.5) и (2.6). Такое взаимодействие наблюдается по простиранию водоносного горизонта на линии уровня грунтовых вод и в вертикальной плоскости, когда в зоне аэрации движется нисходящий поток инфильтрующейся воды (из каналов или шурфов при специальных опытных наливах). На линии, разделяющей области полного и неполного водонасыщения, проявляются капиллярные взаимодействия и формируется зона, которую называют капиллярной. На разделяющей линии гидростатическое давление равно атмосферному и обычно принимается за нулевое; в капиллярной зоне давление отрицательное.

При медленных изменениях гидростатического давления в зоне полного насыщения (например, при колебаниях уровня грунтовых вод) капиллярная зона успевает перемещаться вслед за движением границы нулевого давления; при быстрых изменениях этого не наблюдается и происходит нарушение контакта. Математически учесть это явление сложно, и в теории фильтрации обычно по линии уровня грунтовых вод капиллярными взаимодействиями пренебрегают, сохраняя предпосылку о медленном перемещении этого уровня. Детально эти взаимодействия учитываются в теории влагопереноса. В нижней части капиллярной зоны [1, 19] капиллярная вода обладает

свойствами свободной: передает гидростатическое давление и движется в соответствии с общим уклоном грунтовых вод.

З а д а ч а. Записать значение гидростатического напора на линии уровня грунтовых вод, использовав формулу (2.7). Объяснить, почему в капиллярной зоне давление ниже атмосферного; указать, чем различается действие капиллярных сил в нисходящем инфильтрационном потоке, на боковых и нижней его границах, почему пьезометрическая скважина не фиксирует капиллярной зоны, будет ли вода в шурфе, если он вскроет только капиллярную зону?

2.6. НАПРЯЖЕНИЯ В ВОДОНАСЫЩЕННЫХ ГОРНЫХ ПОРОДАХ И ГЕОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ

Напряжения в водонасыщенных породах. В массивах водонасыщенных горных пород невозможно изучить конкретные силовые взаимодействия между минеральным скелетом и водой в каждой поре или трещине. Для описания этих сложных взаимодействий используют обобщенные показатели. К ним относят напряжения σ, статистически усредненные по некоторому объему. В этом случае напряжения определяются как предельное отношение общей силы G (вес пород) к некоторой площади ω (сумма контактов минеральных зерен, приходящихся на эту площадь) при условии $\omega \to \omega_0$, (где ω_0 — элементарная площадка, удовлетворяющая требованиям представительности сплошной среды (см. гл. 3)):

$$\sigma = \lim_{\omega \to \omega_0} \frac{G}{\omega}.$$

В геологической среде действуют две категории напряжений: 1) в минеральном скелете; 2) во внутрипоровой воде. Первые носят название э ф ф е к т и в н ы х $\sigma_э$ и характеризуют все механические (прочностные) свойства горной породы (деформация, прочность, сжатие, сдвиг и т. п.), а вторые связаны с гидростатическим давлением в жидкости, вызывают всестороннее сжатие минерального скелета, а так как оно мало, его не учитывают и поэтому напряжения называют н е й т р а л ь н ы м и $\sigma_н$. Для каждой точки водонасыщенного пространства

$$\sigma_н = \gamma h_р. \qquad (2.29)$$

Так как результирующая гидростатического давления есть взвешивающая сила, то она уменьшает эффективные напряжения, поэтому при осушении водоносные породы уплотняются.

Рассмотрим гидродинамические условия формирования напряжений и характер их проявления в напорном горизонте многопластовой системы (рис. 2.7). Выделим единичный объем пород, представляющий собой квадратную призму; площадь ее основания $\omega_0 = 1$ м^2, а высота равна мощности z пород, залегающих над кровлей. Полное общее давление $p_п$, оказываемое столбом пород на единичную пло-

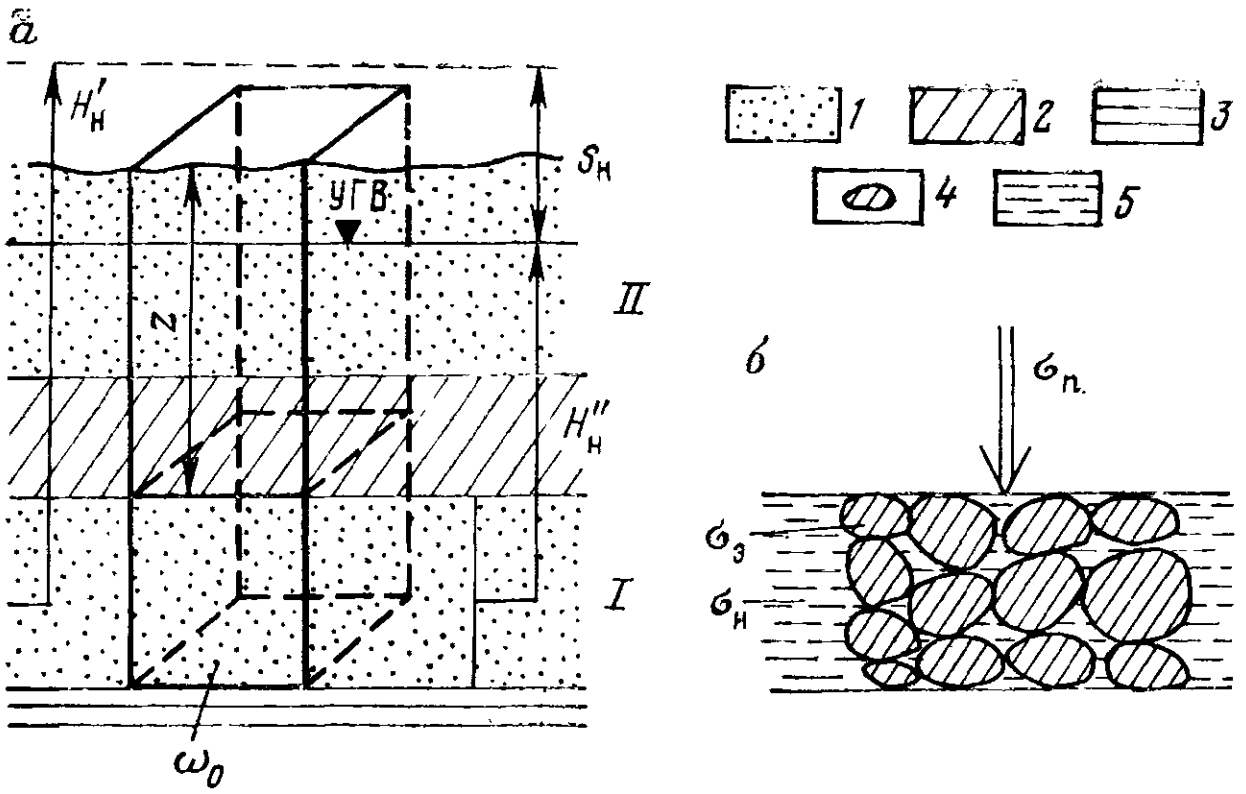


Рис. 2.7. Схемы, иллюстрирующие формирование геостатического давления в ГДС (*а*) и взаимодействие полного, эффективного и нейтрального напряжений (*б*):

1 — водоносный песок; *2* — разделяющий слабопроницаемый слой; *3* — водоупор; *4* — минеральная частица; *5* — поровая вода. *I*, *II* — водоносные слои

щадку ω_0, определяется давлением этих пород вместе с заключенной в них водой и тождественно полному напряжению $\sigma_п$:

$$p_п = \gamma_{ср} z = \sigma_п, \qquad (2.30)$$

где $\gamma_{ср}$ — среднее значение веса единицы объема пород.

В этом случае принято, что давление действует только в вертикальной плоскости и не передается на боковые зоны, а весь комплекс водонасыщенных пород ведет себя как абсолютно гибкая плита, т. е. жесткость пород (их противодействие давлению) во внимание не принимается, что справедливо, если зона динамического воздействия более чем в 3—5 раз превосходит мощность всего комплекса [34]. Это напряжение уравновешивается нормальной к этой площадке реакцией скелета породы $\sigma_{эр}$ и гидродинамическим давлением, действующим во внутрипоровой воде, т. е. $\sigma_н$, и тогда $\sigma_п = \sigma_{эр} + \sigma_и$. Напряжение $\sigma_э$, характеризующее силу взаимодействия частиц минерального скелета, по величине равно $\sigma_{эр}$, и, рассматривая абсолютные значения напряжений, можно записать

$$\sigma_п = \sigma_н + \sigma_э. \qquad (2.31)$$

Из формул (2.30) и (2.31) следует, что изменение мощности z вышележащих пород (в результате накопления осадков или сооружения котлованов) оказывает влияние на изменение действующих эффективных $\sigma_э$ (в скелете нижележащих горных пород) и нейтральных $\sigma_н$ (в содержащейся в них подземной воде) напряжений. Капиллярное давление увеличивает эффективные напряжения; что следует из выражений (2.31) и (2.6).

Если изменений $\Delta\sigma_п$ не наблюдается или изменениями веса столба пород можно пренебречь (как в примере на рис. 2.7, *а*, где $S \ll z$), то, считая $\Delta\sigma_п = 0$, из выражений (2.29) и (2.31) получаем

$$\Delta\sigma_э = -\Delta\sigma_н = -\gamma S, \tag{2.32}$$

где S — понижение уровня.

Формула (2.32) показывает, что снижение напоров на каждые 100 м приводит к росту эффективных напряжений в скелете пород на 1 МПа, чем и объясняются многочисленные случаи оседания земной поверхности в районах интенсивного водоотбора, а также возникновение землетрясений при заполнении крупных водохранилищ, вызывающих согласно формуле (2.31) рост $\sigma_н$ и уменьшение $\sigma_э$, что способствует смещению блоков пород по ослабленным зонам разломов. Подробнее вопрос о напряжениях рассматривается в работах [31, 34].

Геостатическое давление в подземных водах. Если переписать формулу (2.31) иначе: $\sigma_н = \sigma_п - \sigma_э$, то можно прийти к выводу, что пластовое давление воды изменяется не только при изменении гидростатических напоров под влиянием откачки или нагнетания, но и под влиянием изменения давления на кровлю водоносного пласта в результате уменьшения или увеличения мощности залегающих в его кровле пород. Последнее явление можно наблюдать, изучая геологическую историю развития ГГС [11] или техногенные воздействия (сооружение плотин и водохранилищ, крупных карьеров [54]).

Пластовое давление воды, формирующееся под влиянием изменения веса вышележащих пород, называют г е о с т а т и ч е с к и м и считают наравне с гидростатическим давлением основной силой, формирующей движение подземных вод в водоносных пластах. Если пренебречь жесткостью пород водоносного горизонта, то величину формирующегося в нем геостатического давления $p_г$ можно определять по формуле (2.30), величину геостатического напора $H_г$ — по (2.7), а градиент напора I — по (2.16).

Возникновение движения воды в напорном пласте в результате проявления упругих свойств пласта в целом можно представить следующим образом. Положим, что вес вышележащих пород в кровле пласта не изменяется, т. е. $\sigma_п = 0$. Снижение напора в пласте (например, при откачке), как видно из формулы (2.29), вызывает уменьшение $\sigma_н$ и согласно (2.31) увеличение давления $\sigma_э$ на скелет породы. Сами минеральные зерна сжимаются мало, сжимается цементирующее их вещество, зерна перемещаются в сторону пустот, происходят уменьшение объема пор и вытекание из них воды. Одновременно снижение пластового давления приводит к упругому расширению самой воды и наблюдается дополнительный отток ее из пор и поступление в скважину. При этом считается, что уменьшение объема пор, упругое расширение и вытекание воды из пор происходят одновременно.

2.7. ПОНЯТИЕ О СПЛОШНОЙ ГЕОФИЛЬТРАЦИОННОЙ СРЕДЕ

В зависимости от того, с каких позиций рассматривают процесс движения воды в геологической среде, математически учитывают те или иные ее свойства и взаимодействия. В механике сплошных сред [4, 8, 40] под *элементарным объемом* понимают некоторый объем сплошной среды, несоизмеримо меньший, чем выделяемая для рассмотрения часть исследуемой среды, но в то же время несравненно больший, чем размер слагающих его частиц и расстояния между ними. В этом случае элементарный объем обладает всеми макроскопически проявляющимися свойствами, присущими сплошной среде: вязкостью, упругостью, проницаемостью и т. п. *Потоком* называют объем или массу элементарных частиц, проходящих за единицу времени через единичную неподвижную поверхность. Применительно к процессу фильтрации подземных вод в геологической среде это означает, что под *фильтрацией* понимают только механическое перемещение под действием внешних сил частиц воды в порово-трещинном пространстве без учета их взаимодействия со скелетом породы. При этом в элементарном объеме сечения пор, раскрытость и длину трещин считают весьма малыми, и поэтому их конкретную форму и размеры во внимание не принимают, распределение их в элементарном объеме считают статистически равномерным. Это позволяет учесть влияние порово-трещинного пространства на движение подземных вод через обобщенные показатели. Так, объем пространства, через который движется свободная вода, учитывают с помощью активной пористости, действие силы общего внутреннего трения, которое возникает между струйками воды и между водой и поверхностью минерального скелета породы,— с помощью коэффициента фильтрации, а количество свободной воды, которое может отдать или взять единица объема порово-трещинного пространства,— с помощью коэффициента емкости (как разность между пористостью или полной влагоемкостью и максимальной молекулярной влагоемкостью). При этом принимают, что закон распределения показателей этих свойств для всей изучаемой области известен. Такой элементарный объем называют *представительным, или репрезентативным*.

Размер элементарного объема определяют опытным путем. Минимальный размер этого объема, начиная с которого его уменьшение вызывает изменение количества фильтрующейся через него воды, и определяют как представительный. Диаметр репрезентативного объема должен быть в 7—10 раз больше среднего диаметра слагающих его минеральных частиц (или других элементов, принятых за «частицы») [8]. Применительно к пористой и тонкотрещиноватой геологической среде понятие сплошной среды правомерно, потому что сечения пор и мелких трещин измеряются микрометрами также, как и размеры минеральных частиц или их агрегатов. Ясно, что в породах с блоковой структурой (закарстованные известняки) и наличием систем крупных трещин и разломов представительный объем для того, чтобы пользоваться понятием сплошной среды, должен быть существенно бо́льшим. В таких случаях следует каждый раз оценивать пред-

полагаемый репрезентативный объем и его соотношение с размерами изучаемой области, чтобы убедиться, что теория фильтрации и понятие сплошной среды могут быть использованы.

Системный подход позволяет высказать такие соображения о принципах изучения фильтрации в ГГС разного масштаба:

— каждый уровень и тип ГГС должны характеризоваться своими репрезентативным объемом и содержанием понятия «сплошная фильтрационная среда»;

— теорию фильтрации можно применить к ГГС любого уровня, если определить, что понимать под порово-трещинным пространством и параметрами такой ГГС, считать, что движение подземных вод в крупных бассейнах идет медленно, ламинарность движения сохраняется и новых сил движения, помимо гидростатического и геостатического давлений, нет.

Ясно, что для бассейна в целом представительный объем будет значительным и требуется разработка методов изучения и описания таких сплошных сред. В настоящее время при региональных гидрогеологических исследованиях запасы и ресурсы подземных вод региона оценивают, используя методы и приемы теории фильтрации. Однако вопросы достоверности полученных результатов и многие другие остаются пока открытыми.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какова энергетическая сущность понятий «гидростатический напор» и «гидродинамический напор»? Почему в динамике подземных вод можно пользоваться только понятием «гидростатический напор»? Что такое приведенный напор?

2. Если в водоносном напорном пласте, движущемся к реке, которая вскрывает его кровлю, пробурить вблизи реки в одном сечении две скважины и вскрыть водоносный пласт дном одной из них вблизи подошвы, а дном другой — вблизи кровли, то одинаковые или различные отметки пьезометрического уровня будут получены; будут ли различаться их пьезометрические высоты?

3. Проявляется ли действие сил вязкости при движении идеальной жидкости? Какие силы действуют при ламинарном движении реальной жидкости?

4. Каким уравнением описывается движение воды в капиллярной трубке? Назовите уравнения, которые показывают, что силы внутреннего трения и скорость ламинарного движения пропорциональны напорному градиенту.

5. Какие параметры характеризуют геометрию порово-трещинного пространства? Какие взаимодействия ему свойственны?

6. Как записать закон Гука для линейно деформируемой горной породы?

7. Что такое полное, эффективное и нейтральное напряжения водонасыщенной породы?

8. Что такое геостатическое давление и как оно возникает? Как определить градиент геостатического напора?

Глава 3

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФИЛЬТРАЦИИ В ГДС

Под гидродинамическими основами фильтрации понимают основные феноменологические законы, которые связывают главные силы движения с основными факторами, определяющими это движение. К таким факторам относятся показатели среды, в которой идет движение, и характеристики структуры движения в принятой системе координат. Феноменологические законы устанавливаются из общих соображений на основе анализа большого объема данных наблюдений за особенностями течения исследуемого процесса.

3.1. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ЗАКОНА ФИЛЬТРАЦИИ

Основной закон фильтрации воды в пористой среде был установлен французским гидравликом А. Дарси в 1856 г. путем наблюдений за расходом воды через образец песка с заданными длиной и площадью поперечного сечения. В дальнейшем полученная математическая зависимость названа законом Дарси.

Сформулируем основные положения, которые обосновывают закон фильтрации и вытекают из рассмотрения общих свойств воды как жидкости и геологической среды (см. гл. 2).

1. Поры и трещины имеют разные размеры и форму, площадь их внутренней поверхности значительна и увеличивается с уменьшением дисперсности пород. Молекулярное взаимодействие минерального скелета с водой создает дополнительное к внутренним силам трения сопротивление воды как вязкой жидкости. В крупных порах и трещинах это взаимодействие невелико, но его роль возрастает с уменьшением размеров пор и трещин.

2. В условиях полного заполнения порового пространства водой (что оценивается активной пористостью n_a), несмотря на дискретность геологической среды, существует непрерывная гидравлическая фаза, передающая изменение гидростатического и геостатического давлений, или напоров. Отсюда следует, что при ламинарном движении, как показывают уравнение (2.21), должна соблюдаться пропорциональная связь между силой общего внутреннего трения и изменением потенциальной энергии потока, т. е. градиентом потенциала I_Φ, [см. уравнение (2.14)] или градиентом напора I [см. уравнение (2.10)]

$$f_{\text{тр}_{\text{об}}} = -\gamma \frac{\Delta H}{\Delta l}, \qquad (3.1)$$

где $f_{\text{тр}_{\text{об}}}$ — сила общего трения, приходящаяся на единицу объема порового пространства; $\gamma = \rho g$; ΔH — разность напоров на длине потока Δl.

3. Минеральные зерна рыхлых осадочных пород имеют разные форму, размеры и расположение относительно друг друга, и можно полагать, что в массиве горных пород создается система трубчатых

поровых канальцев, напоминающих капиллярные и субкапиллярные трубки. Тогда основные гидродинамические зависимости, установленные для движения воды в таких трубках (закон Пуазейля—Гагена и др.), справедливы для системы трубчатых канальцев в массиве пород, и, как подтверждают многочисленные эксперименты, существует линейная связь между скоростью u движения воды в поровом пространстве массива и градиентом давления или пьезометрического напора I.

4. Полагая, что в массиве трещиноватых водоносных пород системы трещин разной формы и длины (от субкапиллярных до капиллярных) полностью насыщены водой и образуют сплошную гидравлическую среду, можно принять справедливыми для таких пород вышеназванные выводы о ламинарном движении и пропорциональности силы общего внутреннего трения и скорости движения градиенту напора.

5. Очевидно, что эта пропорциональность может нарушаться, если помимо указанных выше сил при движении воды будут появляться другие. Следовательно, для реальных гидрогеологических условий необходимо решать вопрос об области применения закона линейного движения.

6. Поскольку разнообразные формы и размеры пор и трещин в реальной геологической среде описать математически невозможно, целесообразно движение воды в ней исследовать на принципах механики сплошных сред (см. разд. 2.7), выделяя репрезентативный объем применительно к каждому типу строения геологической среды. В этом случае реальная структура порово-трещинного пространства во внимание не принимается и учитывается обобщенными параметрами n_a, k, μ.

3.2. ЗАКОН ФИЛЬТРАЦИИ И ЕГО ОБОБЩЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Основной закон фильтрации. Он связывает расход потока с линейными потерями напора, характеризующими затраты энергии потока на преодоление всех сил внутреннего сопротивления среды. В качестве кинематической характеристики такого потока используют скорость фильтрации v как отношение реального расхода Q потока ко всей площади его поперечного сечения ω

$$v = Q/\omega. \tag{3.2}$$

В этом случае величина v не является действительной скоростью фильтрации, поскольку при ее определении учитывается вся площадь сечения потока, а не площадь порового пространства, через которую фактически движется вода. Значение скорости v дает возможность легко сравнивать между собой различные потоки. Можно связать величину v с действительной скоростью u. Для этого следует активную пористость n_a ввести в площадь живого сечения потока; тогда получим $u = Q/(n_a\omega)$ и, учитывая выражение (3.2), найдем

$$u = v/n_a. \tag{3.3}$$

Допущение о малости значений v позволяет использовать гидростатический напор и считать поток ламинарным, имеющим линейную

связь между v и I. При постоянном сечении ω расход потока определен как

$$Q = k\omega I, \tag{3.4}$$

где градиент напора I определяется по формуле (2.16). Коэффициент пропорциональности k в выражении (3.4) называется коэффициентом фильтрации и характеризует сопротивление порового или трещинного пространства горной породы движению воды, зависит от его структуры и свойств фильтрующейся воды. Используя понятие скорости фильтрации, полученное по формуле (3.2), можно выражение (3.4) записать в следующем виде:

$$v = kI. \tag{3.5}$$

Из выражения (3.5) следует, что k имеет размерность скорости (метры в сутки) и определяется как единичный расход (при $\omega = 1$ м^2) или скорость фильтрации при напорном градиенте, равном единице.

Закон, устанавливающий линеинную связь между v и I при фильтрации воды через порово-трещинное пространство геологической среды, называется основным законом фильтрации, а уравнения (3.4) и (3.5) — уравнениями Дарси. Для реальной среды получить закон Дарси из теоретических соображений нельзя, так как неизвестна геометрическая структура пустотного пространства. Были предприняты попытки [3, 8, 15, 19, 34] получить его для идеализированной структуры порового пространства в виде параллельных трубочек-капилляров (идеальная среда) или круглых частиц одного радиуса (фиктивная среда).

При изучении фильтрации воды с переменными плотностью и вязкостью используют другую форму закона Дарси. Влияние плотности учитывается заменой градиента напора I на градиент гравитационного потенциала I_φ, а влияние вязкости на силы внутреннего трения — введением в v коэффициента динамической вязкости μ:

$$v = \frac{k_\text{п}}{\mu} I_\varphi,$$

где $k_\text{п}$ — коэффициент проницаемости, не зависящий от свойств фильтрующейся жидкости и определяемый геометрией порово-трещинного пространства (что справедливо только для тех случаев, когда геометрия среды не изменяется под влиянием уплотнения и физико-химических взаимодействий воды и породы).

Принимая во внимание, что согласно выражению (2.15)

$$I_\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \gamma \frac{\Delta H}{\Delta l} = \gamma I,$$

получаем

$$v = \frac{k_\text{п}\gamma}{\mu} I. \tag{3.6}$$

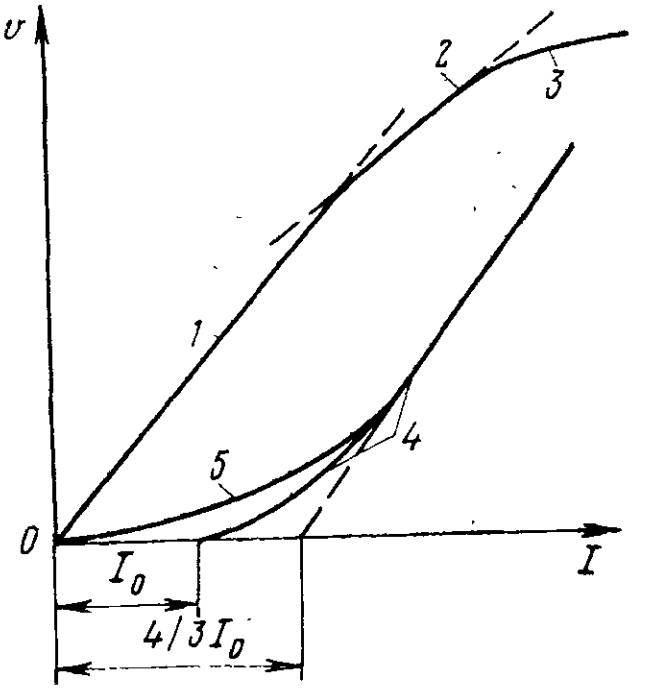


Рис. 3.1. Графическое изображение обобщенного закона Дарси.

Графики: *1* — линейного закона Дарси, $v = kI$; *2* — приближенной линейной зависимости для переходного режима фильтрации, $v = k'I$; *3* — обобщенного закона при линейно-турбулентном режиме фильтрации $I = (v/k)(1 + \alpha v)$; *4* — то же, при линейно-вязкопластическом двнженин $v = k_0 (I \frac{v}{3} I_0)$ и с отсутствием фильтрационного потока, при $I < I_0$; *5* — то же, с учетом молекулярного взаимодействия $v = k\left(I - \frac{3}{4} I_0\right)$ при наличии молекулярного потока при $I < I_0$ и закона фильтрации по Дарсн при $I \gg I_0$

Сопоставив формулы (3.5) и (3.6), найдем связь коэффициентов k и $k_п$:

$$k = \frac{k_п \gamma}{\mu} = \frac{k_п g}{\nu}, \tag{3.7}$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости.

Размерность $k_п$ определяется из формулы (3.7) при условии, что $[\nu] = м^2/с$ и $[g] = м/с^2$, тогда

$$[k_п] = [k]\frac{[\nu]}{[g]} = \frac{L}{T}\frac{L^2 I^{-1}}{L I^{-2}} = L^2,$$

т. е. имеет размерность площади. (В практике гидрогеологических изысканий для измерения $k_п$ иногда используется единица, называемая дарси, при этом 1 д $= 10^{-8}$ см^2. Для пресной воды при 20 °С коэффициент проницаемости, выраженный в дарси, примерно равен коэффициенту фильтрации, выраженному в метрах в сутки, 1 д$\approx$0,86 м/сут.)

Обобщенные законы фильтрации. Закон Дарси описывает линейную связь v и I, которая на графике (рис. 3.1) представлена прямой линией. Закон Дарси справедлив в широких пределах, о чем свидетельствуют натурные данные, однако он может нарушаться, поэтому существуют верхний и нижний пределы его применения. В первом случае имеется в виду применимость линейного закона фильтрации к движению подземных вод главным образом в закарстованных породах и породах с крупными системами открытых трещин; во втором — к движению воды в глинистых, тонкодисперсных породах.

При высоких скоростях движения проявляются инерционно-пульсационные силы, имеющие квадратичную зависимость от скорости течения (см. рис. 3.1, кривая *3*), а при движении в тонкодисперсных породах — силы молекулярного взаимодействия, структурирующие жидкость и тем самым усиливающие тормозящее действие сил внутреннего сопротивления (см. рис. 3.1, кривые *4* и *5*).

Для оценки верхнего предела применимости линейного закона используют известный из гидравлики критерий — число Рейнольдса

[см. зависимость (2.25)] — и по его величине определяют критическое значение скорости фильтрации, используя вместо скорости u движения воды в трубе и диаметра этой трубы значения v, эффективного диаметра $d_э$ песчаной породы или коэффициента проницаемости $k_п$ трещиноватой породы. Для пористых сред, согласно Н. Н. Павловскому [34, 40], критерий равен

$$\mathrm{Re} = \frac{1}{0{,}75n + 0{,}23} \frac{v d_э \rho_ж}{\mu_ж} \leqslant \mathrm{Re}_{кр} = 7 - 9,$$

и для порово-трещинных сред, по В. Н. Щелкачеву [53],

$$\mathrm{Re} = \frac{10}{n^{2,3}} \frac{v \sqrt{k_п}\, \rho_ж}{\mu_ж} \leqslant \mathrm{Re}_{кр} = 1 - 12.$$

Есть и другие формы представления критерия и значения чисел $\mathrm{Re}_{кр}$ [3, 4, 8, 15, 34, 50]. Большой диапазон чисел $\mathrm{Re}_{кр}$ связан с изменением структуры порово-трещинного пространства разных пород при близких значениях n и $d_э$. Экспериментальные данные показывают, что даже для пород с коэффициентами фильтрации 1000 м/сут условие (3.5) часто выполняется в силу того, что в естественных условиях высоким значениям коэффициента фильтрации соответствуют малые (порядка 10^{-3} и менее) значения напорных градиентов (так как силы сопротивления движению воды малы). По В. М. Шестакову [54], значения $v_{кр}$ для средне-и крупнозернистых песков и галечников с k = 25—450 м/сут при $I_{кр}$ = 10—1 составляют соответственно 100—400 м/сут, что значительно ниже величин $I_т$ и $v_т$, отвечающих турбулентному движению.

Отклонения от линейного закона связаны в основном с высокими значениями напорных градиентов и зонами резкой интенсификации потока подземных вод, что в естественных гидрогеологических условях встречается редко и может наблюдаться на локальных участках вблизи инженерных сооружений, например в зоне плотин со значительным подъемом уровня воды, вблизи водозаборных скважин при откачках из высокопроницаемых отложений со значительными понижениями уровня воды в этих скважинах и т. п. Каждый такой случай требует специального обоснования.

Исходя из принципа независимости действия вязкого трения и инерционно-пульсационных сил, Р. Прони предложил обобщенную форму основного закона фильтрации в виде двухчленной зависимости $I = av + bv^2$, а Ф. Форхгеймер использовал ее в 1895 г. для описания процесса фильтрации. Она исследована во многих работах [3, 4, 8, 15, 34, 50]. Первый член ее характеризует ламинарное течение, а второй — течение, в котором проявляются инерционно-пульсационные силы. В работе В. М. Шестакова [54] предложена более удобная запись:

$$I = (v/k)(1 + \alpha v), \tag{3.8}$$

где k — коэффициент фильтрации при ламинарном режиме; α — коэффициент нелинейности фильтрации. Из формулы (3.8) следует необходимость учета нелинейного движения в случаях, когда величина

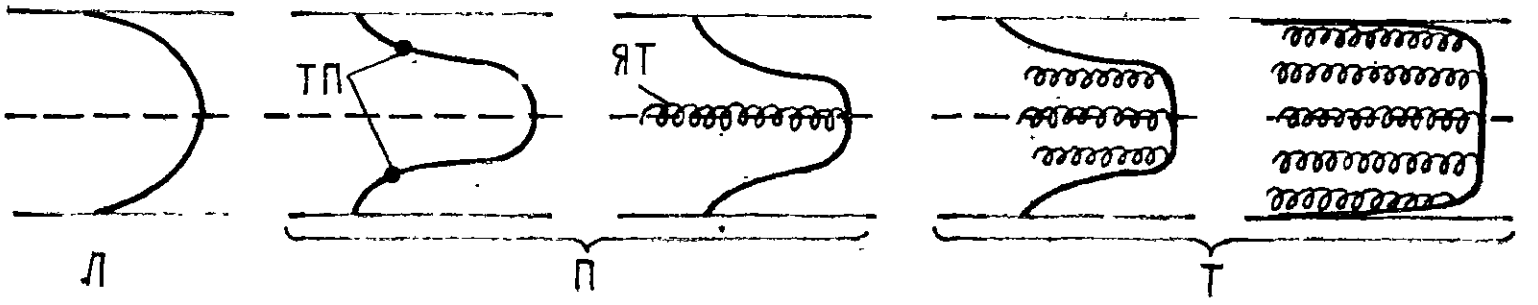


Рис. 3.2. Физическая модель нарушения линейного закона фильтрации и формирования переходного и турбулентного режимов в крупной трещине (по Л. Прандлю, Г. Шляхтичу, С. Н. Тагильцеву и др.).

Виды движения: Л — ламинарное, П — переходное, Т — турбулентное; ТП — точки перегиба; ЯТ — ядро турбулентности

αv соизмерима с единицей. Параметр нелинейности определяется из выражения

$$\alpha = \frac{0{,}09}{n^2\sqrt{1-n}}\sqrt{\frac{k\rho}{\mu g}}.$$

При допустимой погрешности в расчетах ε критическая скорость фильтрации $v_{кр}$ получится из условия $v_{кр} = \varepsilon/\alpha$. Параметр α определяется опытным путем. Из выражения (3.8) видно, что связь I и v/k параболическая (см. рис. 3.1, кривая *3*).

Экспериментальными работами установлено наличие зоны переходного режима (см. рис. 3.1, кривая *2*), в которой приближенно соблюдается линейный закон, но коэффициент пропорциональности имеет иное значение $k_т$. Нарушение линейности происходит в тех случаях, когда кинематическая энергия потока превышает силы вязкости и начинает деформироваться параболический профиль скорости (рис. 3.2), т. е. идет как бы процесс сжатия потока в щели (ламинарное движение с меньшей раскрытостью щели). На эпюре скорости появляется ядро турбулентности, которое расширяется к стенкам щели, эпюра скорости становится более плоской и, наконец, когда ядро достигает стенок щели, наступает турбулентный режим (см. рис. 3.2). Последний этап в потоках подземных вод практически не наступает.

При малых скоростях фильтрации нарушение закона Дарси связывают главным образом с проявлением сил молекулярного взаимодействия. На отклонение от закона Дарси при малых скоростях фильтрации впервые обратили внимание в конце XIX в., позднее это явление исследовали Н. П. Пузыревский, К. П. Лундин, П. А. Ребиндер, Б. В. Дерягин, С. А. Роза, С. В. Нерпин, а в 1970-е гг.— Н. Ф. Бондаренко, И. П. Амаглобели и др. Было установлено, что движение воды в тонкодисперсных породах характеризуется сложной зависимостью v от I (см. рис. 3.1, кривая *4*): 1) при $I < I_0$ вязкое течение потока, как его понимают в теории сплошных сред, отсутствует; 2) при $I > I_0$ возникает течение, в котором проявляются вязкопластические и реологические свойства жидкости, и как отмечал В. А. Приклонский, коэффициент фильтрации — переменная величина, зависящая от градиента (под влиянием градиента внешние слои связанной воды постепенно вовлекаются в процесс фильтрации, увеличивая тем

самым сечение пор, а следовательно, и проницаемость породы); 3) при $I \gg I_0$ все возможное при данных условиях количество связанной воды переходит в гравитационную воду, коэффициент фильтрации становится постоянной величиной, а фильтрация отвечает закону Дарси.

Нарушение закона Дарси установлено и изучено в лабораторных условиях, при которых значения I_0 для глин имеют порядок 1—10 и более, для тонко- и мелкозернистых песков 10^{-1}—10^{-3} [54]. В реальных условиях в глинистых толщах проявление реологических свойств и начального градиента пока не выявлено. По-видимому, это связано с тем, что в крупных порах вода ведет себя как ньютоновская жидкость, и через системы таких пор и песчаные прослойки фильтрация идет в соответствии с законом Дарси.

Движение воды в глинистых породах представляет значительный интерес, так как более 60 % разреза земной коры сложено главным образом глинистыми породами. Физические основы движения в тонкодисперсных породах исследуются в настоящее время с двух позиций: механики сплошных сред на основе модели вязкопластического движения [8, 40, 54] и молекулярно-кинетической теории [3].

Рассмотрим наиболее распространенную модель вязкопластического движения, в которой касательные напряжения характеризуются зависимостью (2.22). Примем пористую среду в виде системы капиллярных трубок радиусом $r_т$ и получим связь скорости v фильтрации с расходом $Q_т$ воды в капиллярной трубке площадью поперечного сечения $\omega_т = \pi r_т^2$. При поперечном сечении ω, расходе потока Q и пористости породы n число капиллярных трубок сечением $\omega_т$ будет $N = n\omega/\omega_т$, а расход в каждой равен

$$Q_т = \frac{Q}{N} = \frac{Q\pi r_т^2}{n\omega} = \frac{\pi r_т^2}{n} v. \qquad (3.9)$$

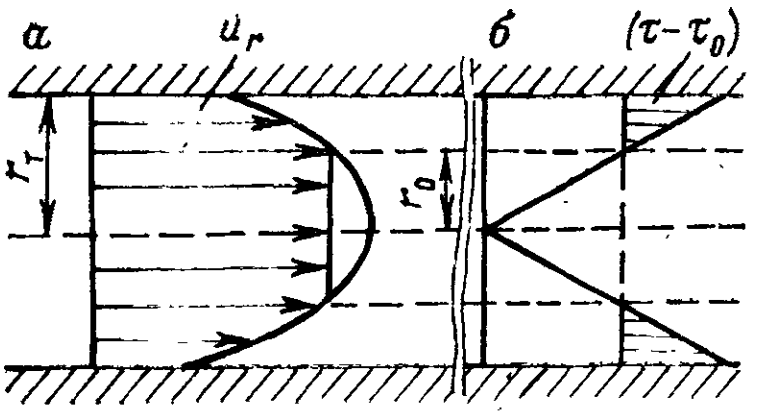
В. М. Шестаков [54] рассмотрел вязкопластический поток в капиллярной трубке радиусом $r_т$ при условии $I > I_0$, что часть ее сечения радиусом r_0 (от оси трубки) занята водой как пластическим телом, а в другой части (от r_0 до $r_т$) поток отвечает вязкому течению (рис. 3.3, *а*). Интегрируя записанное для таких условий уравнение (2.22) и задавая в нем $\tau = 0{,}5\,\gamma I r$, В. М. Шестаков получил выражение для $Q_т$. Подставив его в формулу (3.9), он нашел обобщенное выражение для скорости фильтрации:

$$v = k\left[I - \frac{4}{3} I_0 + \frac{I_0}{3}\left(\frac{I_0}{I}\right)^3\right].$$

Аналогичные зависимости имеются в работах С. А. Роза, Б. В. Дерягина, С. В. Нерпина, Н. Ф. Бондаренко и др. При $I \gg I_0$ пользуются линейной асимптотой

$$v = k\left(I - \frac{4}{3} I_0\right),$$

что графически отображено пунктиром на кривой *4* рис. 3.1.



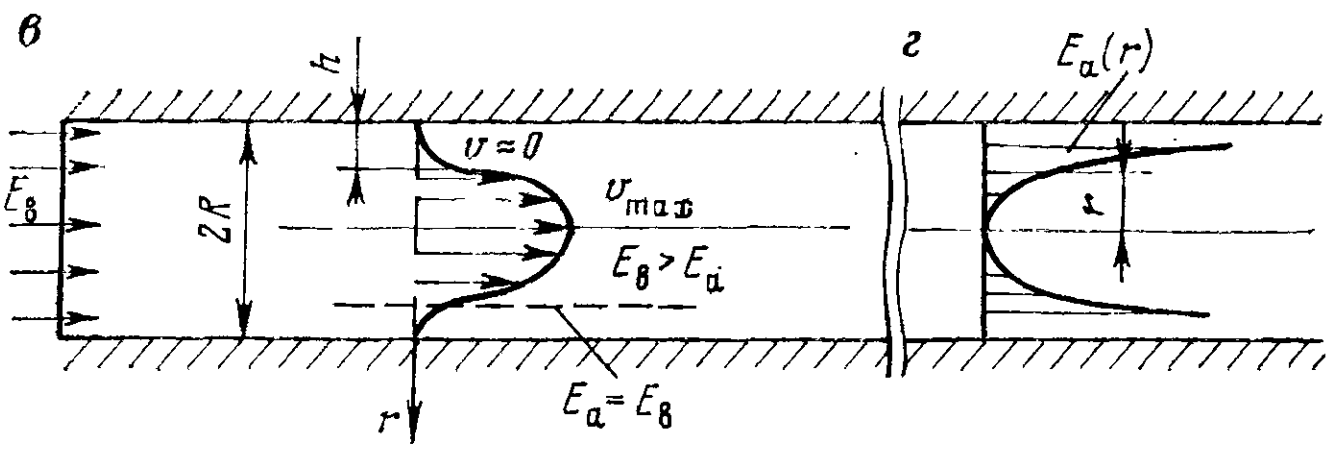


Рис. 3.3. Эпюры распределения скорости u (*а*, *в*) и касательных напряжений τ (*б*, *г*) при вязкопластическом течении (*а*, *б*, по В. М. Шестакову) и течении жидкости в капилляре с учетом взаимодействия твердой и жидкой фаз (*в*, *г*, по А. Г. Арье)

Имеются более простые выражения, например предложенное Н. Г. Пузыревским $v = k(I—I_0)$. В. М. Шестаков по формуле (2.23) рассчитал значения I_0 при $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-8}$ Па. Для песков и глин при изменении радиусов пор $r_т$ соответственно от $7 \cdot 10^{-3}$ до $5 \cdot 10^{-6}$ см, пористости от 0,35 до 0,1 и коэффициента фильтрации от 0,1 до 10^{-8} см/с значения I_0 составляли $3 \cdot 10^{-4}$ — 1,2.

Пластическое течение имеет релаксационный характер и при $I < I_0$ может существовать поток «ползучести», однако скорость его проявления, по-видимому, мала. Заметим, что эта модель предполагает наличие начального сдвига τ_0 во всем объеме воды в зоне, занятой пластическим телом, а сама зона располагается вблизи оси капилляра (см. рис. 3.3, *а*, *б*). Такая модель не адекватно отражает физическую картину движения жидкости в тонком капилляре. При наличии молекулярных взаимодействий в поре (см. рис. 2.6) возникновение вязкого течения наиболее вероятно вблизи оси капилляра, где влияние этих взаимодействий мало. Кроме того, неравномерность распределения по сечению поры энергии молекулярного взаимодействия противоречит предпосылке существования в объеме структурированной жидкости одинакового начально сдвига τ_0, а следовательно, и справедливости использования условия (2.23).

Рассмотрим фильтрацию подземных вод в горных породах с позиций молекулярно-кинетической теории растворов, принимая во внимание то, что было сказано в разд. 2.5 о молекулярных взаимодействиях: а) вовлечение молекул жидкости, находящихся у контакта с твердой фазой, в так называемое движение в объеме, т. е. под преимущественным действием внешних сил, определяется соотношением двух дополнительных (к трансляционной) энергий: $\Delta E_в$, которую получает данная молекула от молекулы, движущейся под влиянием градиента внешнего давления, и $\Delta E_а$ — от взаимодействия с твердой фазой в этой точке. Если $\Delta E_в < \Delta E_а$, то молекула остается у контакта, если $\Delta E_в \gg \Delta E_а$, то она продолжает движение в объеме;

б) в гравитационном поле все молекулы жидкости движутся в сторону падения напора (уменьшения потенциального барьера).

Используя условие $\Delta E_в = \Delta E_а$, что отвечает положению молекулы на границе раздела связанной и свободной воды, и при конкретных выражениях для $\Delta E_в$ и $\Delta E_а$, А. Г. Арье [2] получил формулу для определения толщины h пленки, в которой молекулы не принимают участия в движении под данным градиентом (см. рис. 3.3, *в*). Затем, учитывая в формуле Гагена—Пуазейля (2.19), что $Q_т$ идет в капилляре радиусом $r = r_к - h$, из зависимости (3.9) он нашел обобщенное выражение для скорости фильтрации

$$v = k_0 I \left(1 - \frac{I_0}{I}\right)^2, \tag{3.10}$$

где k_0 — асимптотический коэффициент фильтрации при $I \gg I_0$ и ламинарном режиме течения потока; I — текущий градиент потока; I_0 — начальный градиент как некоторая кинематическая характеристика потока, отвечающая моменту его формирования как потока с позиций механики сплошных сред (определяется экспериментально). Уравнение (3.10) можно представить в виде $\sqrt{\frac{k}{k_0}} = 1 - \frac{I_0}{I}$, что отвечает прямой в координатах $\sqrt{\frac{k}{k_0}} - \frac{1}{I}$; тангенс угла ее наклона к оси $1/I$ равен I_0. Графическая обработка многочисленных экспериментов подтвердила справедливость обобщенной зависимости (3.10).

При $I < I_0$ предполагается, что идет молекулярный перенос и частицы порового раствора движутся, но не создают потока, отвечающего понятиям механики сплошных сред. На оси каждого капилляра равнодействующая поверхностных сил равна нулю (см. рис. 3.3, *г*), и, следовательно, при действии внешней силы молекула, случайно попав в результате трансляционного движения на ось капилляра, в это мгновение имеет наибольшую вероятность переместиться по направлению действия I. С увеличением градиента количество движущихся таким образом молекул возрастает, но назвать это потоком жидкости еще нельзя, так как их объем соизмерим с размерами самих молекул. Скорость этого переноса пропорциональна градиенту напора.

При $I > I_0$ скорость фильтрационного потока жидкости отвечает зависимости (3.10), а при $I \gg I_0$ — линейной зависимости Дарси ($v = k_0 I$).

В глинах удельная поверхность контакта с твердой фазой составляет десятки и более квадратных метров. Отсюда вытекает настоятельная необходимость изучения движения подземных вод особенно в глубоких горизонтах гидролитосферы с учетом молекулярных взаимодействий на основе молекулярно-кинетической теории.

3.3. ПРОНИЦАЕМОСТЬ ГОРНЫХ ПОРОД

Проницаемость горных пород характеризует их способность пропускать через себя любые жидкости или газы, а водопроницаемость — способность пропускать свободную воду. Количественно это оценивается в первом случае величиной $k_п$, а во втором — k. Рассмотрим связь структуры порово-трещинного пространства и свойств фильтрующейся жидкости с проницаемостью пород.

Связь с геометрией порово-трещинного пространства. Ее исследовали многие ученые на примере различных моделей [8, 15, 19, 34, 40]. Простейшей является модель пучка капиллярных трубок радиусом $r_т$, для которой зависимость $Q_т$ от v потока определяется по формуле (3.9). Сопоставляя выражения (3.9) и (2.19), получаем

$$v = \frac{\gamma n r_т^2}{8\mu} I, \tag{3.11}$$

сравнивая зависимости (3.11) и (3.5), устанавливаем, что

$$k = \frac{\gamma n r_т^2}{8\mu}$$

и, имея в виду зависимость (3.7), определяем

$$k_п = n r_т^2/8. \tag{3.12}$$

Проницаемость пород уменьшается с увеличением глубины их залегания под действием веса вышележащих пород. Особенно резко это проявляется для глинистых пород [31, 44]. Породы с упорядоченной внутренней структурой проявляют анизотропию фильтрационных свойств. Обычно говорят об анизотропии в главных направлениях — горизонтальном k_x и вертикальном k_z. Для оценки этих свойств пользуются показателем анизотропии

$$\lambda = k_x/k_z. \tag{3.13}$$

Водопроницаемость (м/сут) пород изменяется в очень широких пределах: проницаемые породы имеют $k = 1$—10 и более, слабопроницаемые — $k = 1$—10^{-7}, практически непроницаемые — $k < 10^{-7}$.

Связь с физико-химическими факторами. Теоретически согласно формуле (3.12) k от свойств фильтрующейся жидкости не зависит. Однако экспериментальные исследования, проведенные М. Маскетом, Л. И. Кульчицким, В. М. Гольдбергом и др., показали, что наблюдается существенное изменение проницаемости глинистых пород при фильтрации воды с различными минерализацией, составом и температурой. Это является следствием физико-химических взаимодействий минерального скелета с фильтрующейся водой и приводит к изменениям в структуре пород. Проницаемость песчаников для пресной воды ниже, чем для соленой, эта разница невелика для чистых песчаников и достигает двух порядков в глинистых. Средне- и мелкозернистые пески с содержанием монтмориллонитовых и гидрослюдистых

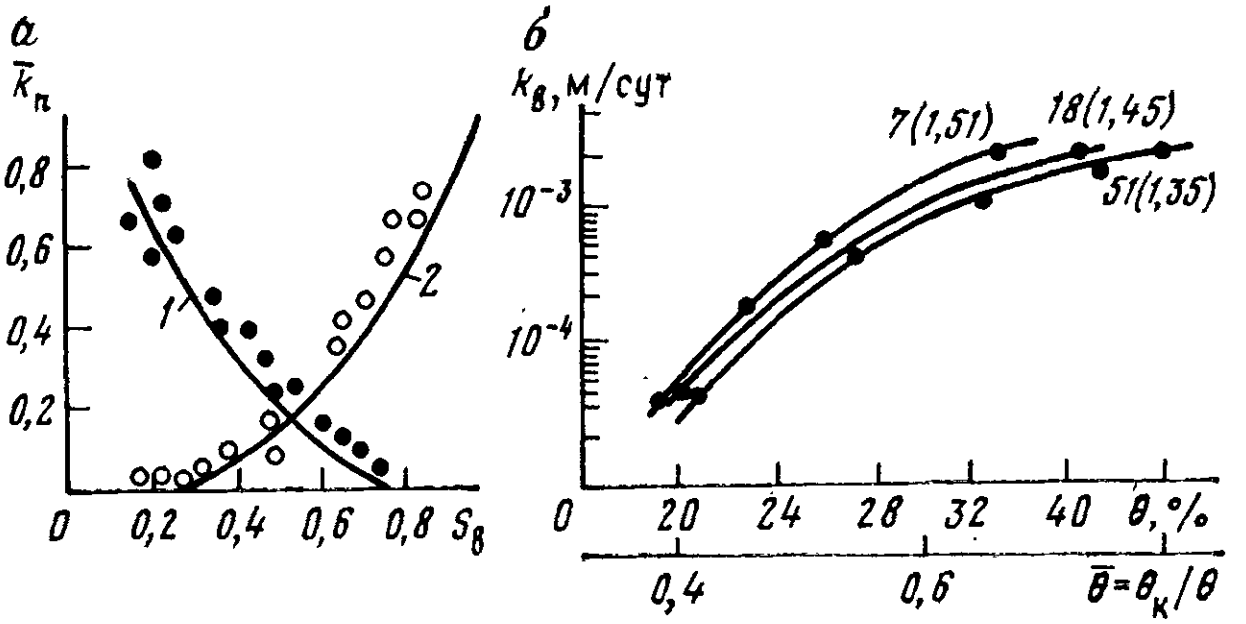


Рис. 3.4. Графики зависимости (*а*) относительной фазовой проницаемости $\bar{k}_п$ по нефти и воде от водонасыщенности $S_в$ (по Г. Б. Пыхачеву) и типовые кривые (*б*) зависимости относительного коэффициента влагопереноса $k_в$ от относительной влажности θ лёссовидной супеси (получены экспериментально А. М. Лаврентьевым для Восточного Предкавказья).

Относительная фазовая проницаемость: *1* — по нефти, $\bar{k}_п = k_{пн}/k_п$; *2* — по воде, $jk_в = k_в/k$.

глин имеют самую низкую проницаемость по дистиллированной воде; с увеличением концентрации растворов NaCl и $CaCl_2$ проницаемость резко увеличивается, а затем стабилизируется. Наибольший эффект наблюдается для песков с прослоями монтмориллонитовых глин. Проницаемость для кислых растворов больше, чем для основных. Однако в математической постановке задач динамики подземных вод этот фактор пока не учитывается.

Связь со степенью водонасыщенности порово-трещинного пространства. Значения k и $k_п$ существенно зависят от соотношения количеств в порово-трещинном пространстве жидкости и газа. Различают абсолютную, или физическую, фазовую и относительную проницаемости. Под а б с о л ю т н о й понимают проницаемость $k_п$ горной породы, которая определена только для однородных газов, химически инертных к породе. Ф а з о в а я проницаемость $k_{пж}$ или $k_{пг}$ определяется для одной какой-либо фазы в условиях одновременного движения в породе другой. Величина ее зависит от степени насыщенности порово-трещинного пространства жидкостью или газом и их физико-химических свойств.

О т н о с и т е л ь н а я проницаемость $\bar{k}$ определяется следующим образом:

$$\bar{k}_{пж} = k_{пж}/k_п \text{ или } \bar{k}_{пг} = k_{пг}/k_п.$$

Из рис. 3.4, *а* видно, что наличие малых количеств нефти резко уменьшает проницаемость водонасыщенной породы. В зоне аэрации процесс движения влаги идет в ненасыщенной среде, и разное содержание свободного воздуха существенно изменяет ее проницаемость. В этом случае водопроницаемость пород при неполном водонасыщении характеризуется коэффициентом в л а г о п е р е н о с а $k_в$ (коэффи-

циент фазовой водопроницаемости). С. Ф. Аверьянов [1] предложил вычислять $k_в$ по формуле

$$k_в = k\bar{\theta}^n, \qquad (3.14)$$

где k — коэффициент фильтрации при полном водонасыщении (когда $\bar{\theta} = 1$); $\bar{\theta}$ — относительная влажность, равная $\theta_е - \theta_{мм}/\theta_п - \theta_{мм}$ (где $\theta_е$ и $\theta_п$ — соответственно текущее и полное влагосодержание в порах породы); n — показатель степени (для неоднородных пород он изменяется от 2 до 4 и более).

К относительной водопроницаемости легко перейти, если в формуле (3.14) разделить $k_в$ на k. Графики для лёссовидных супесей и суглинков, построенные экспериментально и характеризующие зависимость $k_в$ от θ, показаны на рис. 3.4, *б*.

3.4. ЕМКОСТНЫЕ СВОЙСТВА ГОРНЫХ ПОРОД

Емкостные свойства горных пород проявляются в условиях нестационарной фильтрации, т. е. при колебаниях уровня воды, и характеризуют, с одной стороны, способность пород поглощать или отдавать свободную воду, а с другой — особенности протекания самих процессов насыщения и осушения. Различают гравитационную и упругую емкости. В грунтовых водах главную роль играют процессы гравитационного насыщения (при подъеме уровня) или осушения (при снижении уровня), в напорных — упругого сжатия или расширения воды и пород, вызывающие перераспределение давления в пласте.

Гравитационная емкость горных пород. Гравитационная емкость горных пород физически показывает, какой объем свободной воды может вместить или отдать выделенный объем пласта гравитационным насыщением или осушением. В первом случае пользуются показателем, который называется гравитационным недостатком насыщения $\mu_и$, во втором — гравитационной водоотдачей $\mu_в$. Их определяют по формулам:

$$\mu_п = \theta_п - \theta_е \text{ и } \mu_в = \theta_п - \theta_{мм}, \qquad (3.15)$$

где $\theta_п = n_а$; $\theta_е$ — объемная влажность пород в исходном состоянии; $\theta_{мм}$ — максимальное объемное суммарное содержание связанной (независимо от механизма ее удержания в породе), стыковой (в углах пор) воды и защемленного воздуха. Величина μ зависит от структуры и удельной площади порово-трещинного пространства.

Ориентировочно принимают следующие значения $\mu_в$: для песков 0,1—0,35; для супесчано-суглинистых пород 0,05—0,1; для глин 0,05—0,005; для трещиноватых известняков 0,001—0,1; для трещиноватых песчаников 0,02—0,03. Из формулы (3.15) следует, что значения $\mu_и$ различны во времени для одних и тех же пород. Однако на глубине нескольких метров от поверхности земли изменения $\theta_е$ невелики, и значения этого показателя близки к $\theta_{мм}$, поэтому в математических расчетах можно принимать практически $\mu_в \approx \mu_и$.

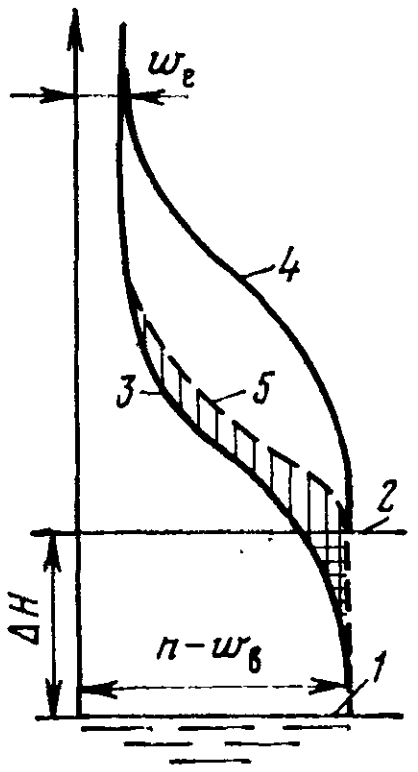


Рис. 3.5. График изменения влажности в капиллярной зоне (по В. М. Шестакову):

1, 2 — исходное и текущее положения уровня свободной поверхности; *3, 4* — начальная и текущая эпюры распределения влажности; *5* — стационарная эпюра влажности при положении уровня *2*

Процессы гравитационного стекания и насыщения количественно стали детально изучать в основном с 1970-х гг. Было установлено [8, 34, 54], что μ изменяется во времени и зависит от скорости опускания свободной поверхности. Формирование гравитационной емкости связано с переформированием капиллярной зоны и передачей воды из ее верхней части на свободную поверхность уровня грунтовых вод при его опускании или, наоборот, подачей воды из водоносного пласта в капиллярную зону при подъеме уровня воды. При понижении уровня капиллярная зона растягивается и изменение гравитационной емкости замедляется, потом в ней наступает динамическое равновесие, влажность по высоте не изменяется, и зона опускается параллельно самой себе со скоростью перемещения свободной поверхности. В соответствии с этим коэффициент μ постепенно увеличивается и достигает предельного значения при стабилизации формы эпюры влажности в капиллярной зоне (рис. 3.5). Математическое описание динамики водоотдачи дал Н. Боултон [8], а физическое — В. М. Шестаков [54], который предложил при оценке процессов осушения использовать приведенную капиллярную зону эффективной высотой $h_к$, имеющую полное водонасыщение с проницаемостью $k_к$. Он показал теоретически, что для песков при $k = 10$ м/сут, $h_к = 0{,}1$ м и скорости снижения свободной поверхности 0,01 м/сут водоотдача может быть оценена с погрешностью 20 % от ее предельного значения примерно через одни сутки, а для супесей — через несколько месяцев.

В гетерогенных породах, характеризующихся двойной пористостью или двойной трещиноватостью, гравитационная емкость определяется внутренней структурой порово-трещинного пространства породы и той структурой, которая связана с наличием микрослоистости или крупных трещин. Крупные трещины и макропоры являются основными путями фильтрации. Объемное содержание их в породе незначительно, они не определяют емкостные свойства гетерогенной среды. Слаботрещиноватые блоки или агрегаты пород характеризуются невысокой проницаемостью, но формируют основные емкостные свойства такой среды. Ее осушение происходит в два этапа: на первом быстро осушаются крупные трещины или макропоры (для этого этапа характерны низкие значения μ), а на втором осушаются блоки и агрегаты (характерны высокие значения μ). При быстром осушении крупных трещин гидравлическая связь между блоками может быть нарушена и осушение их может прекратиться. Исследование процесса формирования гравитационной емкости важно при изучении движения влаги.

Упругая ёмкость водонасыщенных горных пород. Такая ёмкость физически показывает, какой объем свободной воды может отдать или вместить выделенный объем пласта за счет упругого сжатия (расширения) скелета породы, уменьшения (увеличения) объема пор и упругого сжатия (расширения) воды. Действие первых двух факторов оценивается коэффициентом удельного сжатия (расширения) скелета породы β_c согласно зависимости (2.28), действие второго — аналогичным коэффициентом $\beta_в$ по (2.1). Освобождающееся при этом суммарное количество воды представляет собой так называемые упругие запасы. В качестве удельной характеристики упругой емкости породы В. Н. Щелкачев [53] предложил использовать коэффициент упругой емкости пород β^*:

$$\beta^* = n\beta_в + \beta_c. \tag{3.16}$$

Аналогичную характеристику В. М. Шестаков [34, 54] обозначил η^* и представил в виде отношения изменения объема воды ΔW к объему породы V при единичном изменении напора:

$$\eta^* = \Delta W/(\gamma \Delta H V). \tag{3.17}$$

Величину ΔW в элементе водоносного пласта объемом V можно определить по формуле

$$\Delta W = \Delta(\gamma n V) = \Delta\left(\gamma\varepsilon \frac{V}{1+\varepsilon}\right) = \frac{V}{1+\varepsilon}\Delta(\gamma\varepsilon) =$$

$$= \frac{V}{1+\varepsilon}(\varepsilon\Delta\gamma + \gamma\Delta\varepsilon) = \frac{V\gamma}{1+\varepsilon}\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\varepsilon + \Delta\varepsilon\right). \tag{3.18}$$

Здесь учтено, что $n = \varepsilon/(1+\varepsilon)$, а $V/(1+\varepsilon)$ — неизменный объем скелета породы. Имея в виду, что упругое сжатие воды согласно закону Гука [см. формулу (2.1)] можно представить как изменение плотности воды $\Delta\gamma/\gamma = \beta_в \Delta p$, а $\Delta\varepsilon$ определить из выражения (2.28) и принимая во внимание по (2.32), что $-\Delta p_c = \Delta p$, после подстановки в (3.18) получим

$$\Delta W = \frac{V\gamma}{1+\varepsilon}(\beta_в\varepsilon + a_c)\Delta p. \tag{3.19}$$

Подставляя формулу (3.19) в (3.17) и учитывая, что при малой изменчивости плотности воды $\Delta\gamma H = \Delta P$, получаем

$$\eta^* = \frac{\gamma}{1+\varepsilon}(\varepsilon\beta_в + a_c). \tag{3.20}$$

Размерность коэффициентов $[\beta^*]$ и $[\eta^*] = м^{-1}$. От коэффициента η^* легко перейти к β^*. Если представить $\varepsilon = n/(1-n)$, то

$$\eta^* = \gamma[n\beta_в + (1-n)a_c] = \gamma(n\beta_в + \beta_c) = \gamma\beta^* \tag{3.21а}$$

при

$$\beta_c = (1-n)a_c. \tag{3.21б}$$

По данным разных авторов [4, 6, 8, 12, 31, 54], для песков, песчаников, мела и известняков, находящихся на небольших глубинах

(до 200 м), β^* (η^*) изменяются в пределах $(0{,}1—5)\cdot 10^{-4}$ м$^{-1}$, а для глинистых пород — от $n\cdot 10^{-2}$ до $n\cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$. Коэффициент сжимаемости пород существенно зависит от знака изменения напора: при уплотнении (откачке) он больше, чем при разуплотнении (восстановление уровня) [31, 34].

При наличии двойной пористости и трещиноватости формируются процессы упругого этапного переформирования давлений.

3.5. ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ И ЕМКОСТНЫЕ СВОЙСТВА ПЛАСТОВ КАК ГДС

Проницаемость и емкость пласта как системы зависят не только от структуры порово-трещинного пространства пород, но и от их мощности, числа слоев, характера их соотношения в пространстве. Для характеристики проницаемости пласта используют понятие «водопроводимость», а емкости — понятие «емкость пласта».

Величина *водопроводимости* T для пластов с напорными водами постоянна во времени и равна

$$T = km, \tag{3.22}$$

а для пластов с грунтовыми водами

$$T = kh \tag{3.23}$$

и изменяется во времени в соответствии с изменением мощности h водоносных пород. Размерность $[T]$ = м^2/сут, что позволяет трактовать ее как единичный расход, т. е. расход потока шириной в плане 1 м при напорном градиенте, равном единице.

Скорость процессов осушения и насыщения пласта характеризуется *коэффициентом гравитационной емкости* μ, который представляет собой изменение объема ΔV_0 свободной воды в порах при осушении (или насыщении) пород единичного элемента пласта (т. е. с единичной площадью горизонтального сечения), отнесенное к изменению уровня свободной поверхности ΔH [34]:

$$\mu = \Delta V_0/\Delta H. \tag{3.24}$$

Упругая водоотдача (насыщение) характеризует то количество свободной воды $\Delta V^*_в$, которое может быть отдано (получено) объемом пласта площадью F и мощностью m за счет проявления его упругих свойств β^* при изменении напора на $\gamma\Delta H$ или давления на ΔP:

$$\Delta V^*_в = \gamma\beta^* mF\Delta H.$$

Имея это в виду, найдем [6] для единичного элемента пласта *коэффициент упругой емкости пласта*

$$\mu^* = \Delta V^*_в/\Delta H = \gamma\beta^* m. \tag{3.25}$$

При использовании η^* коэффициент упругой емкости пласта с учетом (3.21а) равен

$$\mu^* = m\eta^*. \tag{3.26}$$

Значения μ^* изменяются в зависимости от литологического состава, мощности и глубины залегания пород. Наибольшие значения характерны для глинистых $(5—10)\cdot10^{-3}$ и песчаных $(5—20)\cdot10^{-3}$ пластов, меньшие для известняков и песчаников $(1—5)\cdot10^{-5}$. Эти значения уменьшаются на порядок при увеличении глубины залегания от 500 до 1000 м и более.

В слоистых средах уплотнение глинистых прослоев идет медленнее, чем песчаных, и общая упругая водоотдача системы в целом формируется сложно и в течение долгого времени. Аналогичное явление наблюдается в средах с двойной пористостью (трещиноватостью): при изменении пластового давления пористые (трещиноватые) блоки сжимаются медленнее, чем уплотняется среда с крупными трещинами, поэтому начальное и конечное значения μ^* могут различаться на один-два порядка.

Для оценки скорости процессов гравитационного осушения (или насыщения) системы в целом, т. е. скорости и характера изменения положения уровня грунтовых вод, используют коэффициент уровнепроводности

$$a = T/\mu = kh/\mu, \tag{3.27}$$

а для оценки скорости упругого «насыщения» или «осушения» — коэффициент пьезопроводности

$$a^* = T/\mu^* = km/\mu^*, \tag{3.27а}$$

оценивающий скорость перераспределения давлений или напоров в пласте. Размерность $[a, a^*] = м^2/сут$.

В заключение отметим, что для многослойного пласта, состоящего из n слоев мощностью m_i каждый, суммарные значения водопроводимости и упругой водоотдачи следующие [5, 35]:

$$T_{см} = \sum_1^n k_i m_i; \qquad \mu^*_{см} = \sum_1^n \mu^*_i = \sum_1^n \eta^*_i m_i. \tag{3.28}$$

В этом случае принимается, что вода движется во всех слоях параллельно плоскости напластования.

Для многопластовой системы соответствующие показатели простым суммированием получить нельзя, так как система имеет пространственную структуру и ее параметры неаддитивны параметрам ее элементов (см. гл. 1).

Сравнивая коэффициенты μ^* и μ, видим, что они различаются на два-три порядка ($\mu^* \approx 10^{-3}—10^{-5}$, $\mu = 10^{-1}—10^{-2}$), что говорит о том, что упругие запасы значительно меньше, чем гравитационные. Это позволяет в безнапорных потоках пренебрегать упругой емкостью в сравнении с гравитационной. Исключение составляют суглинистые пласты верхних частей геологического разреза, для которых упругая и гравитационная емкости могут быть соизмеримы. В соответствии со значением показателей μ^* и μ различаются на несколько порядков и значения коэффициентов a и a^*.

З а д а ч а. Два водоносных пласта сложены крупными песками, содержа один грунтовые ($\mu = 0{,}1$), другой напорные ($\mu^* = 10^{-3}$) пресные воды и имеют примерно одинаковые (50 м) средние мощности водоносных пород. Напорный пласт залегает на глубине 200 м от поверхности земли, что и определяет величину избыточного напора над его кровлей. В пластах пробурено по одной одинаковой конструкции скважине и из каждой с понижением $S = 20$ м проведена одинаковой длительности откачка. Требуется определить: а) порядок значений a и a^*; б) во сколько раз примерно будут отличаться радиусы депрессионных воронок около скважин в грунтовых и напорных водах; в) какое количество воды получено откачкой в грунтовых и напорных водах (грубо объем депрессионной воронки представить как объем симметричного кругового конуса высотой S).

3.6. ГЕОФИЛЬТРАЦИОННАЯ СРЕДА И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЕЕ СОСТОЯНИЯ

Понятие г е о ф и л ь т р а ц и о н н а я с р е д а как геологическая система включает применительно к процессам фильтрации горную породу и подземную воду только с теми их свойствами, которые связаны с этим процессом.

Различают среды: 1) пористую песчаную, глинистую и относительно равномерно трещиноватую (породы с трещиноватостью выветривания), 2) с двойной пористостью (лёссовидные суглинки, трещиноватые мелы, песчаники) или двойной трещиноватостью (закарстованные известняки). Первая среда обладает достаточно высокими значениями показателей фильтрационных и емкостных свойств, во второй фильтрационные свойства определяются в основном проницаемостью крупных трещин, а емкостные — пористостью и трещиноватостью блоков. Пористые и равномерно трещиноватые породы подчиняются закону Гука и рассматриваются как упругодеформируемые тела, а глинистые подчиняются этому закону в пределах небольших изменений давлений и принимаются как условно упругодеформируемые тела (см. разд. 2.4). Породы с двойной пористостью и двойной трещиноватостью в общем также подчиняются закону Гука. Их свойства (см. разд. 2.4 и 3.4) позволяют при математической постановке задач, например в гетерогенно-блоковых средах, пренебрегать емкостью крупных трещин и считать, что емкость всей среды определяется емкостными характеристиками блоков. Процессы формирования упругой емкости гетерогенно-блоковой и слоистой сред близки, так как проницаемые слои гидродинамически ведут себя как крупные трещины, а слабопроницаемые — как пористые блоки. Следовательно, математические постановки задач фильтрации для гетерогенно-блоковой и слоистой сред аналогичны.

Выделяют четыре типа фильтрационных сред в зависимости от того состояния, какое приписывается породе, воде или среде в целом. *Первый* тип среды характеризуется жестким, т. е. неупругим, состоянием воды и породы:

$$n = \text{const}; \quad \rho = \text{const}. \tag{3.29}$$

Во *втором* порода принимается несжимаемой, а вода сжимаемой по закону Гука [см. формулу (2.1)]. Принимая в выражении (2.1) объем воды как $V_в = M_в/\rho$ и считая массу воды $M_в$ постоянной, а

плотность изменяющейся, можно записать $dV_в = -M_в (d\rho/\rho^2)$, а изменение объема воды представить как

$$\frac{dV_в}{V_в} = -\frac{M_в \rho d\rho}{M_в \rho^2} = -\frac{d\rho}{\rho}.$$

В результате получим

$$n = \text{const}; \quad d\rho/\rho = \beta_в dp. \tag{3.30}$$

В *третьем* типе, наоборот, принимают воду несжимаемой, а породу сжимаемой по закону Гука [см. выражение (2.28)]. Выше было показано (см. разделы 2.4, 2.6 и 3.4), что под влиянием внешнего давления минеральный скелет породы $V_с$ практически не сжимается, объем его не изменяется и равен $V_с = (1-n)\,V$, а сжимаемость породы определяется изменением объема $V_п = nV$ порового пространства, т. е. ее пористости n. В этом случае в выражении (2.28) принимают

$$d\varepsilon = \frac{dV_п}{V_с} = \frac{V dn}{(1-n)\,V} = \frac{dn}{1-n},$$

а из формулы (2.28) с учетом равенства (3.21б) и, считая, что на кровле пласта $p_{вн} = \text{const}$ и справедливо условие (2.32), т. е. $dp_с = -dp$, имеем: $dn = -(1-n)a_с dp_с = \beta_с dp$.

Тогда уравнения состояния имеют вид:

$$dn = \beta_с dp; \quad \rho = \text{const}. \tag{3.31}$$

В *четвертом* порода и вода принимаются сжимаемыми:

$$dn = \beta_с dp; \quad d\rho/\rho = \beta_в dp. \tag{3.32}$$

Из уравнения (3.32) следует, что связь ρ и p нелинейная.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие основные зависимости трубной гидравлики используются в качестве феноменологических предпосылок закона фильтрации в горных породах?
2. Что такое сплошная фильтрационная среда? Почему для пористой и гетерогенно-блоковой сред представительный объем не может быть одинаковым?
3. В чем различие понятий для v и u?
4. Какие факторы вызывают нарушение линейного закона фильтрации при движении воды в трещиноватых и глинистых породах? Запишите обобщенные законы фильтрации; изобразите графически в координатах $v-I$ основной и обобщенные законы фильтрации.
5. Чем отличаются вязкое и вязкопластическое течения? Что такое начальный градиент и какие два гидродинамических понятия он имеет?
6. В чем проявляется влияние молекулярных взаимодействий твердой поверхности с подземной водой при ее движении в поровом пространстве?
7. Как описывается движение воды в глинистых породах с позиций модели вязкопластического течения и молекулярно-кинетической теории?
8. Какие факторы оказывают влияние на величины k и $k_п$; как связаны эти два показателя?
9. Что такое фазовая проницаемость?
10. В чем различие $\mu_н$ и $\mu_в$, μ и μ^*? Одинаковые ли значения будет иметь показатель μ, если его вычислить по формулам (3.15) и (3.24)?
11. Чем различаются показатели β^* и μ^*; β^* и η^*?

12. Почему показатели T и a являются характеристиками пласта, а не породы?

13. Назовите четыре основных состояния фильтрационной среды и запишите для них исходные уравнения.

14. Разъясните, чем отличаются пористая и глинистая среды, с двойной пористостью и двойной трещиноватостью?

Глава 4

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОТОКОВ

4.1. ТИПЫ ГЕОФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОТОКОВ

Понятие геофильтрационный поток — одно из основных (см. разд. 1.5). Согласно Г. Н. Каменскому [19, 20] под геофильтрационным потоком понимается пространственное движение подземных вод, характеризующееся определенной формой линий токов и поперечных сечений. Последние являются геометрическим местом точек, имеющих одинаковые значения пьезометрических напоров, т. е. поверхностями равных напоров. Форма линий токов и напоров определяется условиями залегания, геологическим строением и очертаниями границ водоносного пласта, формой подстилающего водоупора, характером естественного дренирования, характером действия и формой искусственных сооружений.

В зависимости от формы линий токов выделяют два основных вида потоков: *плоскопараллельные и радиальные*. В потоках первого вида линии токов параллельны между собой, а ширина потока в плане постоянна, например при фильтрации через междуречье, когда реки параллельны друг другу (рис. 4.1, *а*). В этом случае ширину потока принимают равной единице ($B = 1$ м), а расход называют *единичным*. В радиальных потоках линии тока — радиусы или близкие к ним линии, а линии напора в плане — окружности или дуги. Ширина таких потоков по направлению движения изменяется: при ее уменьшении поток называют радиально сходящимся, а при увеличении — радиально расходящимся. Если линии напора представлены коаксиальными окружностями (приток воды к одиночной водозаборной скважине, см. рис. 4.1, *е*), то поток *радиально-симметричный*, ширину его принимают равной одному радиану, а расход называют единичным. Если границы потока представлены совокупностью прямых и радиальных линий (см. рис. 4.1, *з*), то поток называют *планово-радиальным*. Для полного представления о структуре потока надо знать форму линий токов и линий напоров в плане и разрезе.

В зависимости от состояния потока во времени выделяют *стационарные* и *нестационарные* потоки. В первом случае все гидродинамические характеристики потока (H, v, I, Q) во времени не изменяются, а во втором — являются функциями времени. Если границы потока прорезают всю его мощность до водоупора, то поток называют *совершенным* (см. рис. 4.1, *б*, *в*, *е*) по степени вскрытия пласта, в противном случае — *несовершенным* (см. рис. 4.1, *и*, *к*, *л*). Другие виды потоков и их гидродинамические характеристики рассмотрены в гл. 5 и более подробно освещены в работах [11, 21, 38, 54].

4.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Средний градиент потока на участке длиной ΔL определяется формулой (2.16), а средние скорость фильтрации и расход потока — формулами (3.5) и (3.4) соответственно. Переходя к дифференциальному представлению градиента потока в сечении принимают $\Delta L \to 0$ и получают

$$I = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta H}{\Delta L} = \frac{\partial H}{\partial l}.$$

Тогда уравнения (3.4) и (3.5) принимают вид

$$v = k \frac{\partial H}{\partial l} \text{ и } Q = k\omega \frac{\partial H}{\partial l},$$

где l — направление движения потока.

Знак перед производной, а также выражение площади поперечного сечения ω определяются формой потока и выбранной системой координат.

Основными уравнениями движения для анизотропного неоднородного пласта в декартовой системе координат в дифференциальной форме являются уравнения Дарси

$$v_x = -k_x \frac{\partial H}{\partial x}; \quad v_y = -k_y \frac{\partial H}{\partial y}; \quad v_z = -k_z \frac{\partial H}{\partial z}, \tag{4.1}$$

где k_x, k_y, k_z — коэффициенты фильтрации для соответствующих осей координат, совпадающих с главными осями анизотропии. Знак минус показывает, что направление движения не совпадает с направлением осей. При латеральной фильтрации (вдоль пласта) ось x совмещается не с водоупорной подошвой пласта, а с ее горизонтальной проекцией на плоскость сравнения. Это позволяет пренебречь силой гравитации в выражении (2.7), принять $z = \text{const}$ и при $\gamma = \text{const}$ получить

$$dH = dp. \tag{4.2}$$

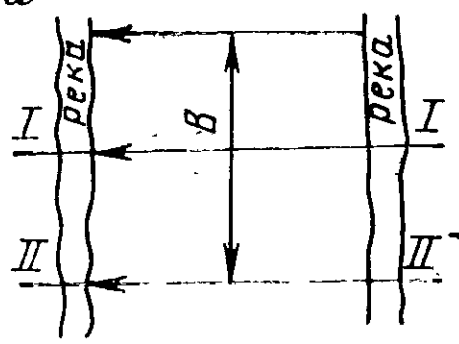
При вертикальной фильтрации с учетом сил гравитации в выражении (2.7) уравнение для v_z принимает вид

$$v_z = -k\left(\frac{\partial H}{\partial z} + 1\right) = -k\frac{\partial H}{\partial z} - k. \tag{4.3}$$

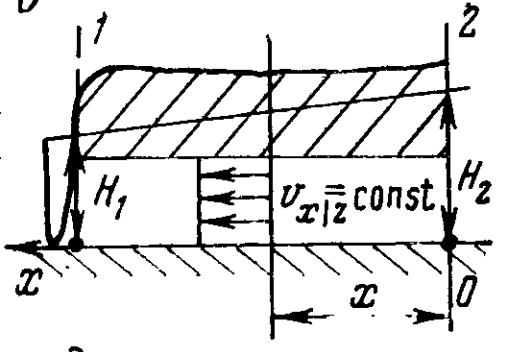
Если пласт однородный и изотропный, то вместо уравнений (4.1) имеем:

$$v_x = -k \frac{\partial H}{\partial x}; \quad v_y = -k \frac{\partial H}{\partial y}; \quad v_z = -k \frac{\partial H}{\partial z}. \tag{4.4}$$

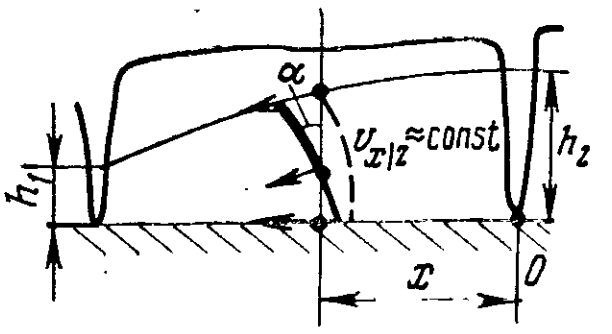
а



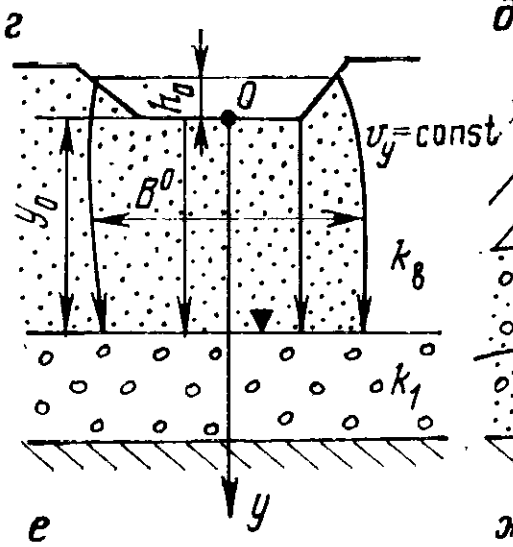
б



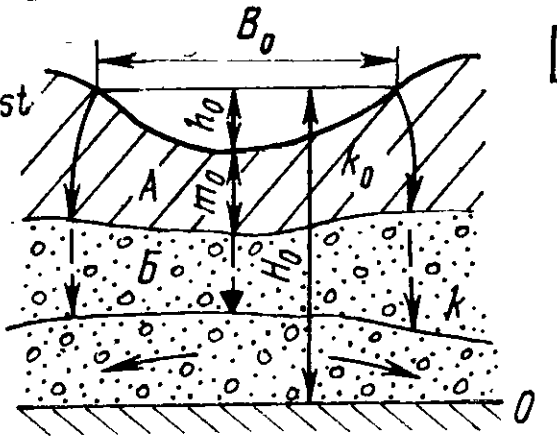
в

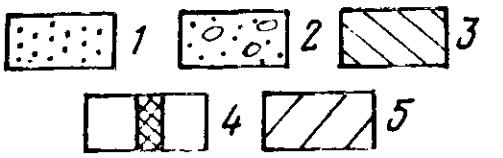


г

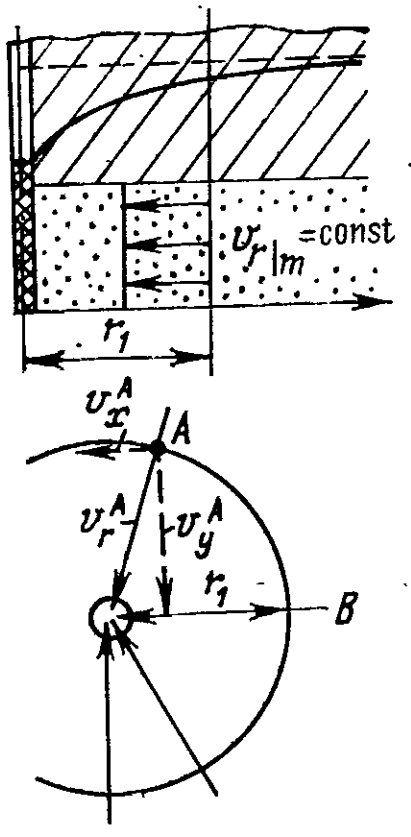


д

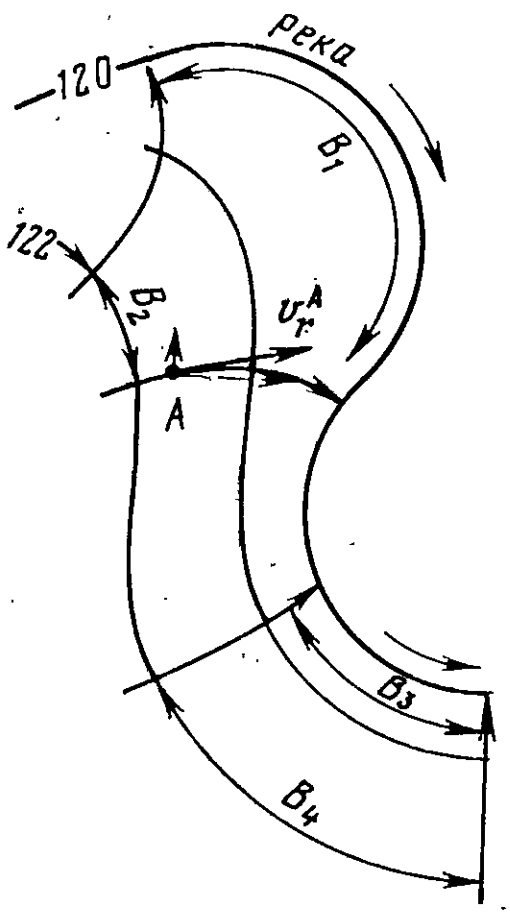




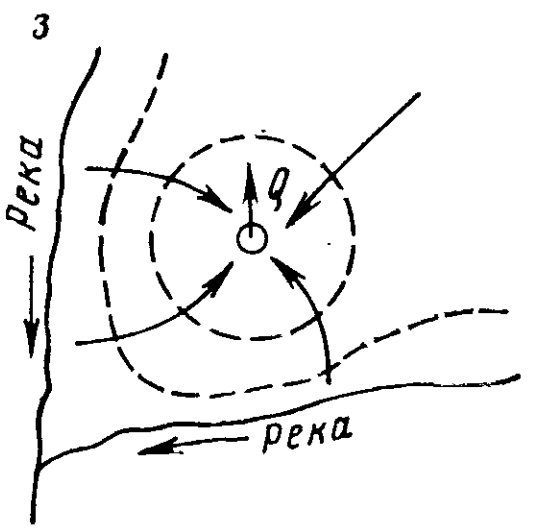
е



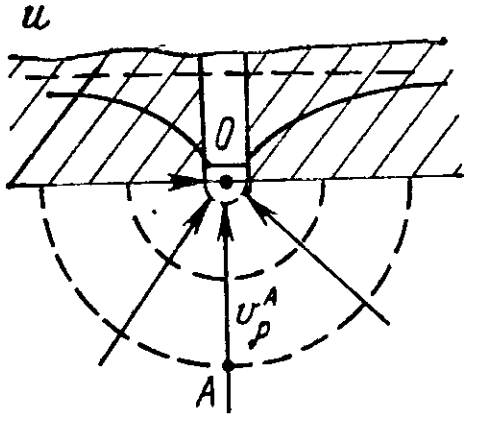
ж



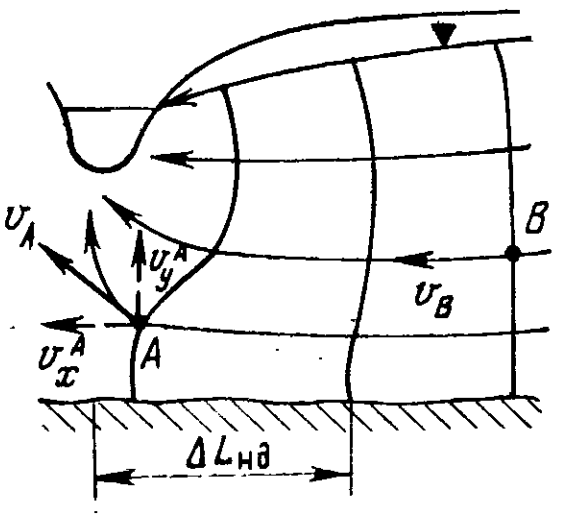
з



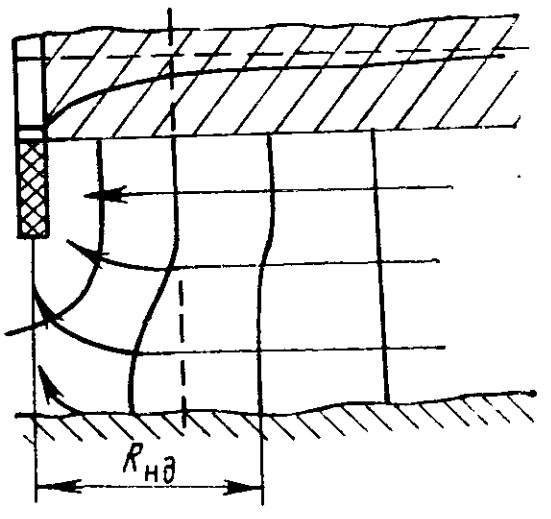
и



к



л



Для плоскопараллельного единичного потока (см. рис. 4.1, *б*, *в*) основные уравнения движения имеют вид:

$$v_x = -k\frac{\partial H}{\partial x}; \tag{4.5}$$

$$q_x = -kh\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{4.6}$$

где h — мощность грунтового потока. В радиальной системе координат (см. рис. 4.1, *е*) они запишутся в следующем виде:

$$v_r = -k\frac{\partial H}{\partial r}; \tag{4.7}$$

$$Q_r = -2\pi kmr\frac{\partial H}{\partial r}. \tag{4.8}$$

Здесь площадь поперечного сечения потока равна боковой поверхности цилиндра радиусом r при длине образующей, равной мощности пласта m, т. е. $\omega = 2\pi rm$. Условием применения радиальной системы координат является независимость v и Q от угла вращения радиуса-вектора в плане.

Считая, согласно теории поля [31, 34], что вектор скорости $\vec{v}$ связан со скалярным полем пьезометрической поверхности H и в каждой точке поля направлен по нормали к поверхности $H = \text{const}$, проходящий через эту точку, можно записать

$$\vec{v} = -k\,\text{grad}\,H, \tag{4.9}$$

где $\text{grad}\,H$ — вектор-градиент функции H, координаты которого $\partial H/\partial x$, $\partial H/\partial y$ и $\partial H/\partial z$.

Рис. 4.1. Виды потоков, выделяемые по структуре, мерности и форме границ в плане и разрезе и их гидродинамические особенности.

Плоскопараллельные потоки (одномерные, линейные в декартовой системе координат): *а—в* — горизонтальные (*а* — плоский в плане, $B = \text{const}$; *б* — напорный в разрезе; *в* — грунтовый в разрезе); *г—д* — вертикальные в зоне аэрации (*г* — инфильтрационный, *д* — свободное просачивание). *Радиальные* (v_r) *потоки* (двухмерные (v_x, v_y) плоские в декартовой системе координат): *е* — разрез и план одномерного напорного к совершенной скважине; *ж* — план расходящегося ($B_1 > B_2$) и сходящегося ($B_1 < B_2$) грунтового; *з* — то же, плановорадиального при откачке из совершенной скважины. *Сложные потоки* (трехмерные, пространственные в декартовой системе координат): *и* — одномерный, сферический (v_ρ); *к* — двухмерный, плосковертикальный при несовершенном врезе реки в водоносный пласт (в плане $B = \text{const}$); *л* — двухмерный в цилиндрической системе координат, напорный при откачке из несовершенной скважины (v_r, v_z). *1* — пески; *2* — песчано-галечные отложения; *3* — водоупор; *4* — фильтр скважины; *5* — суглинки. *А* — область нормальной инфильтрации в суглинках; $w_0 = v = k(h_0 + m_0)/m_0$; *Б* — область свободного просачивания, или «подземного дождя» в песчано-галечных отложениях с коротким фильтром v_ρ (пространственный в разрезе)

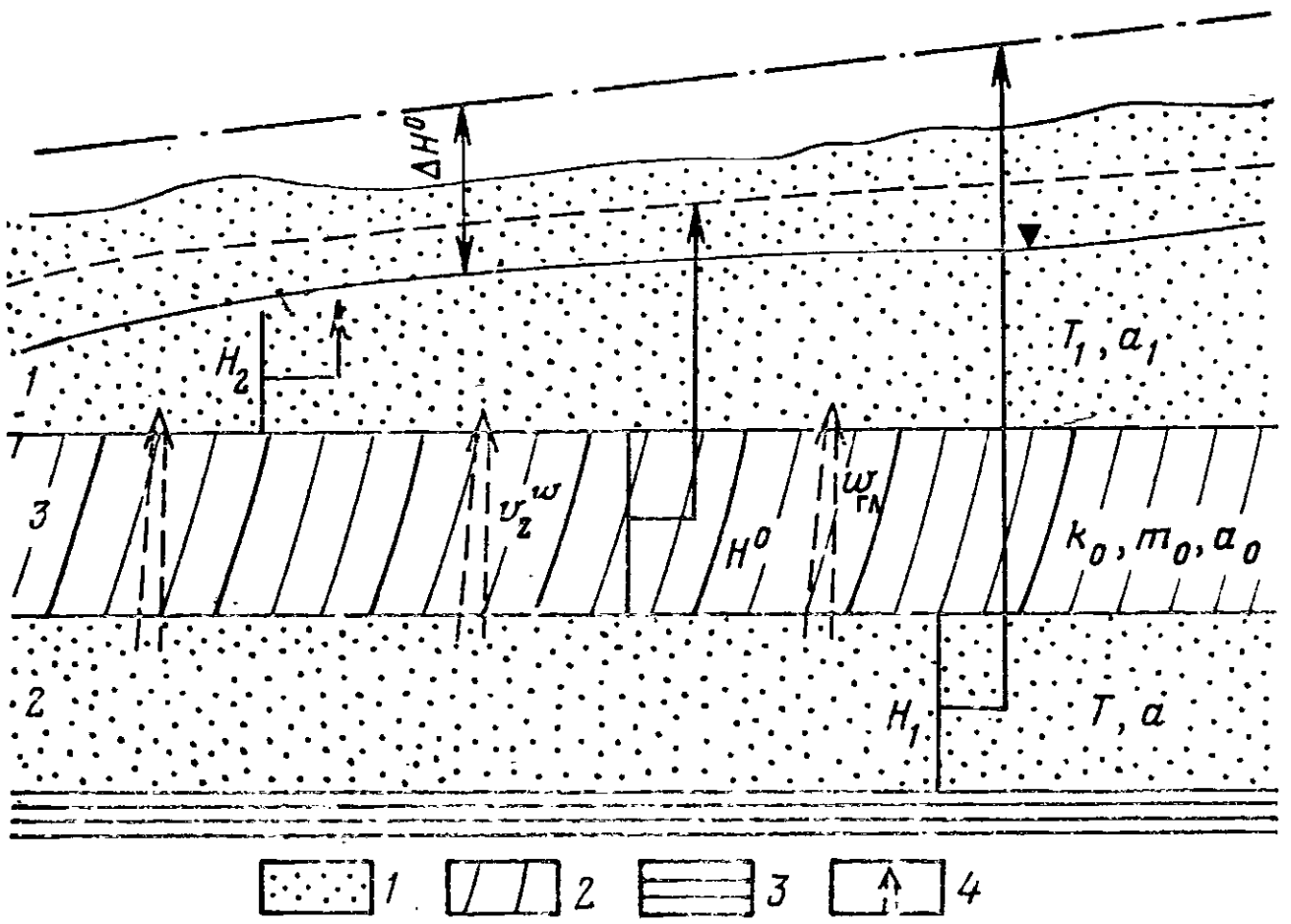


Рис. 4.2. Схема вертикального глубинного перетекания через разделяющий слой:
Горизонтальные потоки в хорошо проницаемых пластах: 1 — грунтовый, 2 — напорный, 3 — вертикальный через разделяющий слой с интенсивностью $\omega_{гл}$. *1* — пески; *2* — суглинки; *3* — глины; *4* — фильтрация через разделяющий слой

→

Переписав выражение (4.9) иначе, $v = \operatorname{grad}(-kH)$, получаем функцию

$$\varphi = -kH, \tag{4.10}$$

известную в теории фильтрации [3, 8, 40] под названием *потенциала скорости фильтрации*. Физический смысл ее можно понять, если продифференцировать (4.10) по координатам пространства и полученные выражения сравнить с уравнениями (4.4):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -k\frac{\partial H}{\partial x} = v_x; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -k\frac{\partial H}{\partial y} = v_y; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -k\frac{\partial H}{\partial z} = v_z. \tag{4.11}$$

Как видим, функция φ связана со скоростью фильтрации.

При вертикальном движении воды из одного водоносного горизонта в другой через разделяющей слой с коэффициентом фильтрации k_0 и мощностью m_0 (рис. 4.2) и разности напоров на его подошве H_1 и кровле H_2 согласно уравнению (3.5) средняя скорость v_z^w вертикальной фильтрации (или интенсивности глубинного перетекания $w_{гл}$) выразится формулой

$$W_{гл} = v_z^w = k_0\frac{H_1 - H_2}{m_0} = k_0\frac{\Delta H^0}{m_0}. \tag{4.12}$$

Полагая, что v_z в разделяющем слое изменяется по координате z (от 0 до m_0) и зависит от пьезометрического напора H^0, существующего

в этом слое, в дифференциальном виде уравнение (4.12) можно записать

$$v_z^w = -k\frac{\partial H^0}{\partial z}. \qquad (4.13)$$

З а д а ч а. Считая строение пласта в разрезе соответствующим рис. 4.2, записать: 1) уравнение для среднего вертикального расхода через разделяющий слой в плоскопараллельном потоке (см. рис. 4.1, *а*, *в*), в радиальном потоке (см. рис. 4.1, *е*); 2) уравнение для этих же вертикальных расходов в дифференциальном виде.

4.3. ЗАКОН ПРЕЛОМЛЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТОКОВ И ЕГО СЛЕДСТВИЯ

Преломление фильтрационных токов при движении воды в слоистых породах было экспериментально установлено в 1920—1930-е гг. и детально описано в работах [3, 19, 50]. Выделим [19] элемент фильтрационного потока (рис. 4.3, *а*), пересекающий плоскость раздела MN двух сред, имеющих соответственно k_1 и k_2, и запишем его расход в той и другой средах, использовав уравнение Дарси (3.4): $Q_1 = k_1 I_1 AC$, $Q_2 = k_2 I_2 BD$. Как видно из рис. 4.3, *а*, $AC = AB\cos\alpha$ и $BD = AB\cos\beta$. Тогда условия неразрывности потока можно записать следующим образом:

$$k_1 I_1 \cos\alpha = k_2 I_2 \cos\beta, \qquad (4.14)$$

где I_1 и I_2 — напорные градиенты в 1-й и 2-й средах; α и β — углы между линиями токов и нормалями к поверхности раздела (α — угол падения, β — угол отражения).

Выразим I_1 и I_2 через нормальную и тангенциальную составляющие:

$$I_1^n = I_1\cos\alpha; \quad I_1^t = I_1\sin\alpha; \quad I_2^n = I_2\cos\beta; \quad I_2^t = I_2\sin\beta \qquad (4.15)$$

и, подставив их последовательно в выражение (4.14), после преобразований получим два условия

$$k_1 I_1^n = k_2 I_2^n, \qquad (4.16)$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{k_1}{k_2}, \qquad (4.17)$$

которые и выражают основное содержание закона преломления фильтрационных токов.

Уравнение (4.16) показывает, что при фильтрации воды под углом к плоскости раздела слоев нормальные составляющие напорного градиента изменяются обратно пропорционально коэффициентам фильтрации. Уравнение (4.17) получено из условия неразрывности потока при его переходе из первой среды во вторую, что возможно при соблюдении равенства тангенциальных составляющих напорного градиента в этих средах ($I_1^t = I_2^t$). Соотношение тангенсов свидетельствует об изменении направления движения потока. При переходе потока

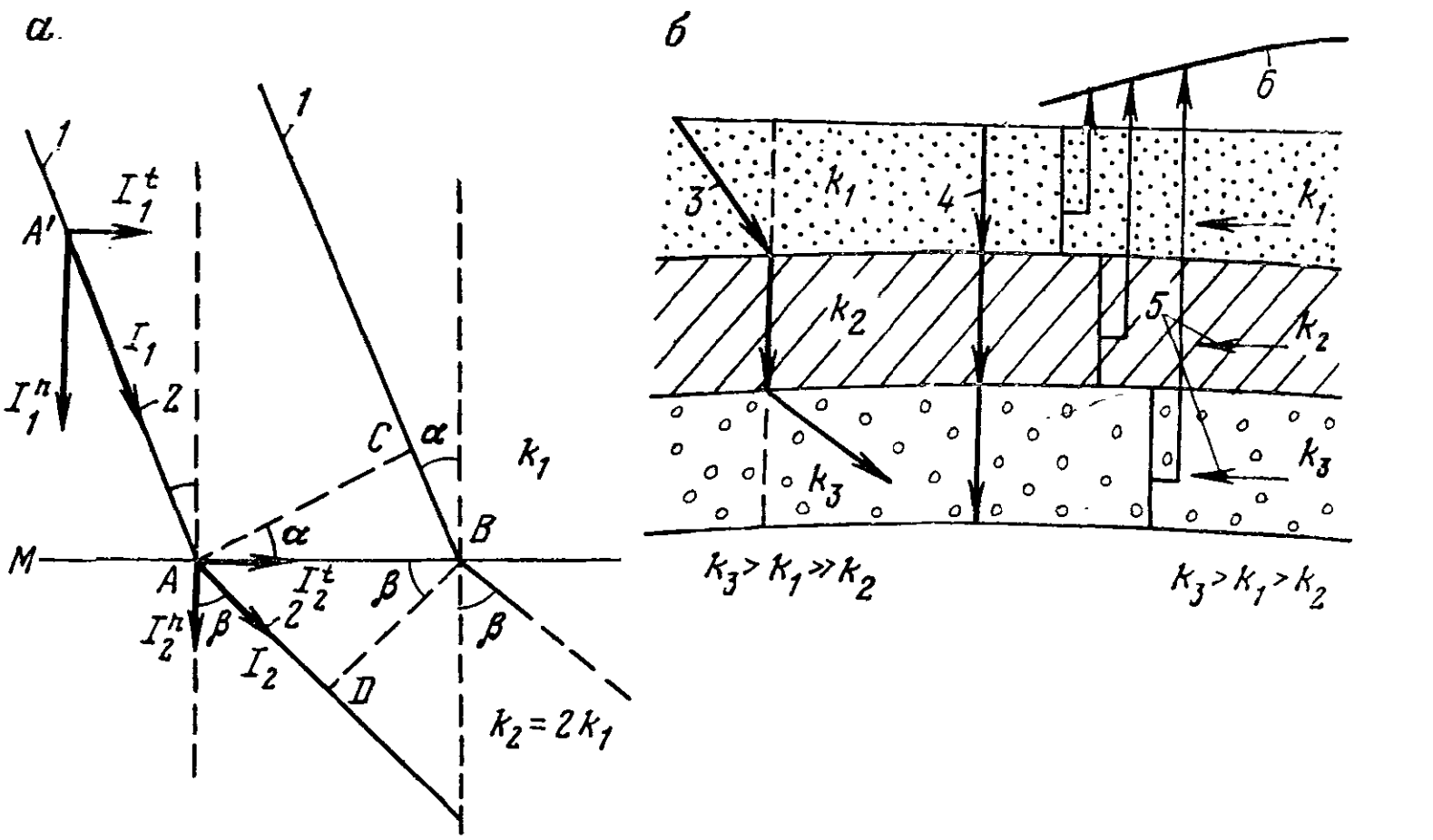


Рис. 4.3. Схемы к выводу закона преломления фильтрационных токов и характеристике гидродинамических особенностей потоков в слоистых толщах:

а — элемент потока; *б* — схема основных направлений движения потоков в слоистых неоднородных средах. *1* — ограничивающие линии тока; *2* — вектор-градиент потока I_1, I_2 в среде с проницаемостью k_1 и k_2 ($I^n_{1,2}$ и $I^t_{1,2}$ — соответственно нормальная и тангенциальная составляющие); *3—5* — схемы направлений (*3* — под углом к напластованию (преломление потока при $k_3 : k_1 : k_2 = 200 : 100 : 1$, $I_3 < I_1 \ll I_2$), *4* — нормально к напластованию (преломления нет, $v_1 = v_2 = v_3$, $k_1 I_1 = k_2 I_2 = k_3 I_3$), *5* — параллельно напластованию (преломления нет, $I_1^t = I_2^t = I_3^t = I^t$, $v_2 < v_1 < v_3$); *6* — депрессионная поверхность

в слабопроницаемый слой ($k_1 > k_2$) траектория его приобретает почти вертикальное направление, а при поступлении в хорошо проницаемый слой ($k_1 < k_2$) она существенно выполаживается, так как угол β становится больше угла α и поток стремится двигаться вдоль плоскости напластования. Чем больше различие в фильтрационных свойствах сред, тем резче проявляются эти особенности (см. рис. 4.3, *б*).

Существуют два главных направления, в которых не происходит преломления токов: перпендикулярное к плоскости напластования (см. рис. 4.3, *б*) и параллельное ей. В первом случае углы α и β равны нулю, cos α и cos β равны единице, тангенциальные составляющие градиентов — нулю, а нормальные — полным градиентам и в соответствии с выражением (4.16) наблюдается максимальное изменение I, а скорости фильтрации при этом равны:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{I_2}{I_1}; \qquad v_1 = v_2. \tag{4.18}$$

При фильтрации параллельно слоям α и β равны 90°, sin α и sin β равны единице, градиенты в каждом слое одинаковы, так как их нормальные составляющие равны нулю, а тангенциальные — величине градиента. В этом случае слоистый поток имеет одну кривую депрес-

сии, а скорости фильтрации в каждом слое различны и пропорциональны соответствующим значениям коэффициентов фильтрации:

$$I_1 = I_2 = I; \quad v_1 = k_1 I; \quad v_2 = k_2 I. \tag{4.19}$$

Эти следствия, как и сам закон, используются при построении гидродинамических сеток движения, схематизации гидрогеологических условий и выводе уравнений, описывающих фильтрацию воды в неоднородных пластах. Они были использованы Г. Н. Каменским [19, 20] при решении задачи о средних взвешенных коэффициентах фильтрации слоистых толщ. Он получил согласно уравнениям (4.18) и (4.19) следующие выражения при движении перпендикулярно к слоям

$$k_1 = \sum_1^n m_i \Big/ \sum_1^n \frac{m_i}{k_i}, \tag{4.20}$$

и параллельно им

$$k_{\parallel} = \sum_1^n k_i m_i / \sum_1^n m_i, \tag{4.20а}$$

где n — число слоев.

З а д а ч а. Получить эти зависимости, рассмотрев фильтрацию в слоистой среде на основе уравнения Дарси (3.4).

Закон преломления токов показывает, что если коэффициенты фильтрации слоев различаются значительно, то в слабопроницаемых слоях поток движется преимущественно в вертикальном направлении, а в хорошо проницаемых слоях — преимущественно в горизонтальном. На этом основана широко известная в теории водопритока к скважинам в гидравлически связанных слоистых пластах предпосылка Мятиева—Гиринского, или п р е д п о с ы л к а п е р е т е к а н и я [6, 54]. Это же следствие было использовано Г. Н. Каменским при исследовании фильтрации под плотинами на неоднородном основании [19]. При движении потоков в речных долинах, когда слабопроницаемые суглинки залегают непосредственно на хорошо проницаемых песках, при малом различии их коэффициентов фильтрации в обоих слоях формируется одна кривая депрессии, при значительном различии — наблюдаются две кривые и перетекание воды из суглинков в пески.

4.4. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СЕТКА, ЕЕ СВОЙСТВА

Уравнения линий тока и линий напора. Линии напора описываются уравнением $H = \text{const}$. С гидрогеологической точки зрения — это урезы рек, каналов, гидро- или пьезоизогипсы в плановых потоках. Линии тока являются линиями, в каждой точке которых вектор скорости фильтрации совпадает по направлению с касательной, проведенной к этой точке. При установившемся движении векторы скорости постоянны во времени по величине и направлению, и поэтому линия тока совпадает с траекторией движения частицы воды. При нестацио-

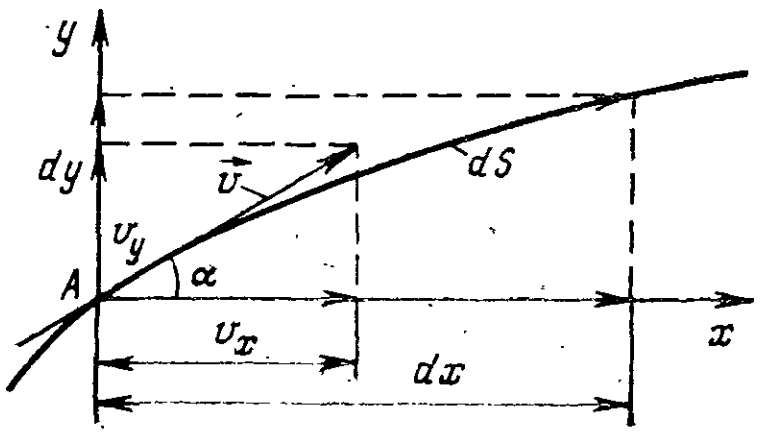


Рис. 4.4. Схема к выводу дифференциального уравнения линии тока

нарной фильтрации векторы скорости частиц воды переменны во времени по направлению и величине, поэтому траектории их движения не совпадают с линиями токов, которые, как отмечал Н. Н. Павловский, являются лишь мгновенными кинематическими характеристиками потока, позволяющими судить о направлении скоростей движения в точках, в данный момент времени попавших на рассматриваемую линию тока.

Получим дифференциальное уравнение линии тока. Выделим на линии тока бесконечно малый элемент dS и обозначим его проекции на оси координат соответственно dx и dy. На этом элементе действует вектор скорости $\vec{v}$ с составляющими v_x и v_y. Найдем связь проекций линии тока с проекциями вектора скорости фильтрации. Из рис. 4.4 видно, что $dx = dS\cos\alpha$, $dy = dS\sin\alpha$, а $v_x = v\cos\alpha$ и $v_y = v\sin\alpha$. Выразив отсюда соответственно значения $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, найдем $dx/dS = v_x/v$ и $dy/dS = v_y/v$ и после преобразований получим зависимость, которая и является *дифференциальным уравнением линий тока* плановой фильтрации

$$dx/v_x = dy/v_y. \tag{4.21}$$

В плане или в разрезе две линии тока образуют ленту тока (рис. 4.5). При установившемся движении она обладает такими свойствами: а) не изменяет формы; б) ограничивающие ее линии тока представляют собой непроницаемые границы, так как скорость по нормали n к линии тока равна нулю ($dH/dn = 0$); в) ленты тока гидродинамически независимы.

Докажем ортогональность линий тока и линий напора. Воспользуемся понятиями потенциала скорости фильтрации φ и функции тока ψ. Первый связан, с напором соотношением (4.10), а с v_x — соотношениями (4.11). *Функция тока* ψ связана с понятием расхода потока. Действительно, уравнение линии тока (4.21) можно переписать в виде

$$v_y dx - v_x dy = 0, \tag{4.22}$$

что представляет собой полный дифференциал $d\psi = 0$ некоторой функции ψ, которая имеет постоянное значение $\psi = \text{const}$ на данной линии тока. Тогда разность $\psi_B - \psi_A$ определяет количество воды, протекающей через произвольный контур, начало и конец которого на-

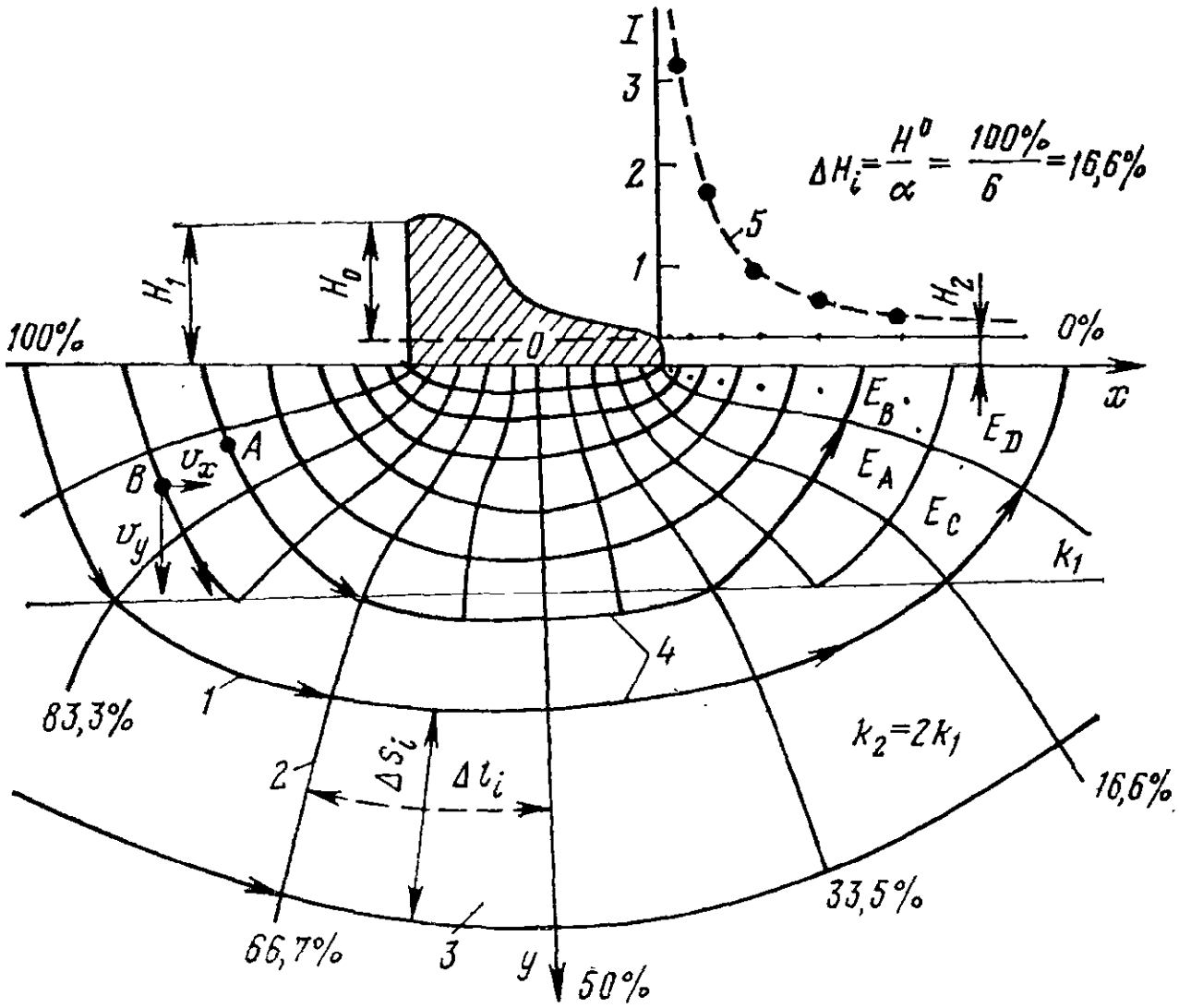


Рис. 4.5. Гидродинамическая сетка фильтрации под плотиной на неоднородном основании:

1 — линия тока; *2* — линия напора и значение относительной величины напора; *3* — ячейка сетки и ее размеры (ΔS_i — ширина, Δl_i — длина); *4* — линии тока, выделяющие ленту тока; *5* — график распределения градиента напора в нижнем бьефе плотины. H_1, H_2 и H_3 — напоры в верхнем, нижнем бьефе и на плотине соответственно; $\Delta H_i = H_0/M = 100\,\%/6 = 16{,}6\,\%$

ходятся в точках A и B (см. рис. 4.5), т. е. $q = \psi_A - \psi_B$. Учитывая, что $\psi = f(x, y)$, представим $d\psi = 0$ как

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0. \qquad (4.23)$$

Сравнивая зависимости (4.23) и (4.22) при учете (4.11), можно получить соотношения

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

которые известны в математике как условие Коши—Римана, определяющее ортогональность двух функций, в частности функции тока ψ и потенциала скорости фильтрации φ. Отсюда следует и ортогональность линий тока и линий напора, связанных указанными выше соотношениями с функциями ψ и φ.

Функции ψ и φ являются гармоническими, так как удовлетворяют уравнению Лапласа (докажите это самостоятельно). Отсюда следует, что для изучения фильтрации подземных вод можно привлекать математический аппарат, разработанный для изучения гармонических функций [3, 24, 40 и др.].

Свойства гидродинамической сетки. Система взаимно ортогональных линий тока и линий напора образует гидродинамическую сетку. Элемент сетки — ячейка конечных размеров, образованная пересечением двух линий тока двумя линиями напора (см. рис. 4.5). Графический способ построения сеток был предложен Ф. Форхгеймером [50], а свойства сеток исследованы Н. К. Гиринским, Н. Н. Павловским и Г. Н. Каменским [19, 20]. Сетки обладают такими свойствами: 1) линии тока и линии равного напора образуют фигуры, максимально приближающиеся к квадратам или прямоугольникам с одинаковым соотношением сторон или средних линий, что обеспечивает постоянство коэффициента формы сетки E (см. рис. 4.5)

$$E = \frac{N}{M} = \frac{\Delta l_i}{\Delta S_i} = \text{const} \tag{4.24}$$

(где N и M — соответственно число лент тока и полос напора; Δl_i и ΔS_i —средние значения длины и ширины ячейки); 2) при однородном строении пласта потери напора ΔH_i в каждой ячейке постоянны из условия

$$\Delta H_i = H_0/M \tag{4.25}$$

(где H_0 — действующий напор, равный разности максимального и минимального значений напоров на границах сетки); 3) расход Q_i ячейки определяется как

$$Q_i = k\Delta H_i \tag{4.26}$$

при условии, что $\Delta l_i = \Delta S_i$, и равен расходу ленты тока, которой принадлежит ячейка; 4) общий расход $Q_{об}$ потока в пределах всей сетки равен

$$Q_{об} = NQ_i; \tag{4.27}$$

5) в условиях неоднородного строения пласта (см. рис. 4.5) при направлении потока под углом к плоскости раздела слоев i и $i + 1$ происходит преломление линий тока и изменение их числа согласно выражению (4.16)

$$k_i/k_{i+1} = \Delta S_{i+1}/\Delta S_i = M_{i+1}/M_i. \tag{4.28}$$

Графически сетка строится по определенным правилам [19]. 1. Она вписывается в область фильтрации с соблюдением заданных граничных условий: а) проницаемые границы являются линиями равного напора и нормальны к непроницаемым границам, начинаются и заканчиваются на граничных линиях тока; б) непроницаемые границы — это линии токов, они нормальны к проницаемым границам, начинаются и кончаются на них. 2. Число лент напора назначают произвольно, исходя из характера и масштаба области фильтрации, а интервалы напора ΔH_i вычисляют по формуле (4.25). 3. Линии тока и напора проводят ортогонально, чтобы образовались криволинейные квадраты или прямоугольники и выполнялось условие (4.24) для всей сетки, а для четырех соседних ячеек (см. рис. 4.5)

$E_A \cdot E_D = E_B \cdot E_C$. 4. В менее проницаемом слое число промежуточных линий токов возрастает согласно выражению (4.28).

Назначение сеток: а) качественно охарактеризовать форму и направление потока подземных вод, его размеры, характер границ и действующие на них граничные условия, его соотношение с другими потоками; б) дать возможность простейшим способом определить его гидродинамические характеристики; в) характеризовать структуру и мерность потока, что важно для успешной схематизации гидрогеологических условий.

По гидродинамической сетке определяют: а) средний градиент напора в i-й ячейке ($I_i = \Delta H_i / \Delta l_i$) и скорость фильтрации по (3.5); б) расход потока в ячейке по (4.26) и общий расход по (4.27). Кроме того, по сетке строят графики изменения I, $v = f(x)$ по заданному направлению и эпюры напоров (см. рис. 4.5). Для сложных условий сетки строят моделированием [3, 11, 17, 26].

Постоянство расхода в ленте тока используется в методе *недеформируемых лент тока*. Согласно методу сложный поток делится линиями тока на отдельные более простые в гидродинамическом отношении фрагменты для того, чтобы в последующих расчетах для каждой ленты использовать уже имеющиеся аналитические решения или получить решения в более простой математической постановке (что будет рассмотрено в последующих главах).

4.5. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПОТОКА

Понятия о структуре и мерности потока. Структура потока графически представляется гидродинамической сеткой и характеризуется пространственным положением и направлением вектора скорости фильтрации, который проводится к типовым точкам, расположенным на участках с разной формой линий токов.

По структуре, т. е. положению вектора скорости фильтрации в пространстве, потоки разделяют на: *линейные* (вектор параллелен линии), *плоские* (лежит в плоскости) и *пространственные* (вектор не параллелен никакой плоскости). Плоские потоки подразделяют на плановые (в горизонтальной плоскости) и плоско-вертикальные, или профильные (в вертикальном сечении). Мерность потока определяется числом проекций вектора скорости фильтрации в выбранной системе координат. По мерности выделяют *одномерные*, *двухмерные* и *трехмерные* потоки. В качестве примера одномерного потока с линейной структурой в декартовой системе координат можно привести плоско-параллельный поток напорных вод к реке при совершенном вскрытии ею водоносного горизонта (см. рис. 4.1, *А*, *Б*). В грунтовых водах аналогичный поток не является строго одномерным, так как поверхности равных напоров не вертикальны, и вследствие этого горизонтальная составляющая вектора изменяется по вертикали (см. рис. 4.1, *в*). При малых градиентах потока эти изменения невелики, ими пренебрегают и считают в каждом сечении потока, что

$$v_x | z = \text{const}. \qquad (4.29)$$

Условие (4.29) известно как *предпосылка Дюпюи*, который в конце XIX в. впервые обосновал и использовал это условие при математической постановке задач о расходе потока грунтовых вод на горизонтальном водоупоре и водопритоке к одиночной совершенной скважине. В последнем случае поток обладает в плане радиальной симметрией, изменение скорости фильтрации определяется только длиной радиуса-вектора r, совпадающего с радиусами-линиями токов, поэтому поток в радиальной системе координат обладает одномерной структурой (см. рис. 4.1, *е*). В декартовой системе этот поток имеет двухмерную структуру в плане. Если одиночная скважина вскрывает фильтром не всю мощность водоносного пласта (несовершенная скважина), то в зоне ее действия формируется поток в декартовой системе координат с пространственной трехмерной структурой; в цилиндрической системе структура будет более простой — двухмерной, плоско-вертикальной; в сферической системе поток имеет еще более простую структуру — одномерную (см. рис. 4.1, *и*, *л*).

Анализ гидродинамической структуры потока. Структура и мерность потока зависят от формы и характера внешних и внутренних границ, строения и характера изменения фильтрационных свойств. При кусочно-однородном строении пласта на границах зон наблюдаются преломление линий тока и изменение градиента потока согласно условиям (4.16) и (4.17) и, следовательно, структура потока деформируется.

В многослойной толще структура потока определяется соотношением коэффициента фильтрации $k_р$ и мощностью $m_р$ слабопроницаемых и соответственно k, m хорошо проницаемых слоев. Это соотношение определяет положение векторов скорости $v_р$ и v в слоях, т. е. направление и количество движущейся в них воды. Если вертикальная составляющая скорости фильтрации в хорошо проницаемом слое v^n составляет менее 1 % от скорости вертикальной фильтрации в разделяющем слое $v_р$, т. е. $v^n \leqslant 0{,}01\, v_р$, то величиной v^n можно пренебречь, и тогда в проницаемом слое остается только горизонтальная составляющая v^t, т. е. будет соблюдаться условие (4.29).

Найдем критерии, допускающие такое упрощение. Примем в слабопроницаемом слое жесткий режим фильтрации по условиям (3.29) или (4.12):

$$v_р = k_р \frac{\Delta H_z}{m_р} = k_р I_р,$$

а для хорошо проницаемого слоя по условию (4.5)

$$v^n = k \frac{\Delta H_z^0}{m} = k I^n,$$

где ΔH_z и ΔH_z^0 — потери напора по вертикали в слабопроницаемом и в хорошо проницаемом слоях. Сопоставляя v^n и $v_р$ при заданной погрешности ε, с учетом условий (4.16) и (4.17) имеем:

$$\varepsilon = \frac{\Delta H_z^0}{\Delta H_z} = \frac{k_р}{k} \frac{m}{m_р} \text{ или } \varepsilon = \frac{I^n}{I_р} = \frac{k_р}{k}. \qquad (4.30)$$

Принимая $\varepsilon \leqslant 0{,}01$, получим условие, при котором в хорошо проницаемом слое можно считать движение воды идущим только в горизонтальном направлении:

$$\frac{k_\text{р}}{m_\text{р}} : \frac{k}{m} \leqslant 0{,}01, \tag{4.31}$$

где $k_\text{р}/m_\text{р}$ и k/m — удельные фильтрационные сопротивления соответствующих слоев.

При $m_\text{р} = m$ имеем:

$$k_\text{р} \leqslant 0{,}01k \text{ или } k/k_\text{р} \geqslant 100. \tag{4.32}$$

Зависимость (4.31) подтверждает влияние фильтрационных свойств и строения пласта на структуру потока.

Найдем аналогичное условие, позволяющее пренебречь горизонтальной составляющей v_p^t в слабопроницаемом слое и считать в нем движение воды направленным только в вертикальной плоскости. Примем, что $v_p^t \leqslant 0{,}01\ v$ и, имея в виду условие (4.32), рассмотрим соотношение единичных горизонтальных расходов в слабопроницаемом ($q_p^t = k_\text{р} m_\text{р} I_p^t$) и хорошо проницаемом ($q = kmI$) слоях. При заданной погрешности ε получаем соотношение водопроводимостей слоев

$$\varepsilon = \frac{I^t}{I} = k_\text{р} m_\text{р}/(km), \tag{4.33}$$

которое определяет условие, позволяющее пренебречь v_p^t. Если $\varepsilon \leqslant 0{,}01$ и $m_\text{р} = m$, то приходим к уже полученному ранее условию (4.32). Отсюда следует, что, если выполняются условия (4.30) или (4.33), то в потоке формируется следующая гидродинамическая структура: слабопроницаемые слои становятся разделяющими и движение в них идет в основном в вертикальном направлении, а в хорошо проницаемых пластах устанавливается горизонтальная фильтрация. Обоснованность такой структуры зависит от принятой погрешности ε. Такой поток представляет собой многопластовую систему, имеет планово-пространственную структуру и характеризуется наличием перетекания между пластами, что формирует горизонтально-вертикальный водообмен в системе.

Полученные условия называются предпосылками перетекания и подробно исследованы в работах Г. Н. Каменского [19], Н. К. Гиринского, А. Н. Митяева, Ч. Джейкоба [8], Ф. М. Бочевера [6] и В. М. Шестакова [54]. Н. К. Гиринский принимал в (4.30) $\varepsilon = 0{,}05$, т. е. $k_\text{р} \leqslant 0{,}05\ k$, а Ф. М. Бочевер [6] считал $\varepsilon = 0{,}01$—$0{,}005$ и записывал условие (4.33) в таком виде:

$$T/(k_\text{р} m_\text{р}) \geqslant 100—150. \tag{4.34}$$

Найдем условия, определяющие горизонтальнослоистую структуру пласта, при которой в слабо- и хорошо проницаемом слоях наблюдается практически только горизонтальное движение. Примем в хорошо проницаемых слоях справедливой предпосылку Дюпюи и условие $v^n \leqslant 0{,}01\ vt$, что дает право пренебречь величиной v^n. Из за-

висимости (4.15) следует, что тем самым в хорошо проницаемом слое определены соотношения составляющих напорного градиента I^n, I^t и tg β (если принять, что поток движется сверху под углом падения α в слабопроницаемом слое и с углом отражения β в хорошо проницаемом), т. е. можно записать $I^t \geqslant I^n$ tg β или при tg $\beta \geqslant 100$ $I^t > 100\, I^n$, а угол β при этом всегда более 89°25′. Из уравнения (4.15) следует также, что соотношение составляющих напорного градиента I^n_p и I^t_p зависит от величины tg α, а последняя согласно условию (4.17) определяется отношением коэффициентов фильтрации слабо и хорошо проницаемых слоев. Примем, что предпосылка Дюпюи в слабопроницаемом слое выполняется с точностью до 10 %, и вертикальной составляющей v^n_p можно пренебречь. Это означает, что $v^n_p \leqslant 0{,}1\ v^t_p$ и, из зависимости (4.15) имеем: $I^t_p \geqslant I^n_p \mathrm{tg}\,\alpha$, а если tg $\alpha \geqslant 10$, то из условия (4.17) при tg $\beta = 100$ имеем: tg α/tg $\beta \geqslant 0{,}1$ что определяет соотношение коэффициентов фильтрации слабо и хорошо проницаемого слоев:

$$k_p \geqslant 0{,}1k \text{ или } k/k_p \leqslant 10. \qquad (4.35)$$

При этом угол, под которым идет поток в слабопроницаемом слое, составляет $\alpha \geqslant 84°$, а мощности всех слоев одинаковы ($m_p = m$).

Условие (4.35) определяет соотношение горизонтальных составляющих скорости фильтрации в слабо и хорошо проницаемых слоях, а следовательно, и единичных горизонтальных расходов $q^t_p \geqslant 0{,}1\ q$ Имея в виду, что $q^t_p = k_p m_p\, (\Delta H_p/L)$, а $q = T\, (\Delta H/L)$, найдем более общее условие, определяющее горизонтальнослоистую структуру многослойного пласта:

$$T/(k_p m_p) \leqslant 10. \qquad (4.36)$$

Таким образом, если выполняются условия (4.35) или (4.36), то в хорошо проницаемых слоях с погрешностью 1 % и слабопроницаемых слоях с погрешностью 10 % можно пренебречь вертикальными составляющими скорости фильтрации и считать во всех слоях фильтрацию идущей только в горизонтальном направлении. Полученные условия подтверждают эмпирические критерии, которыми обычно пользуются при усреднении слоистой толщи и приведении ее к условно однородной с помощью средних взвешенных значений коэффициентов фильтрации при движении воды перпендикулярно к слоистости и параллельно ей.

Предложенное обоснование позволяет получить при схематизации структуры потока количественную оценку погрешности для случаев, когда соотношение коэффициентов фильтрации слоев или их водопроводимостей оказывается более 10, но менее 100. Так, если $k/k_p = 20$ (что часто принимается на практике при $k = 10$ м/сут и $k_p = 0{,}5$ м/сут), то погрешность в водном балансе, связанная с неучетом вертикальной составляющей, достигает 50 %.

З а д а ч а. Провести на основе изложенных выше зависимостей числовой расчет и подтвердить, что погрешность равна 50 %.

4.6. ОБЛАСТЬ ФИЛЬТРАЦИИ И КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Понятие области фильтрации и расчетной схемы. Область фильтрации — это вся область реального потока подземных вод или ее часть, в пределах которых намечается количественное изучение движения. Представленная для выполнения расчетов в упрощенном (или схематизированном) виде область фильтрации называется расчетной схемой, если используются аналитические методы, и моделью при применении моделирования. Основными их элементами являются границы, геофильтрационная среда и краевые условия, представленные как совокупность граничных и начальных условий. Последние необходимы только при изучении нестационарной фильтрации. В расчетной схеме (модели) в соответствии с принятой гидродинамической структурой потока контуры области и элементов гидрогеологической структуры потока заменяются геометрическими линиями и фигурами, а показатели геофильтрационной среды выражаются числовыми значениями или уравнениями, которые характеризуют закон их изменения в пределах выбранной области. Граничные условия представляются в математической форме и характеризуют принятый для расчетов закон изменения уровней и расхода потока на его границах. Начальные условия описывают в математическом виде принятое положение пьезометрического уровня по координатам пространства в начальный момент времени $t = 0$, принятый за начало отсчета при изучении нестационарного процесса фильтрации. Такое содержание расчетной схемы (модели) требует изображения на ней той системы координат, в которой ведется изучение процесса фильтрации. Одна из границ потока всегда совмещается с началом координат, а положение других определяется в зависимости от форм и размеров изучаемой области фильтрации. На рисунках 4.1 и 4.6 показаны различные виды областей фильтрации и расчетных схем.

Таким образом, область фильтрации представляется расчетной схемой, на которой в математической форме показаны все основные гидродинамические элементы исследуемого потока подземных вод, необходимые для конкретного решения задачи. В таком смысле можно расчетную схему считать графическим изображением математической модели исследуемого гидрогеологического объекта.

Граничные условия. Выделяют естественные и искусственные (см. гл. 1), внешние и внутренние, а на разрезах — боковые и среди них верховые (в области питания потока) и низовые (в области его разгрузки) границы потоков.

Проницаемые границы представлены линиями равного напора. Если давление в водоеме распределено по гидростатическому закону, то по контуру водоема пьезометрический уровень $H_г$ постоянен и определяется согласно формуле (2.7) как глубина водоема h_0 и геометрическая высота его контура z_0 относительно принятой плоскости сравнения (см. рис. 4.6, *г*): $H_г = h_0 + z_0$. Непроницаемые границы (водоупоры) являются линиями тока; градиент напора по нормали к этой границе равен нулю, т. е. $\partial H/\partial n = 0$.

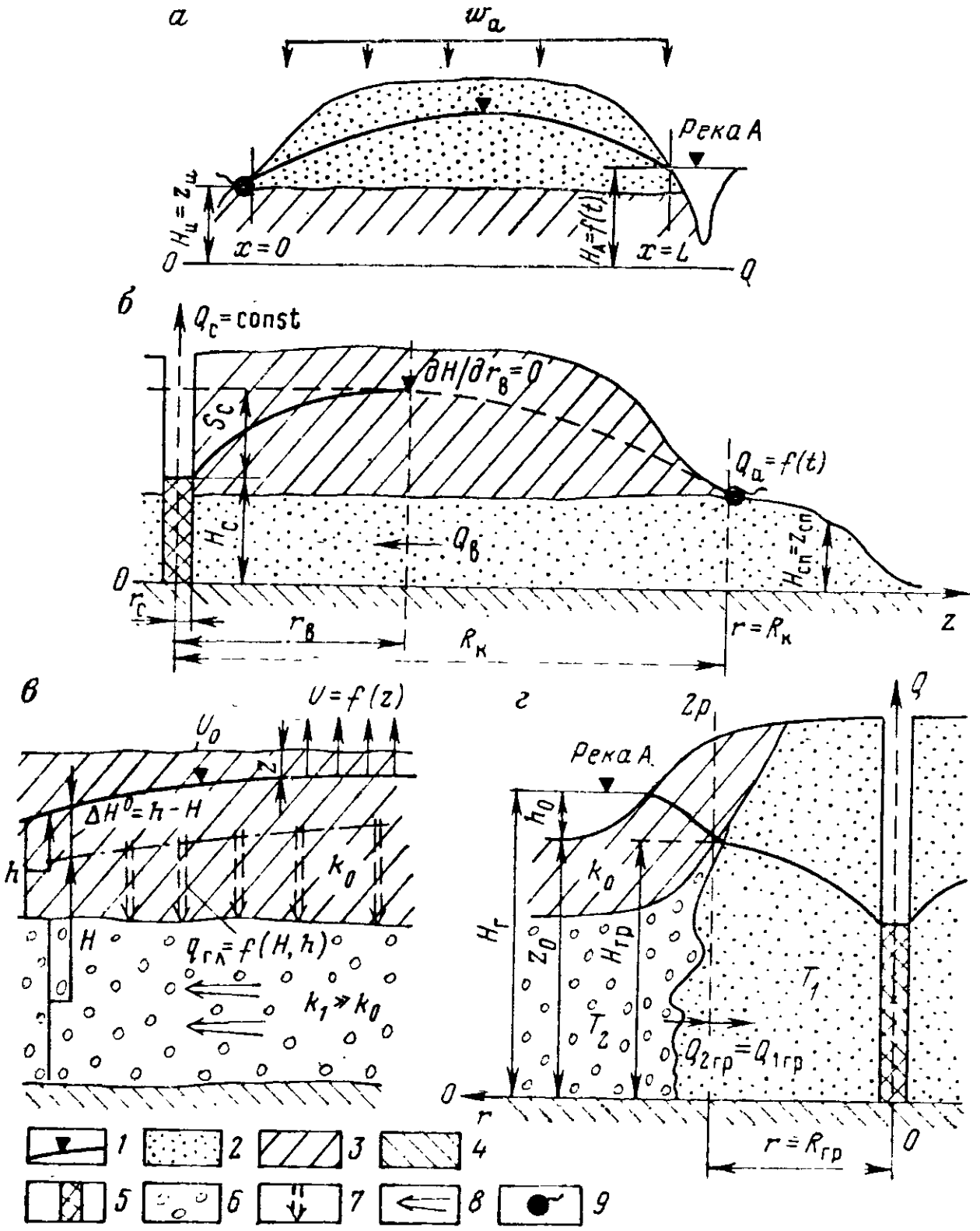


Рис. 4.6. Расчетные схемы и граничные условия первого — четвертого родов: *а* — груитового потока с граничиыми условиями первого рода (слева — постояиная отметка выхода источиика, $x = 0$ и $H_и = \text{const}$, справа — переменный уровеиь воды в реке, $x = L$ и $H_L = f(t)$); *б* — иапориого потока с граничными усло виями второго рода (слева — постоянный расход скважины, $Q_с = 2\pi k m r \left.\frac{\partial H}{\partial r}\right|_{r=r_0} = \text{const}$, справа — переменный во времени расход источиика $Q_и = f(t)$ и зона высачнвания, где $H_{сп} = z_{сп}$; иа водоразделе подземных вод уклои потока $\partial H/\partial n = 0$ и расход $Q_в = 0$); *в* — с перетеканием и граннчнымн условнями третьего рода (перетекаиие через граиицу раздела из суглинков в пески, $q = f(hH)$; испаренне с поверхности груитовых вод $U = U_0\left(1 - \frac{Z}{Z_к}\right)^n$ ($z_к$ — критическая глубина 3 м; U_0 — испарение с поверхности земли); *г* — взаимосвязи реки с грунтовым потоком, граничиое условне четвертого рода иа граиице зон с разной водопроводимостью T_1 и T_2, где выполияется условие иеразрывности течении в внде равенства расходов $Q_1 = Q_2$ или

$$T_1 \left.\frac{\partial H}{\partial r}\right|_{\text{гр } 1-2} = T_2 \left.\frac{\partial H}{\partial r}\right|_{\text{гр } 2-1}$$

1 — уровеиь подземных вод; *2* — пески; *3* — суглинки; *4* — водоупор; *5* — фильтр скважиины; *6* — гравийно-галечные отложения; *7* — фильтрация; *8* — иаправления движения подземных вод; *9* — источник

Свободная поверхность грунтового потока представляет собой верхнюю границу гравитационной зоны, где давление равно атмосферному (если не учитывается наличие капиллярной зоны) и обычно принимается за нуль. Тогда из выражения (2.7) следует, что в любой точке на свободной поверхности пьезометрическая высота равна нулю, а отметка пьезометрического уровня $H_{сп}$ равна ординате $z_{сп}$ положения этой точки над выбранной плоскостью сравнения:

$$H_{сп} = Z_{сп}. \tag{4.37}$$

При наличии капиллярной зоны условие на свободной поверхности усложняется введением активной высоты капиллярной зоны $h_к$, которая принимается полностью водонасыщенной, или давление всасывания в этой зоне оценивается величиной потенциала капиллярного всасывания $\psi_к$, зависящего от влажности θ пород, находящихся в пределах капиллярной зоны, $\psi_к = f(\theta)$. Иногда вместо условия (4.37) имеем:

$$H_{сп_к} = -h_к + z_{сп} \tag{4.38}$$

или

$$H_{сп_к} = -\psi_к + z_{сп}. \tag{4.39}$$

В условиях стационарной фильтрации при отсутствии инфильтрационного питания свободная поверхность является линией тока. При выходе потока на откос образуется зона высачивания (см. рис. 4.6), где давление (атмосферное) равно нулю и на линии высачивания сохраняется условие (4.37) в виде $H_{сп} = f(z)$. Подробнее этот вопрос освещен в работах [8, 34, 40, 54].

Более сложно обоснование кинематического условия на свободной поверхности при нестационарной фильтрации и наличии инфильтрационного питания w. Обычно принимают медленное перемещение свободной поверхности dS во времени dt, капиллярную зону не учитывают и из балансового уравнения получают [54]

$$\mu \frac{\partial S}{\partial t} = kI^0 + \frac{w}{\cos \alpha}. \tag{4.40}$$

где I^0 — градиент напора вдоль линии тока на свободной поверхности; α — угол между направлением скорости v^0 и вертикалью. При отсутствии инфильтрационного питания условие (4.40) принимает вид

$$\mu \frac{\partial S}{\partial t} = kI^0.$$

При математическом решении задач используют четыре вида граничных условий. *Граничным условием первого рода* называют задание его в виде известного закона изменения уровня воды; он может быть постоянным в виде уравнения (4.20) и переменным во времени (см. рис. 4.6, *а*)

$$H = f(t). \tag{4.41}$$

Граничное условие второго рода представляется как известный закон изменения расхода потока на его границах. Расход может быть

задан полным значением, например расход скважины при исследовании водопритока к ней (см. рис. 4.6, *б*)

$$Q_c = -2\pi kmr \frac{\partial S}{\partial r}\Big|_{r=r_c} = \text{const}; \tag{4.42}$$

расходом, меняющимся во времени, например дебит источника $Q_и = f(t)$ (см. рис. 4.6, *б*); удельным расходом на 1 м длины канала

$$q_{к\,t} = Q_к / 2L_к = f(t); \tag{4.43}$$

расход может быть равен нулю, если рассматривается непроницаемая граница,

$$Q_г \,|_{x=L_г} = 0, \tag{4.44}$$

или представлен величиной инфильтрационного питания $\omega_а$, не зависящей от положения свободной поверхности уровня грунтовых вод (см. рис. 4.6, *а*).

Граничное условие третьего рода выражает зависимость между изменением расхода потока на его границе и изменением уровня $H_{x,\,y,\,t}$ воды в самом потоке и в общем виде может быть записано в следующем виде:

$$Q_г = f(H_{x,\,y,\,t}). \tag{4.45}$$

Таким условием является, например, зависимость (4.12), определяющая изменение интенсивности глубинного перетекания $\omega_{гл}$ от величины напора H основного пласта (см. рис. 4.6, *в*). К такому же условию относятся зависимости поступления воды из реки через закольматированное русло в водоносный горизонт (см. рис. 4.6, *г*) или испарения U со свободной поверхности грунтовых вод от глубины их залегания (см. рис. 4.6, *в*).

Граничное условие четвертого рода выражает закон неразрывности течения и представляет собой равенство расходов потока слева и справа относительно границы раздела сред, имеющих водопроводимости T_1 и T_2 соответственно (см. рис. 4.6, *г*):

$$T_1 \frac{\partial H}{\partial l}\Big|_{гл} = T_2 \frac{\partial H}{\partial l}\Big|_{гп}. \tag{4.46}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Есть ли различие в единичных расходах плоскопараллельной и радиальной фильтрации?
2. В чем отличие понятий «поток подземных вод» и «расход потока»?
3. Какое из выражений закона Дарси

$$q_x = -kh \frac{dh}{dx} \quad \text{и} \quad q_x = -km \frac{\partial H}{\partial x}$$

записано для грунтовых вод?
4. Что такое предпосылка Дюпюи?
5. Если средняя скорость фильтрации выражена как $v_{ср} = H_0/\pi r$, то какую форму имеют линия тока и поток в целом (H_0 — постоянная разность напоров на концах линий токов)?

6. Каков физнческий смысл функций φ, ψ н как они связаны со значениями H, q?

7. Как математическн формулнруется закон преломления фильтрационных токов н каково содержание его основных следствий?

8. Каково назначение гидродинамнческой сетки и основные правила ее построения?

9. Как обосновать, что расход ячейки сетки равен расходу ее ленты тока?

10. Как графическн представить гидродинамнческую структуру потока?

11. Что такое мерность н структура потока?

12. Скважина дном вскрывает кровлю напорного водоносного пласта большой мощностн н из нее ведется откачка. Какую структуру в декартовой системе координат нмеет созданный поток, какова его мерность? В какой системе координат его можно представить как одномерный? Как изменится структура и мерность потока, еслн скважина будет фильтровой и совершенной?

13. Какую структуру и мерность нмеет грунтовый поток, дренируемый рекой, не полностью врезанной в водоносный пласт? Как назвать такие поток и внд фильтрации? Как нзменятся структура и мерность потока, если река прорежет водоносный горнзонт до водоупора?

14. Какими критериями определяются горизонтальнослоистая и плановопространственная структуры потока?

15. Что такое расчетная схема н ее основные элементы?

16. Запншите математически граничные условия первого, второго, третьего и четвертого родов. Приведите для них примеры, дополняющие указанные на рис. 4.6.

17. Какую структуру слонстого потока характеризуют условия (4.34), (4.35) и (4.36)?

18. Какие границы потока характернзуют условия $\partial H/\partial n = 0$ и $H_{сп} = z_{сп}$?

Глава 5

ПРИНЦИПЫ СХЕМАТИЗАЦИИ ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ

5.1. ПОНЯТИЕ О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ. ЗАДАЧИ СХЕМАТИЗАЦИИ

Движение подземных вод зависит от действия большого числа факторов. Однако это не означает, что все они должны быть представлены в математической модели. Учет большого числа факторов может привести к созданию очень сложной модели, которую нельзя будет описать математически. Чтобы построить модель разумной сложности, следует применительно к изучаемому процессу разделить действующие факторы на главные и второстепенные и последними пренебречь. При этом обязательно имеют в виду метод расчета, которым будут пользоваться, так как возможности методов разные. Аналитические методы требуют более существенного упрощения природной обстановки, чем методы математического моделирования. Деление факторов на главные и второстепенные относительно и зависит от степени изученности и сложности гидрогеологического объекта, характера и комплекса изучаемых процессов, практической или научной важности решаемой задачи. Это означает, что для одного и того же гидрогеологического объекта можно построить различные по виду, числу и комбинациям учитываемых факторов модели.

Построение моделей гидрогеологических объектов — сложная проблема, решение которой требует знаний многих разделов гидрогеоло-

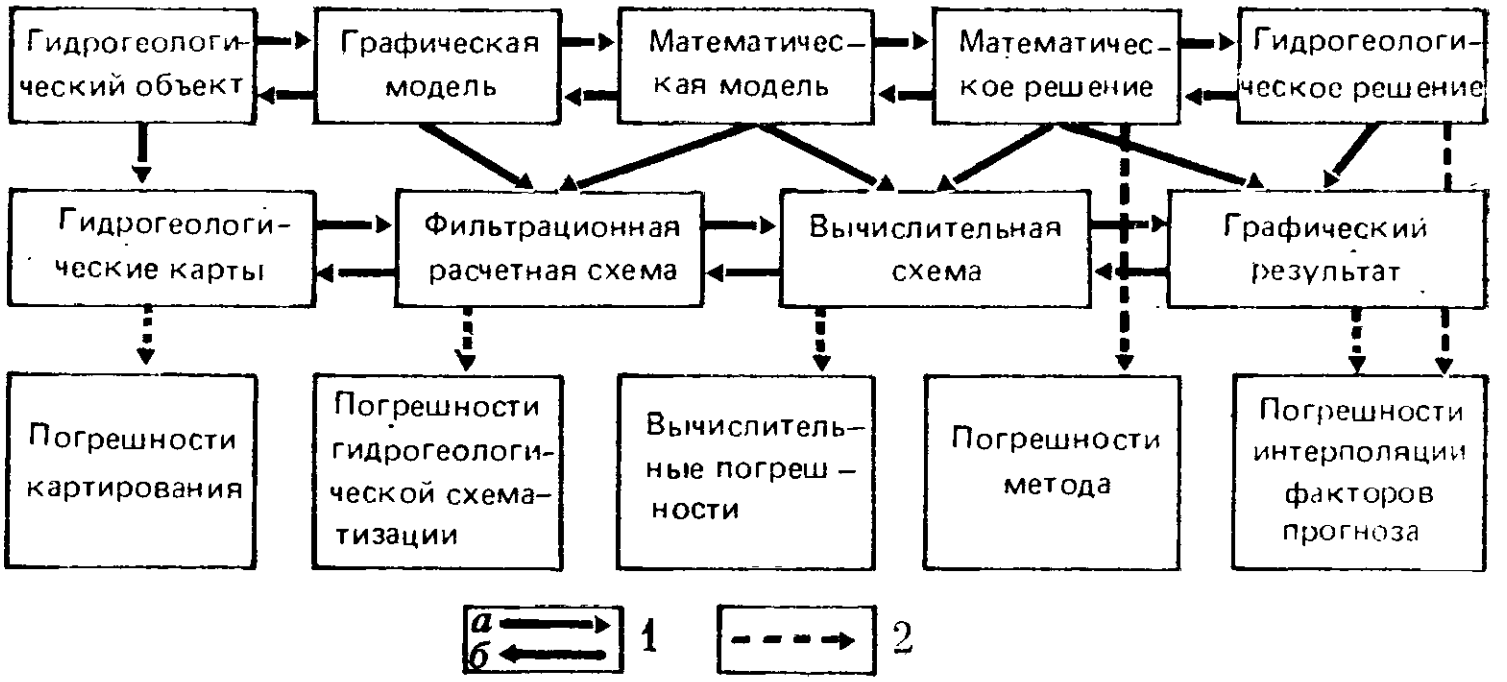


Рис. 5.1. Последовательность гидродинамического расчета и построение математической модели с этапами возникновения погрешности.

1 — связи прямые (*а*) и обратные (*б*); *2* — возникновение погрешностей

гии и выходит за круг задач, рассматриваемых в данном курсе. Однако знание принципиального подхода решения этой проблемы необходимо для правильного понимания излагаемых далее математических постановок. Таким главным принципом является соблюдение последовательности гидродинамического (математического) расчета (рис. 5.1). Вначале проводятся типизация и схематизация гидрогеологических условий объекта и построение графической его модели, затем создается математическая модель объекта, на которой ведут решение задачи с последующим гидрогеологическим анализом полученных результатов. Названная последовательность подчеркивает неразрывную связь гидрогеологического и математического анализов. Под типизацией гидродинамических условий будем понимать гидродинамическое районирование и выделение однотипных по совокупности действия геофильтрационных факторов районов и зон (участков) [11]. Совокупность действия гидродинамических факторов проявляется в одинаковых закономерностях движения подземных вод и отображает близость условий формирования их режима и водного баланса. Поэтому районы выделяют по типу режима и баланса подземных вод. Формирование водного баланса потока подземных вод определяется характером его границ и граничных условий, а также строением пластов; однотипность этих факторов — второй показатель районирования. Таким образом, гидродинамическое районирование (типизация) дает возможность установить ведущие гидродинамические факторы, характер их проявления по площади, обосновать гидрогеологическую и гидродинамическую структуры изучаемого потока в целом.

Схематизация гидрогеологических условий — это их упрощение с целью построения расчетной схемы (модели) применительно к выбранному методу решения задачи. Упрощение выполняется в пределах выделенных районов (зон) последовательным анализом гидродинамических особенностей потока. Исполь-

зуются критерии, позволяющие качественно и количественно оценить допустимость предполагаемых упрощений. Процесс схематизации — это своего рода искусство, он требует от исполнителя глубокого знания геологического строения и гидрогеологических условий объекта, хороших знаний общих физических закономерностей, свойственных изучаемым процессам и устанавливаемым специальным анализом математических уравнений.

Задачи схематизации следующие [11, 38]: а) выявить сферу взаимодействия, т. е. зону активного влияния границ и инженерного сооружения на динамику потока; б) уменьшить мерность и упростить гидродинамическую структуру потока, чтобы свести пространственную фильтрацию к плановой или профильной, трех- или двухмерный поток к одномерному; в) оценить необходимость учета в расчетах вертикального водообмена ($\omega_а$, $\omega_{гл}$) и форму его представления в расчетной схеме; г) выяснить характер пространственной изменчивости фильтрационных и емкостных свойств потока и необходимость свести неоднородное строение к условно однородному или закономерно неоднородному, установить гидрогеологическую структуру потока (тип строения пласта); д) упростить закон действующих граничных условий.

5.2. ВИДЫ ПОТОКОВ И ИХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ

Гидродинамические особенности потоков исследованы в работах Г. Н. Каменского [19, 20], Ф. М. Бочевера [6], И. К. Гавич [11, 21, 38] и др. [17, 54].

Гидродинамические особенности и виды потоков по условиям залегания и гидравлическому состоянию. Выделяют потоки: грунтовые, или безнапорные; напорные; субнапорные; напорно-безнапорные.

Особенности *грунтовых потоков* следующие (рис. 5.2, *а*, II): а) залегают на первом от поверхности региональном водоупоре; б) имеют свободную поверхность, где давление равно атмосферному (нулевое); в) имеют капиллярную кайму; г) изменение уровня вызывает одновременное изменение мощности, водопроводимости и уровнепроводности потока; д) характеризуются гравитационной емкостью, процессами гравитационного осушения или насыщения пород; д) радиус влияния нестационарной фильтрации порядка 100—500 м при длительности возмущающего фактора 10—100 сут; е) обладают заметной инерционностью по сравнению с напорными потоками: время стабилизации грунтовых потоков $\beta = L^2/a = 10^3$—10^5 сут при $a = 10^3$ м^2/сут и длине L потоков 1—10 км.

К особенностям *напорных потоков* (см. рис. 5.2, *б*) можно отнести такие: а) залегают между двумя относительно непроницаемыми слоями, а в разрезе литосферы находятся ниже грунтовых вод; б) над кровлей всегда имеют избыточное $\Delta H_{изб}$ давление (напор); в) не имеют капиллярной зоны; г) граничные изменения пьезометрических уровней приводят только к изменению давления в пласте, мощность, водопроводимость и пьезопроводность остаются при этом постоянными;

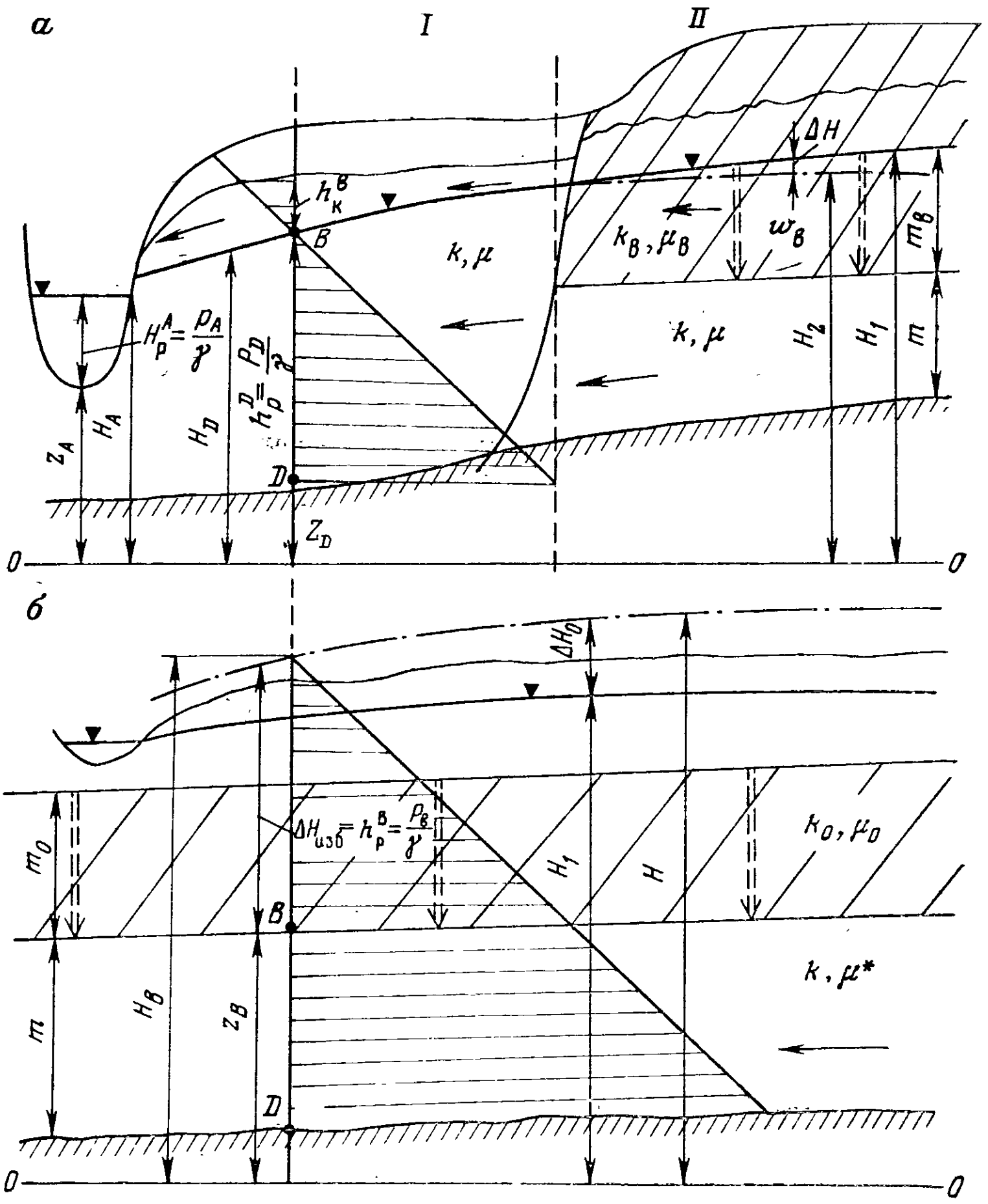


Рис. 5.2. Гидродинамические особенности и виды потоков, выделяемые по общим условиям залегания и гидравлическому состоянию.

Воды: *а*I — грунтовые; *а*II — субнапорные; *б* — напорные. Заштрихована эпюра распределения гидростатического давления в водоносном пласте и зоне капиллярной каймы (ЗКК)

д) наблюдаются только процессы упругого сжатия и расширения пород и воды; е) радиус влияния нестационарной фильтрации порядка 1000—5000 м при длительности воздействия 10—100 сут; ж) давление переформировывается быстро: время стабилизации напорных потоков β составляет 10—10^3 сут для потоков длиной 1—10 км при $a^* = 10^5$ м^2/сут.

Субнапорные потоки залегают неглубоко (см. рис. 5.2, *а* II), имеют двухслойное строение, при котором выполняется условие (4.34), и

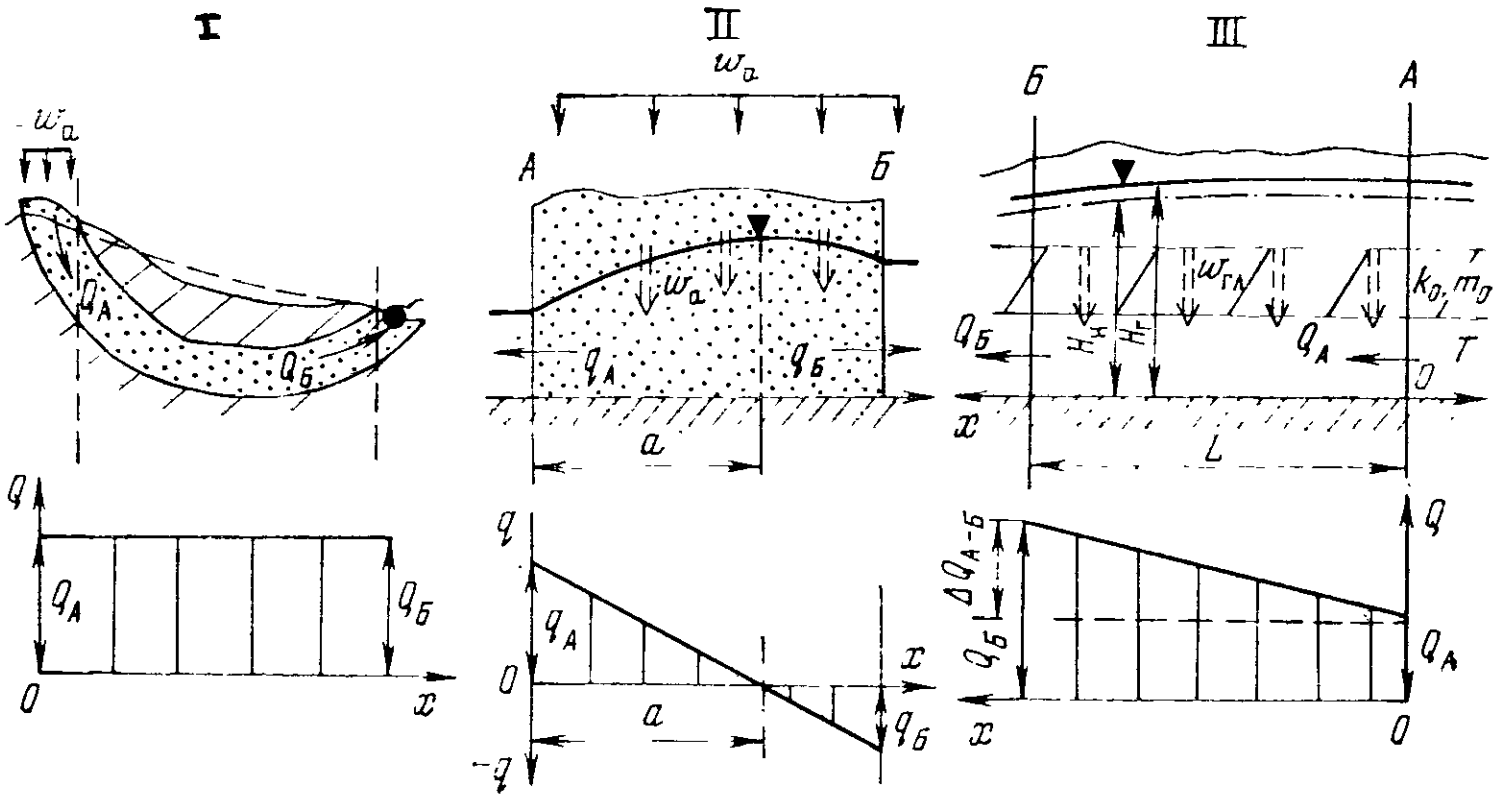


Рис. 5.3. Гидродинамические особенности и виды потоков по типу питания и разгрузки:

I — напорный с горизонтальным водообменом, питание сосредоточенное; II — грунтовый с горизонтально-вертикальным инфильтрационным водообменом, питание рассеянное, разгрузка сосредоточенная; III — напорный с горизонтально-вертикальным глубинным водообменом. Верхние рисунки — гидрогеологические разрезы, нижние — эпюры расходов

в водоносном суглинистом слое (см. рис. 5.2, слой $m_в$) их движение обладает особенностями грунтовых, а в нижнем хорошо проницаемом слое — напорных потоков. При этом в суглинистом слое движение преимущественно вертикальное, а в нижнем — горизонтальное.

Напорно-безнапорными называют потоки, которые на одном участке площади распространения являются грунтовыми, а на другом — напорными.

Гидродинамические особенности и виды потоков по условиям водообмена. Выделяют [11, 38] потоки (рис. 5.3) с горизонтальным, горизонтально-вертикальным и вертикальным видами водообмена. Вертикальный водообмен подразделяют на инфильтрационный, обусловленный инфильтрацией атмосферных осадков (испарением), и глубинный, связанный с перетеканием.

По видам питания и расходования воды выделяют [21] потоки (см. рис. 5.3) с сосредоточенным, рассеянным (или распыленным) и смешанным питанием (расходованием).

В условиях стационарной фильтрации поток с сосредоточенным питанием (разгрузкой) характеризуется постоянной величиной расхода по длине (см. рис. 5.3, I). Восполнение или убыль воды происходят через его внешние боковые границы, что определяет наличие только горизонтального водообмена. Поток со смешанным питанием (разгрузкой) имеет переменный расход по длине (см. рис. 5.3, II). Восполнение или убыль воды осуществляются не только на его боковых границах, но и на площади распространения путем поступления или расходования ее через зеркало грунтовых вод, относительно проницаемое ложе или кровлю напорного потока. Все это определяет развитие в нем горизонтально-вертикального водообмена. В матема-

тическом отношении такой вид потока рассматривается как поток с внешним стоком (поступление) или источником (расходование). При значительной интенсивности вертикального водообмена во внутренней области потока могут быть экстремальные точки — пьезомаксимумы или пьезоминимумы, где градиент потока равен нулю. Через эти точки проходят линии тока, делящие поток на фрагменты, независимые в гидродинамическом отношении.

Поток, имеющий только рассеянное питание (расходование), характеризуется вертикальным водообменом (см. рис. 5.3, III при условии, что $\Delta Q = Q_Б - Q_A \gg Q_A$).

Гидродинамические особенности и виды потоков по изменчивости свойств фильтрационной среды. Изменение свойств фильтрационной среды вызывает изменение уклонов, скорости и направления движения потока. Рассмотрим некоторые исходные понятия. В понятие «неоднородность» в математике и геологии вкладывается разное содержание. В математике неоднородность означает некоторый разброс числовых значений исследуемого показателя какого-либо свойства. В геологии под пространственной неоднородностью понимают закономерное изменение в пространстве показателей и свойств объекта (см. гл. 1). Изменчивость свойств геологической среды исследована в инженерной геологии Г. К. Бондариком, М. В. Рацем, С. Н. Чернышовым, а в гидрогеологии рассмотрена в работах Л. С. Язвина, Б. В. Боревского, В. А. Мироненко, И. К. Гавич и др.

Неоднородность фильтрационной среды выражается изменением показателей ее проницаемости и емкости в геологическом пространстве. Однако изменчивость емкостных свойств меньше, чем фильтрационных, поэтому в дальнейшем под фильтрационной неоднородностью будем понимать изменение водопроводимости или коэффициента фильтрации. Закономерные их изменения связаны с фациальной изменчивостью пород, появлением в разрезе слоистости, наличием зон разломов и т. п. Эти изменения связаны с факторами, действующими направленно и долгое геологическое время, и охватывают значительные по размерам площади, в результате чего формируется *региональная неоднородность*. Элементы ее имеют значительные в плане или разрезе размеры. Случайные изменения формируются под влиянием локальных факторов, характеризующихся непродолжительностью, разным направлением и значительным числом. Обычно к случайным изменениям показателей относят и погрешности определения этих показателей лабораторными или полевыми методами.

Выделяют четыре уровня (порядка) неоднородности в зависимости от размеров ее элементов: *мега-*, *макро-*, *мезо- и микронеоднородность*. Низший уровень (порядок) имеет самая крупная неоднородность, а высший — самая мелкая. Гидрогеологические объекты могут изучаться на уровне бассейнов, водоносных комплексов, водоносных горизонтов или их частей. Как геологические объекты они могут изучаться на уровне выделения формаций, литолого-генетических комплексов (фаций) и отдельных горных пород (минерально-породный). В зависимости от принятого уровня изучения потока подземных вод действие элементов неоднородности на процесс фильтрации будет про-

являться и учитываться по-разному. Так, при изучении фильтрации на уровне бассейна небольшие прослои, линзы, тектонические разломы могут рассматриваться как элементы неоднородности высшего порядка, и воздействие их на фильтрационный поток может быть статистически усреднено. Если в качестве объекта рассматривается водоносный горизонт или его часть, то эти же элементы будут проявлять себя как эффективная неоднородность, т. е. будут воздействовать на структуру потока и должны учитываться при схематизации и построении расчетной схемы. Если зона влияния $R_э$, т. е. сфера взаимодействия (см. гл. 1) естественных границ или сооружений (водозаборы, плотины) с геологической средой значительна, то мелкие элементы неоднородности проявят себя статистически усредненно, и в этой области среда может быть принята условно однородной. Если размеры элементов неоднородности $R_н$ соизмеримы с зоной влияния $R_э$, то они должны учитываться в расчетной схеме (модели) потока подземных вод.

Таким образом, понятие неоднородности среды математически относительно. Среда может приниматься за однородную и неоднородную в зависимости от соотношения принятых к рассмотрению размеров $R_н$ и $R_э$. Для потоков как ГДС выделяют [19] типовые схемы неоднородного строения пласта в разрезе и плане (рис. 5.4).

В *однородной* среде k и T в пространстве не изменяются и при установившемся движении T и v постоянны. При *слоистом* строении пласта наблюдается дискретное изменение k или T по вертикали, но они постоянны по простиранию каждого слоя. В этом случае (см. разд. 4.5) градиент потока, направление его движения и скорость фильтрации зависят от соотношения числовых значений k_i и T_i отдельных слоев. При *кусочно-однородном* строении на каждом участке длиной l_1, l_2 и т. п. наблюдается постоянное значение k или T, а изменения I и v соответствуют схеме однородного строения, на границах участков наблюдается резкий перелом кривой депрессии, что отвечает первому следствию закона преломления токов (см. разд. 4.3). *Постепенно изменяющиеся* показатели k и T аппроксимируются чаще всего зависимостью прямой линии

$$k_x = k_1 + \frac{k_2 - k_1}{L} x \qquad (5.1)$$

или экспонентой

$$T = T_0 e^{-\alpha x}, \qquad (5.2$$

где k_1 и T_0 — значения показателей в начальном сечении; k_2 — значение показателя в сечении на расстоянии L от начала координат; α — эмпирический коэффициент.

Из уравнения Дарси (4.17) видно, что математически каждому закону изменения показателя соответствует определенное изменение скорости и градиента потока. Последние четыре схемы строения пласта рассматриваются в настоящее время как схемы с упорядоченной закономерной неоднородностью.

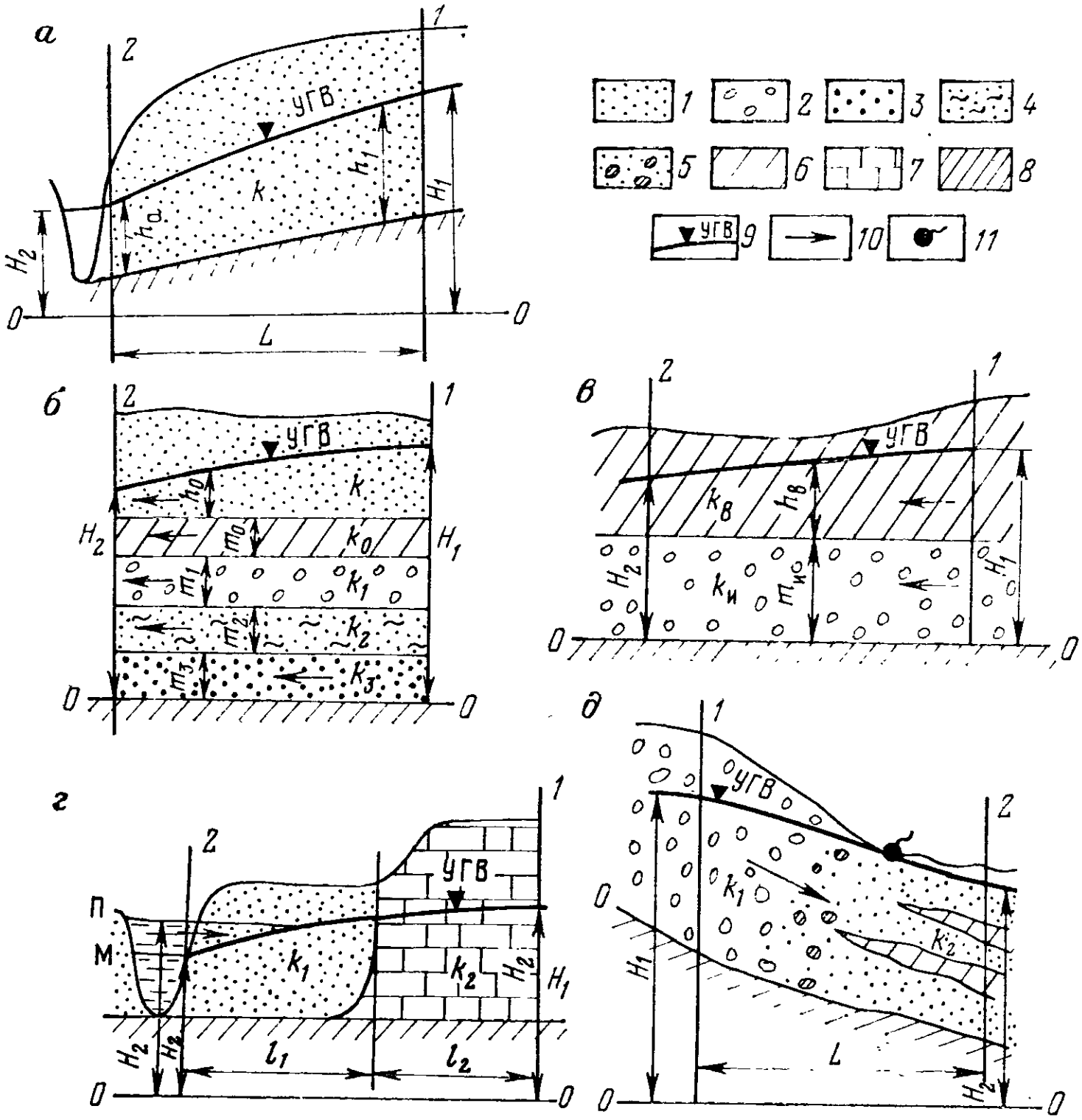


Рис. 5.4. Типы неоднородного строения геологической среды (по Г. Н. Каменскому):

а — однородное; *б* — многослойное; *в* — двухслойное; *г* — кусочно-однородное (резкая смена по направлению движения); *д* — постепенно изменяющееся. *1—4* — песок (*1* — мелкий, *2* — крупный, *3* — средний, *4* — глинистый); *5* — галечник; *6* — суглинки; *7* — трещиноватые известняки; *8* — водоупорные глины; *9* — уровень грунтовых вод; *10* — направление движения воды; *11* — источник. П — паводок; М — межень

Принимая во внимание порядок неоднородности и схемы строения пластов, выделяют [11, 38] потоки с однородной и квазиоднородной (условно однородной), упорядоченной (закономерно изменяющейся) и неоднородной средами. В потоках первой группы элементы неоднородности как самостоятельные не проявляются, а в потоках второй и третьей — влияют на гидродинамическую структуру и мерность потока.

Фильтрационные свойства пласта могут проявляться по-разному в зависимости от направления движения воды в нем, поэтому выделяют потоки с изотропной и анизотропной средами. В последнем случае k или T меняются различно по направлению осей координат (рис. 5.5).

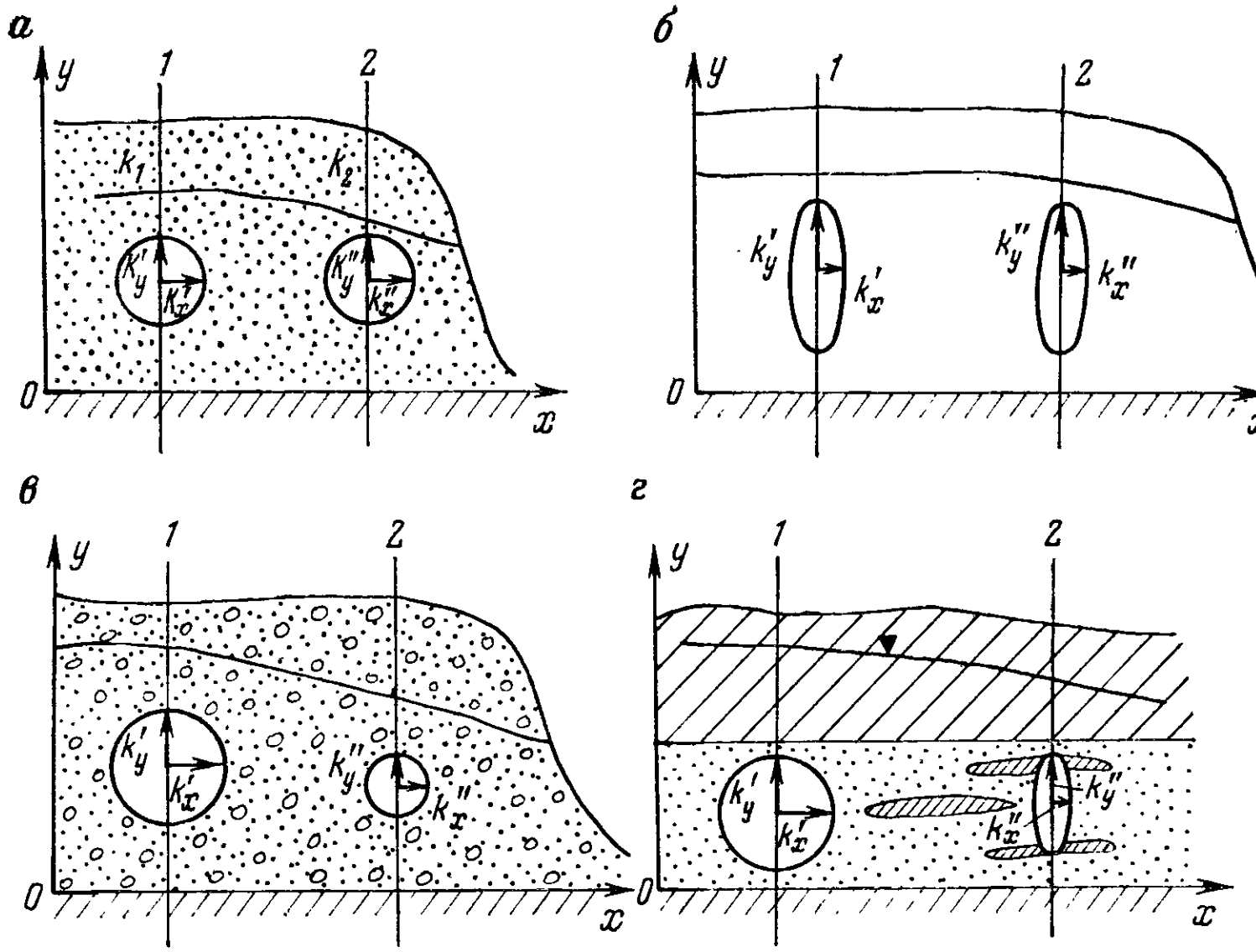


Рис. 5.5. Гидродинамические особенности и виды потоков, выделяемые по строению фильтрационной среды с учетом направления движения:

а — поток с изотропной однородной средой ($k'_x = k'_y$, $k''_x = k''_y$, $k_1 = k_2$); *б* — поток с анизотропной однородной средой ($k'_x = k''_x$, $k'_y = k''_y$, но $k_x < k_y$); *в* — поток с изотропной закономерно неоднородной средой $\left(\frac{k'_x}{k'_y} = \frac{k''_x}{k''_y}, \text{ но } k_1 > k_2\right)$; *г* — поток с анизотропно неоднородной средой ($k'_x > k''_x$, $k'_y > k''_y$, $k_1 \neq k_2$)

Гидродинамические особенности и виды потоков в зависимости от формы, числа границ и вида граничных условий. Форма границ потока в плане и разрезе определяет его конфигурацию, мерность и структуру (см. разд. 4.5). Типы потоков показаны на рис. 4.1. Действие границ пласта на движение потока является относительным и зависит от длительности нестационарной фильтрации. Например, приток воды к скважине, работающей вблизи реки, в первое время не зависит от ее влияния, так как радиус влияния откачки меньше, чем расстояние до реки, но при длительной откачке река начинает влиять на приток воды к скважине (см. рис. 5.6).

По воздействию границ на движение подземных вод выделяют потоки: а) бесконечный, или неограниченный (все границы удалены практически в бесконечность и влияние на движение не оказывают); б) полубесконечный, или полуограниченный (имеется одна активно действующая граница); в) конечный, или ограниченный (все границы активно воздействуют на поток).

5.3. ПРИНЦИПЫ СХЕМАТИЗАЦИИ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ КРИТЕРИИ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ СХЕМАТИЗАЦИИ

Схематизация — сложный творческий процесс, требующий не только понимания физических основ изучаемых процессов, но и знания геолого-генетических основ формирования пространственной изменчивости свойств горных пород, умения вести геолого-структурный, литолого-фациальный и гидродинамический анализы.

Схематизация проводится в три этапа [11, 38]. *Первый* выполняется по результатам гидродинамического районирования и состоит в обосновании ГДС и выборе метода гидродинамических расчетов. *Второй* этап включает упрощение природных условий и составление исходной расчетной фильтрационной схемы (модели). Схематизированная область представляется в виде специальных карт и (или) разрезов, на которых условными знаками показаны схематизированные основные элементы исследуемого объекта: а) размеры исследуемой области и конфигурация ее границ; б) строение пласта и значение расчетных параметров; в) типы граничных условий и принятые законы их изменения в плане и разрезе; г) факторы прогноза, т. е. те факторы, которые обусловливают возникновение нестационарного процесса (режим работы водозаборных скважин, каналов и т. п.). Специальным знаком отмечается степень изученности всех элементов схемы. Оценивается погрешность принятых упрощений. *Третий* этап — это вычислительная схематизация, в процессе которой принятые гидрогеологические элементы фильтрационной схемы упрощаются и перестраиваются в той форме, которая отвечает принятому методу расчета. При использовании аналитических методов третий этап совмещается со вторым, и упрощение условий ведется так, чтобы в результате получить типовую расчетную схему, имеющую математическое решение в виде уравнения. При использовании моделирования третий этап оказывается весьма содержательным, и по его результатам фильтрационная схема превращается в вычислительную модельную. Этот этап рассмотрен в гл. 7 при описании численных методов решения задач динамики подземных вод.

Геофильтрационная схематизация проводится в такой последовательности: вначале оцениваются размеры среды взаимодействия и режим фильтрации, потом мерность и структура потока, затем устанавливаются тип водообмена, схема строения пласта и действующие граничные условия.

Определение эффективных размеров сферы взаимодействия. Область, в пределах которой предполагается вести математический анализ движения подземных вод, является сложной сферой воздействия естественных границ и инженерных сооружений на поток как некоторый объем гидролитосферного пространства (см. разд. 1.1). Для проведения расчетов необходимо знать эффективные размеры сферы воздействия. Под эффективными размерами $R_э$ будем понимать ту часть потока подземных вод, в пределах которой сказывается влияние основных границ или других факторов, формирующих исследуемый процесс фильтрации. В качестве критериев оценки при

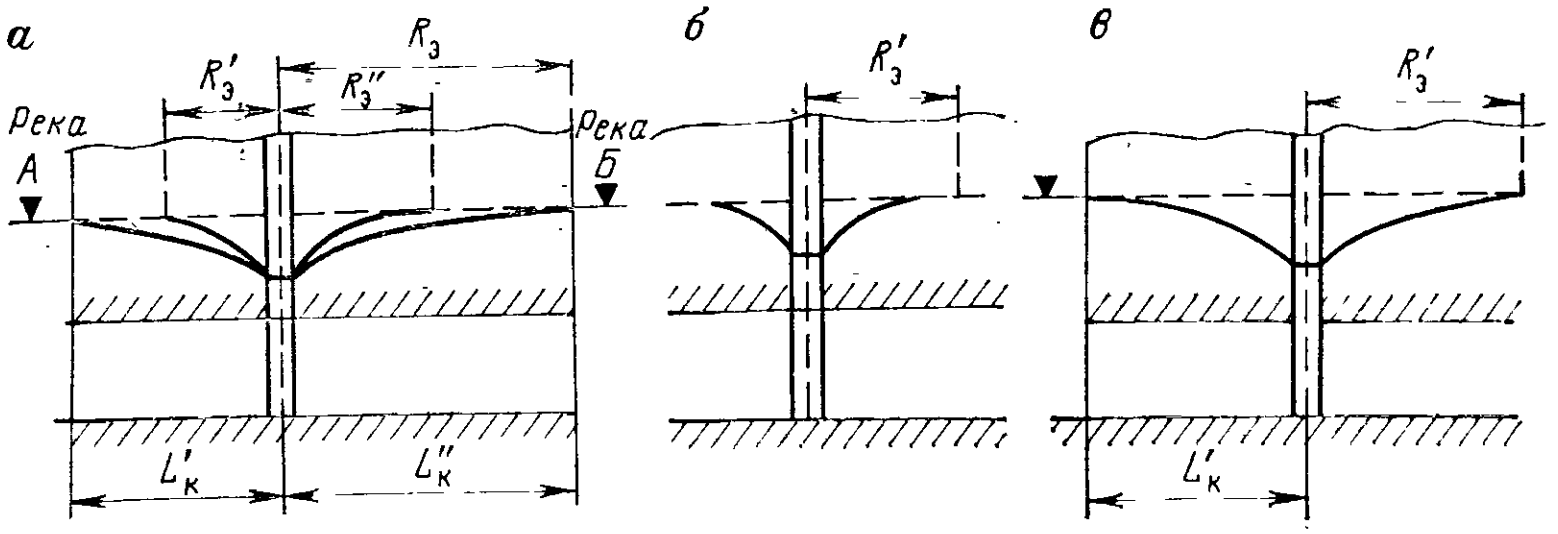


Рис. 5.6. Схема оценки эффективных размеров сферы влияния скважины.

Расчетные схемы пласта: *а* — огранченный, прн $L''_к \leqslant R_э \geqslant L'_к$; *б* — неограниченный, прн $R_э < L''_к, L'_к$; *в* — полуограниченный, прн $L''_к > R_э > L'_к$. $L'_к$ и $L''_к$ —расстояния до внешних границ (рек)

нимают некоторые заданные значения расстояний, расходов потока и времени длительности процесса. Например, сопоставляя числовые значения $R_э$ с расстояниями $L_к$ до внешних границ потока (рис. 5.6, *а*), принимают пласт неограниченным (см. рис. 5.6, *б*), а боковые границы — удаленными в бесконечность, если для всех границ выполняется условие

$$R_э < L_к. \tag{5.3}$$

Пласт считают полуограниченным (см. рис. 5.6, *в*), если для одной границы, или ограниченным (см. рис. 5.6, *а*), если для двух и более границ, выполняется условие

$$R_э \geqslant L_к. \tag{5.4}$$

При плоско-вертикальной фильтрации в разрезе рассматривается влияние на поток водоупорных ложа и кровли водоносного горизонта (рис. 5.7). При притоке воды к скважинам принимают в качестве критерия мощность пласта m. Если выполняются условия

$$C \leqslant 0{,}3m \text{ и } C_1 \leqslant 0{,}3m \tag{5.5}$$

(где C и C_1 — соответственно расстояния от верхней и нижней границ фильтра до водоупора), то пласт принимают ограниченным по мощности (см. рис. 5.7, *а*), а фильтр считают расположенным вблизи водоупорных границ, которые оказывают влияние на приток воды к скважине с фильтром длиной l. Если не выполняется одно из условий (5.5) для C или для C_1, то пласт считают полуограниченным по мощности, а фильтр — находящимся вблизи нижнего или верхнего водоупора (см. рис. 5.7, *б*) соответственно. Если оказывается, что

$$C \gg 0{,}3m, \; C_1 \gg 0{,}3m, \tag{5.6}$$

то пласт по мощности принимают неограниченным (см. рис. 5.7, *в*).

Математические выражения $R_э$ зависят от характера исследуемого процесса и определяются из уравнений, описывающих данный процесс (см. гл. 10, 13, 14).

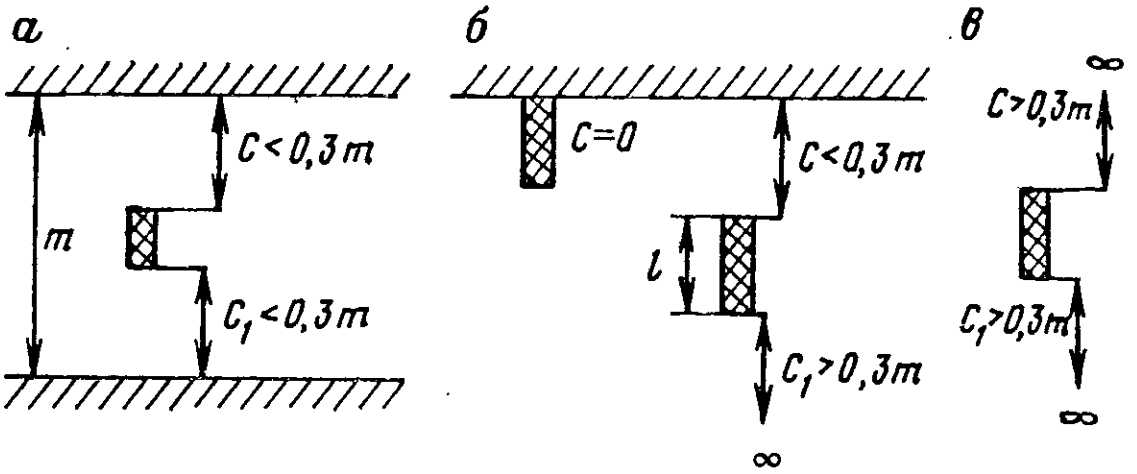


Рис. 5.7. Схемы потоков по расположению в пласте фильтров несовершенной скважины:
а — ограниченного; *б* — полуограниченного; *в* — неограниченного

Упрощение режима фильтрации. Под упрощением режима фильтрации понимают сведение нестационарной фильтрации к стационарной или квазистационарной, что облегчает последующие расчеты. Такая замена выполняется по критерию Фурье или $F_0 = at/L^2$ или $F_0 = at/R^2$, из которого для заданных размеров области фильтрации определяют время $t_р$, начиная с которого значения уровней или расходов практически не отличаются от аналогичных значений, отвечающих стационарным или квазистационарным условиям. Значения F_0 устанавливаются с помощью специального математического анализа (см. ч. II).

Например, для плоскорадиальной фильтрации, когда скважина работает с постоянным дебитом на расстоянии L от реки, а на ее урезе задано условие $H_р = \text{const}$, время наступления стационарной фильтрации определяется по зависимости

$$t_р \geqslant 10L^2/a. \tag{5.7}$$

Для плоскопараллельной фильтрации время $t_р$, начиная с которого неустановившийся уровень и расход потока в любой точке пласта при $x \leqslant 0{,}75\ L_к$ отличаются от соответствующих значений при установившейся фильтрации не более чем на 5 %, находится по зависимости

$$t_р \geqslant 0{,}5L_к^2/a. \tag{5.8}$$

Следует отметить, что в рассмотренных случаях величина $t_р$ выступает как эффективный размер сферы взаимодействия по времени проявления стационарности процесса.

Если текущее время

$$t \geqslant t_р, \tag{5.9}$$

то все точки области фильтрации, где это условие соблюдается, принадлежат к сфере взаимодействия со стационарным режимом фильтрации.

Квазистационарная (или почти стационарная) фильтрация обладает важными гидродинамическими особенностями: а) несмотря на продолжающееся в этой зоне снижение (повышение) уров

ней воды форма кривой депрессии (пьезометрической поверхности) не изменяется, что указывает на независимость от времени распределения уклонов по кривой депрессии; б) разность понижений уровня между двумя точками на этой кривой от времени не зависит; в) ширина этой зоны со временем увеличивается. Таким образом, в зоне квазистационарной фильтрации движение потока приобретает основные черты стационарной фильтрации и математическое исследование ее становится проще.

Чтобы в зоне радиусом $r_{кв}$ от источника возмущения (например, от скважины, из которой идет откачка) заменить нестационарную фильтрацию на квазистационарную, находят время $t_р$, начиная с которого такая замена возможна,

$$t_р \geqslant 2{,}5r^2_{кв}/a \qquad (5.10)$$

или, наоборот, определяют для заданного расчетного времени $t_р$ размер зоны квазистационарной фильтрации $r_{кв}$, где соблюдается условие

$$r_{кв} \leqslant 0{,}63\sqrt{at_р}\,. \qquad (5.11)$$

В этих случаях $r_{кв}$ и $t_р$ — эффективные показатели сферы взаимодействия по размерам и времени проявления квазистационарности процесса. Оценка параметров этой сферы по условиям (5.10) и (5.11) дает в последующих расчетах понижений уровня воды по соответствующим формулам погрешность не более 6 %. Изменяя величину погрешности, можно получить другие значения критериев. В гл. 13 будет дано теоретическое обоснование всем этим критериям.

Схематизация структуры и формы потока. Для упрощения структуры и мерности потока пространственную фильтрацию приводят к более простой, плановой, плосковертикальной или к фрагменту с одномерной линейной или радиальной фильтрацией. Для этого анализируют гидродинамическую сетку потока, характер распределения в ней векторов скорости фильтрации и их преобладающее положение относительно горизонтальной и вертикальной плоскостей движения. Схематизация заключается в уменьшении числа проекций вектора скорости фильтрации и упрощении его положения в пространстве.

Упрощение выполняется следующими способами [38]: а) пренебрежением некоторыми составляющими скорости фильтрации по координатам пространства; б) спрямлением контуров внешних и внутренних границ; в) выбором соответствующей системы координат; г) введением в расчетную схему показателя, оценивающего дополнительные потери напора (дополнительное сопротивление), связанные с деформацией потока вследствие гидродинамического несовершенства его границ; д) разделением потоков на ленты тока.

Если длина L и ширина B изучаемой области существенно больше мощности пласта m, то пренебрегают изменением скорости фильтрации по вертикали и от пространственной фильтрации переходят к плановой. Если ширина $\Delta L_{нд}$ зоны деформации потока (сфера влияния его несовершенных границ) удовлетворяет условию

$$\Delta L_{нд} \leqslant 0{,}1L, \qquad (5.12)$$

(где L — длина потока), то влиянием этой зоны на движение подземных вод пренебрегают и поток на всей длине считают совершенным. Величина $\Delta L_{нд}$ для потоков с однородным строением и мощностью до 100 м согласно М. Маскету [8] примерно равна мощности $\Delta L_{нд} \approx m$, при неоднородном строении $\Delta L_{нд} \geqslant (2—3)\ m$ [54].

Спрямлением границ пласта плановую фильтрацию приводят к плоскопараллельной одномерной или радиальной. В первом случае представляют урезы рек или водохранилищ в виде прямых линий, а во втором сложную по контуру, но изометрическую в плане площадь $F_ф$ потока заменяют на эквивалентную круговую, определяя ее радиус по формуле

$$R_0 = \sqrt{F_ф/\pi}. \tag{5.13}$$

При упрощении линейных размеров границ соблюдают эквивалентность длин фактического $L_ф$ и расчетного $L_р$ контуров.

Во всех случаях показатели $\Delta L_{нд}$, R_0 и $L_р$ выступают как параметры сферы взаимодействия с заданными структурой и мерностью потока.

По форме схематизированных границ выделяют пласт-круг, пласт-полосу (с двумя прямолинейными границами), пласт-квадрант (границы образуют прямой угол), пласт-угол и т. п. (см. рис. 4.1).

Зависимость структуры потока от выбора системы координат уже рассматривалась в разд. 4.5. Более сложно упрощение структуры потока введением в расчетную схему некоторых показателей. Такое упрощение базируется на двух гидродинамических свойствах потока: 1) зона резкой деформации потока является локальной, за ее пределами структура потока всегда более проста; 2) гидродинамическая структура потока позволяет делить его на фрагменты, каждый из которых характеризуется своей величиной фильтрационного сопротивления движению воды в нем. Эти фильтрационные сопротивления (на основе аналогии между законами Дарси и Ома) можно складывать по правилам электрических цепей (см. гл. 14).

Как же следует делить поток на фрагменты, чтобы структура его упрощалась? Для решения вопроса сравним гидродинамические сетки несовершенных потоков (см. рис. 4.1, *к*, *л*) с аналогичными сетками для совершенных потоков (например, см. рис. 4.1, *б*, *е*). Сопоставление показывает, что деформация потока вблизи несовершенной границы вызывает удлинение линий тока и, следовательно, дополнительное увеличение потерь напора на этом участке, что эквивалентно росту сопротивления потока. Структуру несовершенного потока можно упростить по правилу сложения сопротивлений для последовательных цепей: распространить на всю длину потока L более простую структуру его внешней (за зоной деформации) части, т. е. принять поток совершенным на всей длине L, и считать, что этой длине отвечает некоторое сопротивление потока, а влияние зоны деформации учесть удлинением потока на величину $\Delta L_{нд}$. Тогда расчетную длину потока можно определить так:

$$L_р = L + \Delta L_{нд}, \tag{5.14}$$

где $\Delta L_{нд}$ — показатель гидродинамического несовершенства (в метрах), определяемый расчетом по аналитическим зависимостям, а в сложных случаях — методом моделирования. Методика этих определений изложена в работах [17, 54]. Если согласно зависимости (5.14) $\Delta L_{нд} \leqslant 0{,}1\ L$, то реальная длина потока не изменяется и влиянием зоны деформации можно пренебречь.

Схематизация источников формирования водного баланса потока. Упрощение предполагает уменьшение числа источников формирования водного баланса в расчетной схеме на основе использования к о э ф ф и ц и е н т а в о д о о б м е н а $k_{во}$ [11, 38]. Коэффициент отражает соотношение средних значений единичных вертикального $q_в$ и горизонтального $q_г$ расходов на выбранном участке потока, которые определяются по формулам (4.12) и (3.4). Для двух гидравлически связанных через разделяющий слой (k_0, m_0) пластов имеем:

$$K_{во} = \frac{q_в}{q_г} = \frac{k_0 L^2 \Delta H^0}{m_0 T \Delta H} = \frac{L^2}{B^2} \frac{\Delta H^0}{\Delta H}, \qquad (5.15)$$

где T и ΔH — средняя водопроводимость и разность уровней воды в основном пласте на участке длиной L; ΔH^0 — средняя разность уровней основного и соседнего водоносного пласта, из которого идет перетекание (см. рис. 5.3, *в*); B — параметр перетекания $B = \sqrt{T m_0 / k_0}$.

При наличии инфильтрационного питания w коэффициент водообмена имеет вид

$$K_{во} = \frac{q^w}{q_г} = \frac{L^2}{B_w^2} \frac{1}{\Delta H}, \qquad (5.16)$$

где $q^w = wL$; B_w по аналогии может быть назван параметром инфильтрационного перетекания, $B_w = \sqrt{T/w}$. Подробнее этот вопрос рассмотрен в разд. 6.9.

Если $K_{во} \leqslant 0{,}1$, то в грунтовых водах можно пренебречь величиной инфильтрационного питания, а в многопластовой системе — вертикальным глубинным водообменом и считать, что связи между пластами нет, баланс потока определяется только соотношением уровней на его боковых границах. Если $K_{во} > 10$, то главные факторы формирования водного баланса потока — это глубинное перетекание или инфильтрационное питание, а боковые границы пласта в формировании баланса играют второстепенную роль и могут в расчетах не учитываться.

По величине $K_{во}$ различают [11]: 1) пласт с горизонтальным водообменом, $K_{во} \leqslant 0{,}1$ (изолированный); 2) пласт с горизонтально-вертикальным водообменом, $10 > K_{во} > 0{,}1$; 3) пласт с активным вертикальным водообменом $K_{во} \geqslant 10$.

Схематизация геофильтрационной неоднородности и строения потока. Схематизация геофильтрационной неоднородности и строения потока — это упрощение его гидрогеологической структуры. Неоднородное, анизотропное строение заменяется условно однородным, изотропным или закономерно неоднородным. Схематизация прово-

дится на основе геолого-генетического и литолого-фациального анализов с учетом соотношения размеров элементов неоднородности $R_н$ и сферы взаимодействия $R_э$ согласно схемы, приведенной на рис. 5.8.

Не претендуя на универсальность, можно указать следующую последовательность схематизации.

1. Выявляется пространственная изменчивость фильтрационных свойств. Для этого на основании близости литолого-фациального состава, общности геолого-структурных и геоморфологических условий выделяются типовые в фильтрационном отношении зоны или слои (мега- и макронеоднородность), для каждой зоны (или слоя) устанавливаются числовые значения m, k, T.

2. В пределах каждой зоны, слоя оценивается возможность сведения неоднородной среды к условно однородной, что отвечает процедуре выделения однородного в фильтрационном отношении гидрогеологического элемента. Предварительную оценку выполняют по критерию (4.36). Если условие выполняется, то геофильтрационную среду в пределах выделенной зоны или толщи считают условно однородной, а расчетное значение k или T вычисляют как среднее арифметическое или как среднее взвешенное по формулам (4.20) и (4.20а). При достаточном объеме исходной информации правомерность выделения однородного гидрогеологического элемента подтверждается статистической обработкой данных [11, 57]. Если для многослойной системы удовлетворяются условия (4.32) или (4.34), то она принимается за многопластовую. Согласно рекомендациям [6, 54] при допустимой погрешности в расчетных значениях уровней воды $\varepsilon_{доп} = 0{,}05$ слабопроницаемым (покровным) слоем в двухслойном пласте можно пренебречь, начиная с

$$t_р = 6\frac{\mu_в m_п}{k_п}, \qquad (5.17)$$

где $\mu_в$, $m_п$, $k_п$ — средние значения водоотдачи, мощности и коэффициента фильтрации водоносной части покровного слоя (см. рис. 5.2, схема *а*, II).

3. В пределах исследуемой области фильтрации устанавливают геометрические размеры элементов неоднородности $R_н$ и преобладающие размеры сферы взаимодействия (зоны влияния границ пласта или инженерного сооружения) $R_э$. Для инженерных сооружений значения $R_э$ могут быть приняты следующими (в м): для крупных сооружений (водозаборы, массивы орошения) $R_э \geqslant n\cdot 10^4$, для кустовых откачек $10^2 < R_э < 10^4$, для одиночных откачек $1 < R_э < 10$. Размеры элементов неоднородности $R_н$ принимаются (в м): мега $R_н > n\cdot 10^3$; макро $10 < R_н < 10^3$; мезо $10^{-1} < R_н < 10$; микро $R_н < 10^{-1}$.

По отношению $R_э/R_и$ можно выделить три типа геофильтрационной среды (рис. 5.8) [11, 38]: 1) однородную и квазиоднородную $R_э/R_н > 10^2$ или $R_э/R_н < 10^{-1}$; 2) закономерно неоднородную $10 < R_э/R_н < 10^2$ или $10^{-1} < R_э/R_н < 1$; 3) неоднородную $1 < R_э/R_н < 10$.

В последней группе на движение подземных вод оказывают влияние мега- и макронеоднородности, и эти элементы должны быть пред-

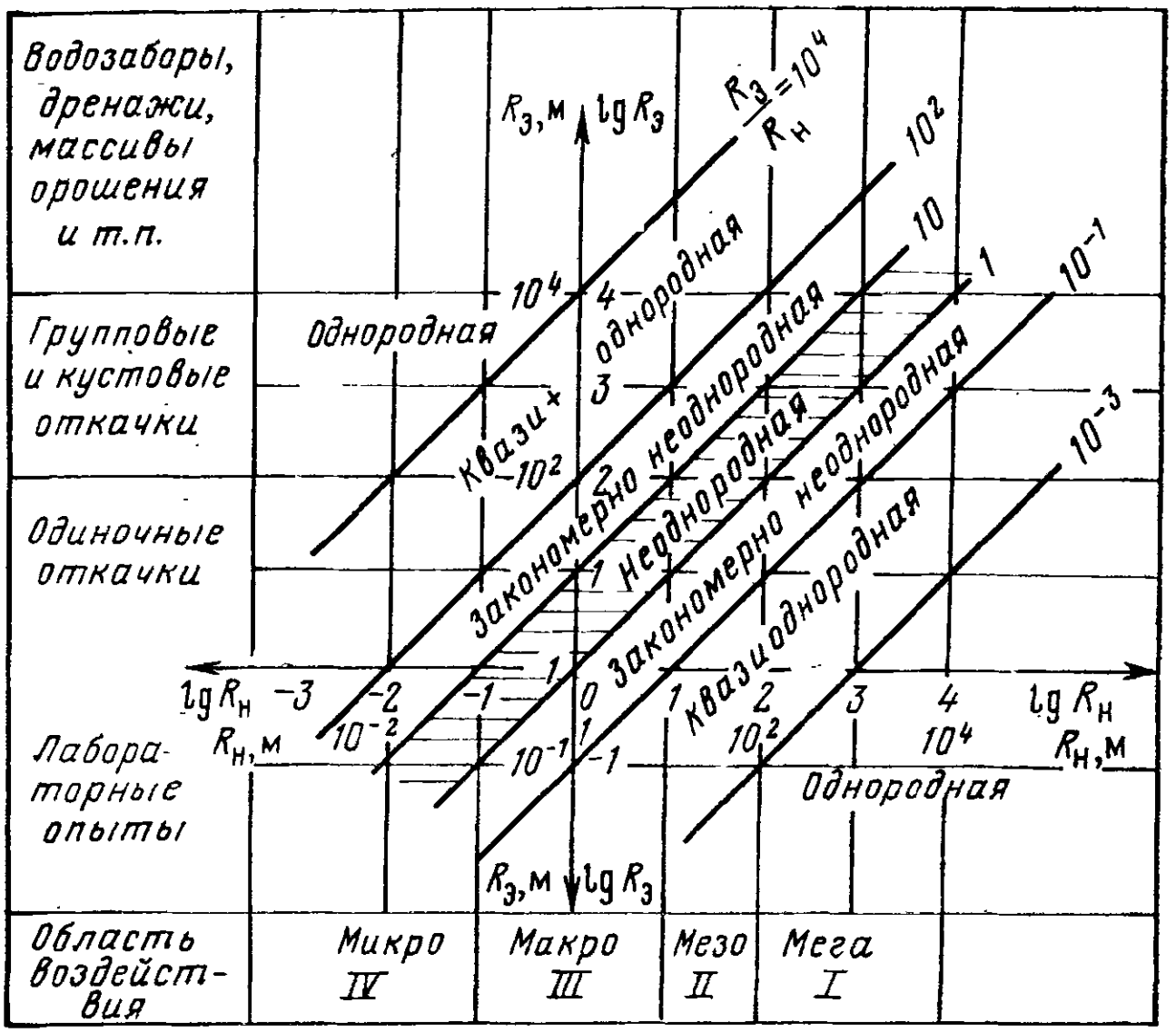


Рис. 5.8. Схема определения типов строения фильтрационной среды при схематизации фильтрационных свойств пласта

ставлены в гидрогеологической структуре ГДС. Во второй группе на движение подземных вод оказывают влияние и мезонеоднородности, которые должны быть оставлены в схеме строения пласта. Это означает, что строение пласта не усредняется, а отображается типовыми схемами закономерно неоднородного строения (см. рис. 5.4). В первой группе элементы неоднородности себя как самостоятельные элементы структуры потока не проявляют, и вся область «работает» как однородная.

Относительность понятия неоднородности среды приводит к тому, что для одного и того же потока подземных вод в зависимости от целевого назначения расчетов (опытная откачка, прогноз работы крупного водозабора) строят разные по типу геофильтрационной среды расчетные схемы и модели.

Схематизация граничных и начальных условий. При математических расчетах с применением аналитических зависимостей упрощение закона действующих граничных условий может быть значительным; для методов моделирования такой схематизации не требуется. Упрощение заключается в том, что мало изменяющиеся (относительно среднего) значения уровней и расходов принимают за постоянные, сложные по форме графики изменения H и Q заменяют на ступенчатые или изменяющиеся по какому-либо геометрическому закону (прямой линии, по параболе и т. п.).

5.4. ПОНЯТИЕ О РАСЧЕТНОЙ СХЕМЕ

Завершив схематизацию, анализируют полученные частные (по каждому фактору) расчетные схемы и суммируют их в единую, которую представляют в виде карт и разрезов, на которых отображают все принятые в расчет элементы. Последовательность построения математической модели показана на рис. 5.1. Принятые упрощения вносят погрешности в результаты расчетов, поэтому должна быть оценена достоверность расчетных схем и математических моделей. Этапы, на которых возникают погрешности, показаны на рис. 5.1. Каждому из них отвечает свой вид погрешностей. Оценка погрешностей схематизации имеет большое значение, так как ошибки, сделанные при переходе от природных условий к расчетной схеме, нередко обусловливают появление в расчетах значительно большей погрешности, чем ошибки, зависящие от применения того или иного метода расчета.

Под гидрогеологической достоверностью модели (схемы) понимают [11] меру ее сходства с реальным объектом по гидрогеологической и гидродинамической структурам, а также по ответным реакциям на внешние воздействия, т. е. изменениям пьезометрических уровней и расходов под влиянием, например, откачек, орошения и т. п. Различают два вида моделей: *аналогичные и функциональные*. Первые с высокой мерой сходства отображают реальный объект по всем основным («белый» ящик) элементам; вторые могут мало походить на объект по гидрогеологической и гидродинамической структурам, но обладают той же реакцией на все внешние возмущения, что и объект («черный» ящик). Надежность расчетов на этих моделях не одинакова.

Сходство ответных реакций на одинаковые внешние воздействия модели и объекта — это один из главных принципов, на основе которых оценивается качество построенной модели. Общее представление о достоверности выполненной схематизации и надежности «работы» построенной модели можно получить [11] двумя путями. Первый основан на выполнении так называемого эпигнозного моделирования (или решении обратных задач, см. гл. 6). Суть его заключается в том, что на построенной модели воспроизводят имеющийся опыт эксплуатации сооружения (например, водоотбор из скважин). Близость модельных состояний ГДС к натурным, зафиксированным данными режимных наблюдений, и является показателем качества модели и правомерности принятых при схематизации допущений. Второй путь основан на факторно-диапазонном анализе, при котором последовательно решают тестовые прогнозные задачи и оценивают изменения, которые обусловлены в результатах прогноза каждым из принятых упрощений. Затем делают вывод о правомерности выполненной схематизации и возможной точности прогнозных расчетов.

Таким образом, гидродинамическое районирование и схематизация гидрогеологических условий — это неотъемлемая часть гидродинамического анализа. Они способствуют правильному пониманию результатов математических расчетов при решении гидрогеологических задач.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем различие типизации и схематизации гидрогеологических условий? Есть ли сходство?
2. Каковы задачи схематизации?
3. Какую роль играет знание гидродинамических особенностей потоков в процессе схематизации?
4. Какими гидродинамическими особенностями различаются грунтовые и напорные потоки, что такое субнапорные потоки?
5. Что такое коэффициент водообмена и какие виды потоков на его основе можно выделить? Какими гидродинамическими особенностями они различаются?
6. Какое толкование имеет термин «неоднородность»? Что такое порядок неоднородности? В чем заключается относнтельность математического понятия «неоднородность среды»?
7. Назовите основные виды упорядоченной неоднородности.
8. Раскройте содержание трех этапов схематнзации; в какой последовательности она выполняется?
9. Что такое сфера взаимодействия и ее эффективные размеры? Приведите примеры.
10. Какое содержание вкладывается в понятие «сфера взаимодействия по квазистационарности процесса»? Как определить ее эффективный радиус действия?
11. Перечислите приемы, с помощью которых можно упростить структуру и мерность потока.
12. Назовите последовательность, в которой выполняется схематизация геофильтрационной неоднородности и строения пласта.
13. Назовите критерий, с помощью которого слоистая толща может быть схематизирована в виде условно однородного пласта.
14. Какую роль играет величина отношения $R_э/R_н$ при схематизации строения пласта?
15. На каких этапах построения модели возникают погрешности? Попытайтесь раскрыть содержание этих погрешностей.
16. Что понимают под гидрогеологической достоверностью модели?
17. Если на рис. 5.3, II $\omega_a = 0$, то какой вид примет эпюра расходов?
18. Внимательно проанализируйте схемы *в* и *г* на рис. 5.4, нарисуйте для них эпюры изменения коэффициентов фильтрации (или водопроводимостей) пласта и отвечающие им эпюры изменения напорных градиентов потока. Какому критерию должна удовлетворять структура потока, показанная на рис. 5.4, *б*?

Глава 6

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД В ГГС

6.1. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ПРИ ВЫВОДАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

При выводах дифференциальных уравнений фильтрации принимаются следующие допущения: 1) элементарный объем пласта считается постоянным, т. е. $dV = \text{const}$, размеры пор и трещин малы по сравнению с ним и во внимание не принимаются. Геофильтрационная среда в этом объеме рассматривается как сплошная со статистически усредненными параметрами, для которых известен переход к их значениям во всем рассматриваемом объеме пласта; 2) объем dV бесконечно мал по отношению к рассматриваемой области фильтрации, но является представительным по определенным свойствам и состоя-

ниям (см. разд. 2.7); 3) закон Дарси справедлив, силами инерции обычно пренебрегают, ось x совмещается не с плоскостью падения слоев, а с проекцией их на горизонтальную плоскость; 4) исследуемая область принимается непрерывной, что соответствует условию существования в каждой ее точке производной искомой функции по координатам пространства и времени; 5) фильтрация воды в пластах горных пород рассматривается как механическое движение, и физико-химические взаимодействия между водой и горной породой во внимание не принимаются.

При выводе дифференциальных уравнений фильтрации используют два подхода: балансовый (физический), при котором рассматривается водный баланс выделенного элементарного объема пласта и его составляющие, и аналитический (математический), при котором дифференциальное уравнение фильтрации выводится из совместного рассмотрения трех систем уравнений: неразрывности, движения воды и состояния фильтрационной среды. Основные уравнения движения представлены зависимостями (4.1) или (4.4). Если рассматривается плановая фильтрация, то с учетом формул (2.7) и (3.7) зависимость (4.4) для пласта, насыщенного водой плотностью γ, принимает вид

$$v_x = -\frac{k_п \gamma}{\mu_д}\frac{\partial (p/\gamma)}{\partial x} = -\frac{k_п}{\mu_д}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad v_y = -\frac{k_п}{\mu_д}\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{6.1}$$

В настоящее время одновременно с детерминированным подходом развивается и более сложный, основанный на вероятностном представлении процессов движения воды в пластах земной коры [4, 31, 40].

В зоне активного проявления гидростатического давления используется модель несжимаемой жидкости в недеформируемой (несжимаемой) среде, и уравнениями ее состояния являются зависимости (3.29). Такая модель принимается при изучении стационарного и нестационарного движений грунтовых вод, когда упругими свойствами воды и скелета породы пренебрегают в силу их малости. Аналогично поступают при изучении напорных вод в условиях стационарного движения.

Нестационарная фильтрация связана с проявлением упругих свойств воды и породы. В этом случае уравнения состояния представляются в виде соотношений (3.30); (3.31) и (3.32).

6.2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ ПОТОКА

Выделим в водонасыщенном пласте малый элемент пространства (рис. 6.1) с объемом $dV = mdxdy = \text{const}$ (где $F = dxdy$ — площадь, m — мощность пласта) и рассмотрим его материальный баланс за бесконечно малое время dt.

Обозначим через ρv_x и ρv_y компоненты массовой скорости фильтрации по направлению осей x и y, причем будем считать эти скорости положительными, если они ориентированы по направлению осей. Массовый расход потока, поступивший за время dt в рассматриваемый элемент по оси x, равен: $M_x = \rho v_x mdydt$. При выходе из элемента

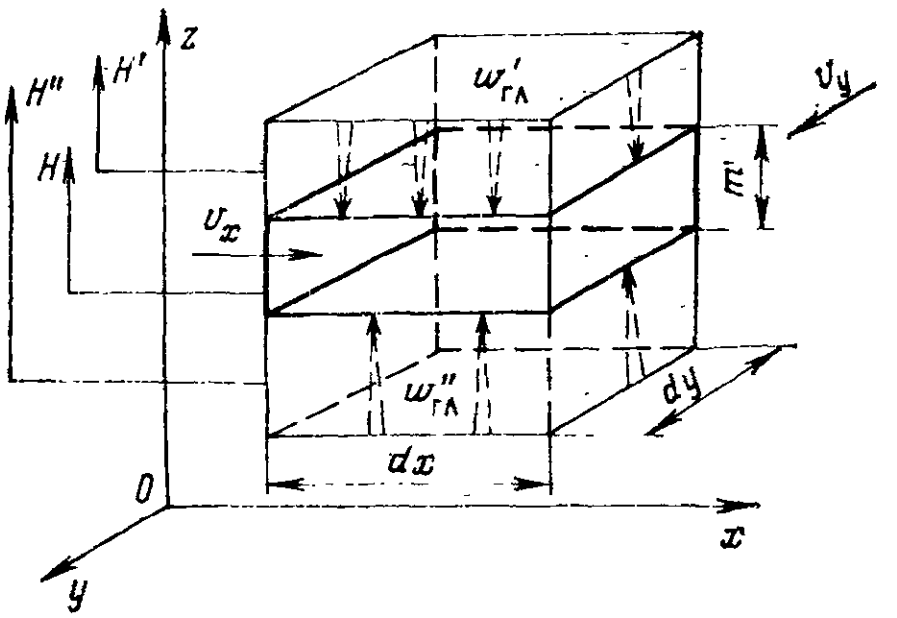


Рис. 6.1. Схема к выводу уравнения неразрывности

он получает приращение $M_x + dM_x$, в котором $dM_x = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} mdxdydt$. Аналогично по оси y $dM_y = \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} mdydxdt$. Эти изменения приводят к тому, что масса воды, содержащаяся в элементе объемом dV и равная $M_t = \rho dV_{пор} = \rho n dV$ за время dt получает приращение $dM_t = \frac{\partial M_t}{\partial t} dt = \frac{\partial(n\rho)}{\partial t} mdxdydt$ (имея в виду, что $dV = \text{const}$).

Исходя из того, что суммарное приращение массы воды при прохождении потока по различным направлениям через рассматриваемый элемент должно компенсироваться изменением количества воды в нем (при отсутствии дополнительных внутренних источников и стоков), запишем

$$M_x - (M_x + dM_x) + M_y - (M_y + dM_y) = dM_t. \qquad (6.2)$$

Подставив в уравнение (6.2) выражения для dM_x, dM_y и dM_t и проведя соответствующие сокращения, получим уравнение неразрывности планового потока в виде

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = -\frac{\partial(n\rho)}{\partial t}. \qquad (6.3)$$

Для несжимаемой среды при $n = \text{const}$ и $\rho = \text{const}$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \qquad (6.4)$$

В гетерогенно-блоковых или многопластовых системах уравнение неразрывности составляют для типового макроэлемента, границы которого выбирают с учетом характера движения. Рассмотрим слоистую систему, изображенную на рис. 6.2, считая, что выполнены предпосылки перетекания (4.34) и в хорошо проницаемом слое фильтрация развивается только в горизонтальном направлении, а в разделяющих слоях — в вертикальном. Расчетный элемент (см. рис. 6.1) имеет площадь $F = dxdy$, высоту m и два слоя с перетеканием $w''_{гл}$ и $w'_{гл}$. Составляя подобно предыдущему выводу для этого столбика пласта

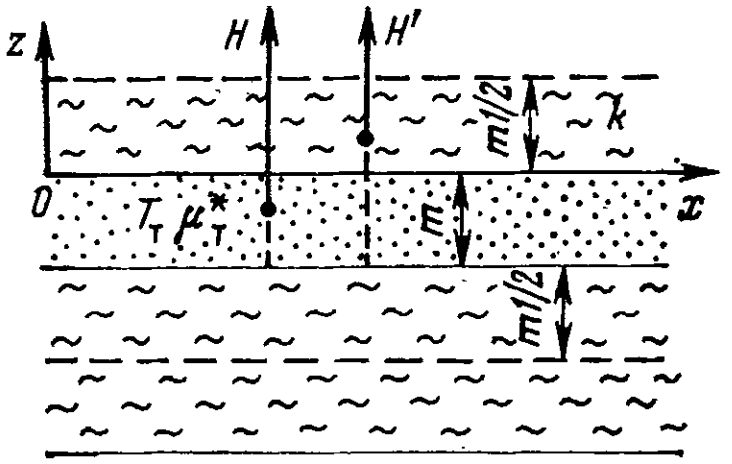


Рис. 6.2. Слоистая водоносная система, заменяющая гетерогенно-блоковую породу с двойной емкостью (по В. М. Шестакову)

уравнение неразрывности жидкой фазы, учтем поступление массы жидкости через кровлю и подошву пласта:

$$dM_1^w = w'_{гл}\rho dxdydt;\ dM_2^w = w''_{гл}\rho dxdydt, \tag{6.5}$$

где $w'_{гл}\rho$ и $w''_{гл}\rho$ — нормальные к напластованию массовые скорости фильтрации в разделяющих слоях на их контактах с водоносным слоем (соответственно в кровле и подошве). В этом случае в уравнение баланса (6.2) добавляем в левую часть выражения dM_1^w и dM_2^w по (6.5); после преобразований уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{\partial(\rho m v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho m v_y)}{\partial y} + (w'_{гл} - w''_{гл})\rho = -\frac{\partial(nm\rho)}{\partial t} \tag{6.6}$$

Уравнение (6.6) справедливо и для гетерогенно-блоковой среды с двойной емкостью, если представить ее равномерно слоистым пластом, состоящим из хорошо проницаемых слоев, имитирующих трещины, и слабопроницаемых — имитирующих пористые блоки [54].

Задача. Получить уравнение неразрывности потока грунтовых вод мощностью $h_{ср} = \text{const}$, имеющего инфильтрационное питание, интенсивностью $w_э$, для случая сжимаемой и несжимаемой среды.

6.3. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В случае стационарной фильтрации в уравнении (6.3) $\frac{\partial(n\rho)}{\partial t} = 0$. Если считать жидкость несжимаемой и однородной по составу, то ρ можно вынести за знак производных и уравнение (6.3) примет вид (6.4). Подставляя выражения для v_x и v_y из формулы (4.1) в (6.4), получим искомое дифференциальное уравнение стационарной фильтрации планового потока

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial H}{\partial y}\right) = 0, \tag{6.7}$$

которое относится к классу эллиптических уравнений математической физики.

В однородно-изотропных пластах коэффициенты фильтрации $k_x = k_y = \text{const}$ могут быть вынесены в выражении (6.7) за знак производных, а распределение напоров описывается уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0. \tag{6.8}$$

В однородно-анизотропных пластах значения k_x и k_y по осям различны, но постоянны по данному направлению, поэтому уравнение (6.7) принимает вид

$$k_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0. \tag{6.9}$$

Оно может быть приведено к уравнению Лапласа путем линейного преобразования координат. Примем коэффициент анизотропии в соответствии с выражением (2.27)

$$\lambda_x^2 = k_x / k_y. \tag{6.10}$$

Введем новые координаты $x_0 = \lambda_x x$ и $y_0 = y$.

Имея в виду, что

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda_x^2} \frac{\partial^2 H}{\partial x_0^2}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial y_0},$$

уравнение (6.9) представим как

$$\frac{k_x}{k_y \lambda_x^2} \frac{\partial^2 H}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y_0^2} = 0. \tag{6.11}$$

Подставляя в выражение (6.11) λ_x^2 по (6.10), получим после преобразования уравнение Лапласа в виде

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y_0^2} = 0. \tag{6.12}$$

При выводе уравнений (6.7), (6.8) и (6.12) не накладывалось ограничений на свойства среды, поэтому они справедливы для сжимаемых и несжимаемых пластов.

З а д а ч и. Вывести дифференциальное уравнение стационарной плановой фильтрации в однородно-изотропном пласте при наличии: а) перетекания через кровлю и подошву напорного пласта; б) инфильтрационного питания в грунтовых водах.

Отметим, что задачи с наличием вертикального водообмена относятся в теории фильтрации к задачам с в н е ш н и м и с т о ч н и к о м (если наблюдается уход воды из пласта вертикальным водообменом) или с т о к о м (если наблюдается поступление воды в пласт). Дифференциальное уравнение такой фильтрации в однородно-изотропном пласте называется уравнением Пуассона.

В о п р о с. Какими уравнениями состояния характеризуется фильтрация, если ее можно описать дифференциальным уравнением Дарси типа (4.6) или (4.8)?

6.4. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ УПРУГОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Получим дифференциальное уравнение нестационарной упругой фильтрации в напорном потоке, используя уравнения неразрывности, состояния (3.32) и движения (6.1). Правая часть в уравнении неразрывности (6.3) может быть представлена двояко в зависимости от

ного, будет учитываться изменение внешних нагрузок $P_{вн}$ и гидродинамического давления $P_д$ на кровлю пласта или нет [6, 8, 34].

Рассмотрим более простой случай, когда эти силы не учитываются. Состояние среды определяется уравнением (3.32).

Запишем уравнение (6.3) в виде

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}=-\left(n\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial n}{\partial t}\right). \tag{6.13}$$

Преобразуем выражение (6.13) так, чтобы вместо плотности ρ рассматривалось давление p. Для этого уравнения для v_x и v_y представим зависимостью (6.1) и учтем связь n и ρ с p по уравнению (3.32). Раскроем характер нелинейной связи ρ и p в уравнении состояния для воды. Для этого проинтегрируем уравнение (3.32) в пределах изменения давления от атмосферного $p_а$ до пластового p при соответствующем изменении плотности от ρ_0 до ρ и получим: $\ln \rho/\rho_0 = \beta_в (p-p_а)$ или $\rho = \rho_0 e^{\beta_в (p-p_а)}$. Разложим показательную функцию в ряд по степени:

$$e^{\beta_в (p-p_а)} = 1+\beta_в (p-p_а)+\frac{1}{2!}\cdot\beta_в^2 (p-p_а)^2+\ldots$$

Оценим точность, с которой можно отбросить все члены ряда, кроме первых двух. При $\beta_в = 5\cdot10^{-10}$ 1/Па и $p-p_а = 10^7$ Па (что соответствует глубинам залегания пластов до 2 км) имеем: $1+5\times\times10^{-10}\cdot10^7 = 1+5\cdot10^{-3}$. Следовательно, с точностью до 10^{-3} можно записать

$$\rho \approx \rho[1+\beta_в (p-p_а)]. \tag{6.14}$$

Найдем частные производные по времени от n и ρ, используя уравнения (3.32) и (6.12): $\frac{\partial n}{\partial t} = \beta_с \frac{\partial p}{\partial t}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0\beta_в \frac{\partial p}{\partial t}$. Подставив эти выражения и значения скорости фильтрации по формуле (6.1) в уравнение (6.13), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{k_п}{\mu_д}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho k_п}{\mu_д}\frac{\partial p}{\partial y}\right)=(n\rho_0\beta_в+\rho\beta_с)\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{6.15}$$

Принимая во внимание, что абсолютное изменение плотности незначительно (следовательно, можно считать $\rho \approx \rho_0$), и приняв пласт однородным по фильтрационным свойствам, вместо выражения (6.15) имеем:

$$\frac{k_п}{\mu_д}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y}\right)=(n\beta_в+\beta_с)\frac{\partial p}{\partial t} \tag{6.16}$$

Коэффициент $\beta^* = n\beta_в+\beta_с$ В. Н. Щелкачев [53] назвал коэффициентом упругой емкости породы [см. формулу (3.19)]. Имея в виду связь p с H, выражаемую зависимостью (2.7), получим

$$\frac{k_п}{\mu_д\beta^*}\nabla^2 H=\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{6.17}$$

где ∇^2 — символ, имеющий для плановой нестационарной фильтрации вид $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$.

В такой постановке с учетом упругих свойств воды и пород уравнение (6.17) было получено В. Н. Щелкачевым [53] применительно к нефтеводоносным пластам; с учетом только упругих свойств воды, т. е. при $\beta^* = \beta_в$, оно впервые получено Ч. Тейсом [8].

Умножим числитель и знаменатель левой части уравнения (6.17) на m и γ и с учетом зависимостей (3.7) и (3.24) получим дифференциальное уравнение упругой плановой нестационарной фильтрации в напорном водоносном пласте в декартовой системе координат:

$$\frac{T}{\mu^*}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{6.18}$$

В радиальной системе координат уравнение (6.18) при $a = T/\mu^*$ и $T = km$ имеет следующий вид:

$$a\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right) = \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{6.19}$$

где $\mu^* = m\beta^*\gamma$ — упругая водоотдача или упругая емкость пласта [см. формулу (3.25)].

Эти уравнения соответствуют известному в математической физике уравнению Фурье, или уравнению теплопроводности, и линейны относительно параметра a, но в точной постановке они нелинейны, так как ρ в общем случае зависит от изменения p, о чем свидетельствуют зависимость (3.32) и отмеченные выше свойства коэффициентов $\beta_в$ и β_c, меняющихся при изменении давления (см. гл. 3).

Если пласт однородно-анизотропный, а μ^* практически не зависит от преобразования вращения, то вместо уравнения (6.18) будем иметь:

$$T_x\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + T_y\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \mu^*\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{6.20}$$

Используя линейное преобразование координат $x_0 = \lambda_x x$, $y_0 = y$ и коэффициент анизотропии $\lambda_x^2 = T_x/T_y$, по аналогии со стационарной фильтрацией имеем:

$$\frac{T_x}{T_y\lambda^2 x}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y_0^2}\right] = \frac{\mu^*}{T_y}\frac{\partial H}{\partial t}$$

и после преобразования получаем

$$a_y\left[\frac{\partial^2 H}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y_0^2}\right] = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{6.21}$$

при

$$a_y = \frac{T_y}{\mu^*} = \frac{k_y m}{\mu^*}. \tag{6.22}$$

6.5. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРЕТЕКАНИЯ

Пусть для слоистой водоносной толщи, фильтрация которой удовлетворяет предпосылкам перетекания (4.34), уравнение неразрывности для элемента, показанного на рис. 6.1, описывается выражением (6.6). Основной пласт имеет мощность m и напор H. Наблюдается перетекание в пласт воды через верхний и нижний разделяющие слои с параметрами H^0, k_0, m_0, μ_0^* и H^{00}, k_{00}, m_{00}, μ_{00}^* соответственно. Если считать напоры H' и H'' в смежных водоносных пластах постоянными, то, преобразовывая уравнение (6.6) в дифференциальное, как это сделано в разд. 6.4, получим

$$T\nabla^2 H + (w'_{гл} - w''_{гл}) = \mu^* \frac{\partial H}{\partial t} \tag{6.23}$$

при $w'_{гл} = -k_0 \left.\frac{\partial H^0}{\partial z}\right|_{z=m_0}$

$$w''_{гл} = -k_{00} \left.\frac{\partial H^{00}}{\partial z}\right|_{z=0} \tag{6.24}$$

В выражении (6.24) напоры H^0 и H^{00} определяются уравнениями одномерной упругой фильтрации

$$\frac{\partial H^0}{\partial t} = \frac{T_0}{\mu_0^*} \frac{\partial^2 H^0}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial H^{00}}{\partial t} = \frac{T_{00}}{\mu_{00}^*} \frac{\partial^2 H^{00}}{\partial z^2}. \tag{6.25}$$

В общем случае, если в процессе перетекания изменяются в соседних пластах еще и уровни H' и H'', система уравнений оказывается достаточно сложной. В этом случае в систему уравнений (6.23) — (6.25) включаются еще два уравнения вида (6.23), записанные для смежных водоносных горизонтов [6]. На практике обычно принимаются следующие упрощения.

1. Раздельные слои считают несжимаемыми, т. е. μ_0^* и $\mu_{00}^* \to 0$, поэтому уравнения (6.25) исключаются, а (6.24) упрощаются:

$$w'_{гл} = k_0 \frac{H' - H}{m_0}; \quad w''_{гл} = k_{00} \frac{H'' - H}{m_{00}}. \tag{6.26}$$

2. При $T', T'' > T$ уровни в смежных водоносных горизонтах считают постоянными. В этом случае система ограничивается уравнениями (6.23) и (6.25), а на контакте основного и разделяющих слоев граничные условия принимают вид

$$H^0|_{z=m+m_0} = H' = \text{const}; \quad H^{00}|_{z=z-m_0} = H'' = \text{const}.$$

3. Если принимают обе указанные предпосылки, то система сводится к одному уравнению

$$T\nabla^2 H + k_0 \frac{H' - H}{m_0} + k_{00} \frac{H'' - H}{m_{00}} = \mu^* \frac{\partial H}{\partial t} \tag{6.27}$$

Если основной пласт неоднородный по строению, то уравнение (6.27) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x \frac{\partial H}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(T_y \frac{\partial H}{\partial y}\right)+k_0 \frac{H'-H}{m_0}+$$

$$+k_{00} \frac{H''-H}{m_{00}}=\mu^* \frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (6.28)$$

6.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ГЕТЕРОГЕННО-БЛОКОВОЙ СРЕДЫ

Фильтрация в пласте с гетерогенно-блоковой средой характеризуется двойным фильтрационным сопротивлением и двойной емкостью. В последнем случае при упругой фильтрации сжатие пористых блоков и изменения напоров в них заметно отстают от изменения напоров в трещинах. Такой пласт можно заменить равномерно слоистым, в котором хорошо проницаемый слой с упругой водоотдачей $\mu_т^*$ и проводимостью $T_т$ имитирует фильтрацию в крупных трещинах, а слабопроницаемые — фильтрацию в пористых блоках. Плановая фильтрация в таком пласте (см. рис. 6.2) определяется уравнением [34, 54]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T_{тx} \frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_{тy} \frac{\partial H}{\partial y}\right)+$$

$$+2k' \left.\frac{\partial H'}{\partial z}\right|_{z=0}=\mu_т^* \frac{\partial H}{\partial t}, \qquad (6.29)$$

где индекс $'$ относится к пористым блокам.

При этом для напоров H' выполняются соотношения:

$$a' \frac{\partial^2 H'}{\partial z^2}=\frac{\partial H'}{\partial t}; \qquad (6.30)$$

$$H'|_{z=0}=H;\ \left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_{z=\frac{m'}{2}}=0, \qquad (6.30а)$$

где $a'=\frac{k'}{\beta^{*'}}$ (здесь k' и $\beta^{*'}$ — коэффициент фильтрации пород и упругоемкость пористых блоков); m' — мощность слабопроницаемых слоев, эквивалентная условному размеру блока.

При квазистационарной фильтрации в пористых блоках имеем: $\frac{\partial H'}{\partial z}=2\frac{H_c'-H}{m'}$, поэтому уравнение (6.29) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T_{тx} \frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_{тy} \frac{\partial H}{\partial y}\right)+$$

$$+\frac{4k'}{m'}(H_c'-H)=\mu_т^* \frac{\partial H}{\partial t}, \qquad (6.31)$$

где H'_c — напор в середине пористого блока, удовлетворяющий согласно формулам (6.30) и (6.30а) балансовому уравнению

$$\beta^{*\prime}\frac{m'}{2}\frac{\partial H'_c}{\partial t}=2k'\frac{H-H'_c}{m'}$$

или

$$\frac{\partial H'_c}{\partial t}=\eta^*(H-H'_c), \tag{6.32}$$

$$\eta^*=4\frac{a'}{m'^2}. \tag{6.33}$$

Величина η^* характеризует согласно выражению (6.32) скорость внутреннего перетекания воды из пористых блоков в крупные трещины. Из уравнения (6.33) видно, что с уменьшением m' и увеличением a' скорость протекания этих процессов в пористых блоках увеличивается и при $\eta^* \to \infty$ имеем обычную пористую среду. Более сложные случаи рассматриваются в работах [4, 8, 34].

6.7. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГРУНТОВЫХ ВОД

Рассмотрим водный баланс элемента *одномерного однородного* по фильтрационным свойствам потока длиной dx, шириной в плане $b = 1$ м и высотой h, равной мощности пласта, с наличием инфильтрационного питания интенсивностью w_a (рис. 6.3, *а*). За время dt в элемент поступает горизонтальный расход q_x по оси x и за счет инфильтрации $w_a dx$ и уходит из него расход $q_x + dq$. Это суммарное изменение определяет приращение или убыль объема воды в элементе в единицу времени, равное $\mu\frac{\partial H}{\partial t}dx$, что отвечает заштрихованной площади на рис. 6.3, *а*. В результате балансовое уравнение примет вид

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x}dxdt+w_a dxdt=\mu\frac{\partial H}{\partial t}dxdt. \tag{6.34}$$

Полагая справедливой предпосылку Дюпюи о постоянстве горизонтальных скоростей фильтрации в вертикальном сечении [см. формулу (4.29)] и определяя расход по формуле

$$q_x=-kh\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{6.35}$$

после подстановки (6.35) в (6.34) и необходимых сокращений получим искомое дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(kh\frac{\partial H}{\partial x}\right)+w_a=\mu\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{6.36}$$

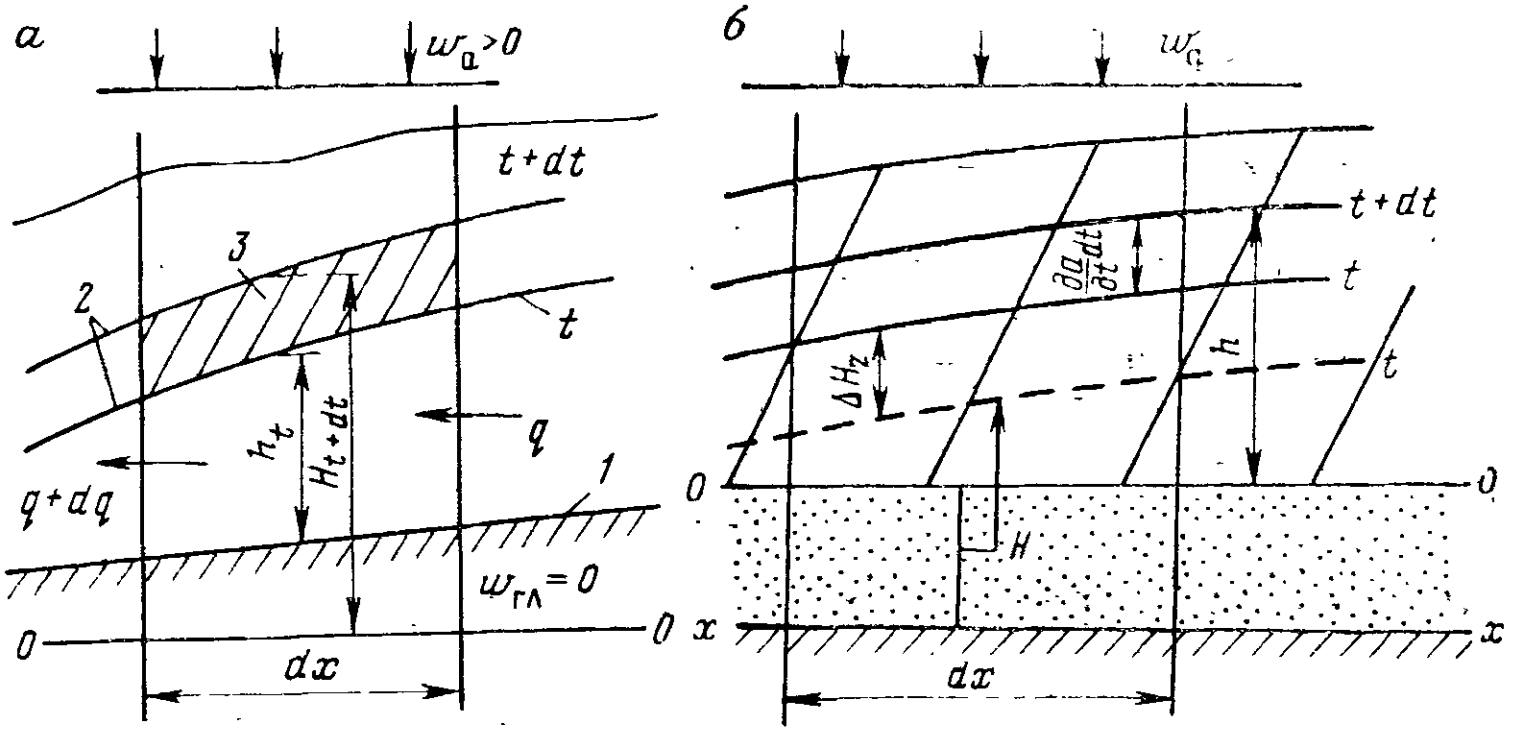


Рис. 6.3. Схема к выводу уравнения Буссинеска для однородного (*а*) и двухслойного (*б*) пластов:
1 — водоупор; *2* — свободные поверхности; *3* — изменение запасов воды в элементе

При отсутствии вертикального водообмена ($w_a = 0$) уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(kh\frac{\partial H}{\partial x}\right) = \mu\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{6.37}$$

в котором оно впервые было получено Ж. Буссинеском в начале XX в.

З а д а ч а. Рассмотрите, каким уравнением состояния для фильтрационной среды мы априори воспользовались в приведенном выше выводе и в какой форме использовали уравнения движения и неразрывности потока.

Уравнения (6.36) и (6.37) нелинейные, и в таком виде они трудно решаются. Для их широкого практического использования требуется линеаризация, которая выполняется двумя способами. Первый, предложенный Ж. Буссинеском, состоит в усреднении глубины потока h, которая принимается постоянной, равной средней арифметической из максимального и минимального значений. Тогда $h_{ср}$ можно вынести из-под знака производной и, если считать пласт однородным, то уравнение (6.37) при $a = kh_{ср}/\mu = T/\mu$ примет вид

$$a\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{6.38}$$

Это — известное в математической физике дифференциальное уравнение теплопроводности, имеющее разработанный математический аппарат решения [24, 40]. Линеаризация по Ж. Буссинеску справедлива, если начальная мощность h_e пласта значительна, а ее изменения Δh во времени не превышают (0,2—0,3) h_e.

Другой способ линеаризации (по Багрову—Веригину) предполагает использование преобразования $\partial h/\partial t = 1/2h\cdot\partial h^2/\partial t$ и понятия напорной функции $u = 0{,}5\ h^2$, с помощью которых уравнение для

грунтового потока с горизонтальным водоупорным ложем и однородным строением

$$k\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)=\mu\frac{\partial h}{\partial t} \tag{6.39}$$

преобразуется сначала к виду

$$kh\frac{\partial^2(h^2/2)}{\partial x^2}=\mu\frac{\partial(h^2/2)}{\partial t}$$

путем умножения левой и правой частей выражения (6.39) на h и введения h под знак производной, а затем к виду

$$a\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}=\frac{\partial h^2}{\partial t}\quad\text{при}\quad a=\frac{kh_S}{\mu}, \tag{6.40}$$

где $h_S = f(x,\ t)$ — некоторая известная глубина, определяемая по рекомендациям, изложенным в работе [30]; для полубесконечного потока $h_S = (2h_{\min} + h_{\max})/3$.

Этот способ линеаризации применяется для потоков с небольшой мощностью. Линеаризация дифференциальных уравнений приводит к погрешностям. Так, приравняв правую часть выражения (6.38) к нулю и дважды проинтегрировав, получим: $H = Ax + C$ (где A, C — постоянные интегрирования), т. е. пьезометрическая поверхность вместо второго порядка представляет собой плоскость.

З а д а ч а. Используя балансовый подход, получите дифференциальное уравнение нестационарной фильтрации для планового потока грунтовых вод, имеющего гидравлическую связь с нижележащими напорными водами (использовать декартовую систему координат).

Рассмотрим вывод для *схемы двухслойного пласта*, когда выполняется условие (4.34) и между слоями существует перетекание: основной, горизонтальный поток идет по нижнему хорошо проницаемому k слою, а в верхнем $k_в$ слое движение направлено практически вертикально (см. рис. 6.3, *б*).

Уравнение баланса для элемента потока в нижнем слое получают аналогично выражению (6.34). Принимая $\mu^* = 0$ (пренебрегаем упругими запасами в нижнем слое) и заменяя $w_а$ на интенсивность перетекания $w_п$, имеем:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}=w_п. \tag{6.41}$$

Перетекание из верхнего суглинистого слоя определяется по формуле

$$w_п = k_в\frac{h-H}{h}, \tag{6.42}$$

где h — мощность обводненной части верхнего суглинистого слоя.

Определяя q_x по зависимости (6.35), а $w_п$ — по (6.42) и подставляя их выражения в уравнение (6.41), после преобразований для нижнего слоя получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)=k_в\frac{H-h}{h}. \tag{6.43}$$

Составляя уравнение баланса для верхнего слоя в этом же элементе и считая, что за время dt к свободной поверхности подходит поток $(w_а - w_п)\ dt$, вызывающий приращение объема воды на величину $\mu \frac{\partial h}{\partial t} dt$, будем иметь

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = w_а - w_п = w_а + k_в \frac{H - h}{h}. \qquad (6.44)$$

Таким образом, нестационарная одномерная фильтрация в двухслойном пласте описывается системой двух дифференциальных уравнений (6.43) и (6.44). Более сложные случаи рассматриваются в работах [6, 8, 30, 34].

6.8. ПОНЯТИЕ О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ И УСЛОВИЯХ ОДНОЗНАЧНОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дифференциальное уравнение описывает класс подобных процессов фильтрации. Для выделения из этого класса конкретного процесса необходимо составить *замкнутую*, или *полную*, систему уравнений, которая обеспечит получение единственного решения дифференциального уравнения. Для этого дополнительно к дифференциальному уравнению записывают *условия однозначного решения*: а) характеристику геометрических размеров области, для которой ищется конкретное решение; б) числовые или функциональные значения физических параметров фильтрационной среды; в) исходные граничные условия; г) начальные условия при нестационарной фильтрации. Эти условия — есть краткая математическая запись принятой расчетной схемы, полученной в результате схематизации.

Совокупность целевого гидрогеологического назначения решения задачи и полной системы уравнений, описывающих математические условия ее решения, называют *математической постановкой задачи*. Целевое содержание формулируется обычно словами, а математические условия решения отображаются графически расчетной схемой, на которой показывают все принятые условия однозначности, и записью исходного дифференциального уравнения.

Приведем пример математической постановки. Пусть требуется оценить развитие подпора грунтовых вод в речной долине, показанной на рис. 5.4, *г*. Для этого надо найти уравнение, по которому можно рассчитать отметку уровня $H_{x,t}$ грунтовых вод в любой точке и в любой момент времени на участке

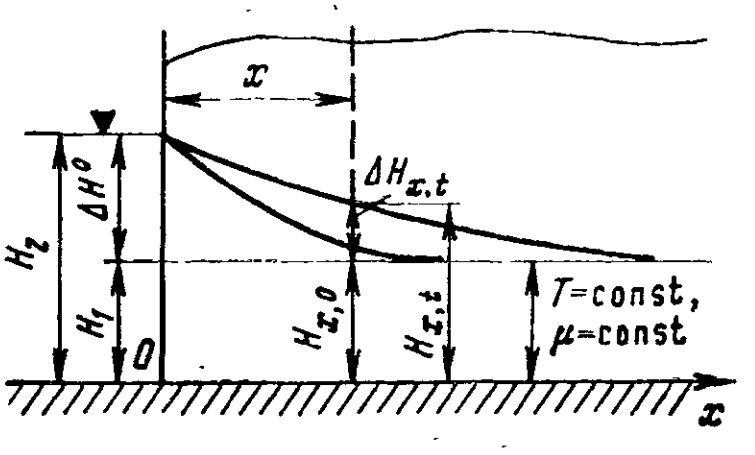


Рис. 6.4. Расчетная схема к математической постановке задачи для условий, показанных на рис. 5.4, *г*

l_1. Подпор формируется под влиянием созданного на реке водохранилища с быстрым (мгновенным) подъемом воды на урезе на величину $\Delta H^0 = H_2 - H_1$. Приведем гидрогеологические условия к расчетной схеме, показанной на рис. 6.4, где фильтрация считается одномерной линейной, пласт — полубесконечным и однородным, инфильтрационное питание отсутствует, за начальные условия принято горизонтальное положение уровня $H_{x,0}$.

Математически полную систему уравнений можно записать так:

$$a\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \infty > x \geqslant 0; \quad x = 0, \quad H_{0,t} = H_2 = \text{const};$$

$$x = \infty, \quad H_{\infty,t} = H_1; \quad t = 0, \quad H_{x,0} = H_1 = \text{const}.$$

Если поставить задачу иначе и определять изменение $\Delta H_{x,t}$ уровня грунтовых вод как $\Delta H_{x,t} = H_{x,t} - H_{x,0}$, то полная система примет вид

$$a\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x^2} = \frac{\partial \Delta H}{\partial t}, \quad \infty > x \geqslant 0; \quad x = 0, \quad \Delta H_{0,t} = \Delta H^0 = \text{const};$$

$$x = \infty, \quad \Delta H_{\infty,t} = 0; \quad t = 0, \quad \Delta H_{x,0} = 0.$$

Вопрос. Как изменится математическая постановка задачи, если на контакте аллювия и известняков (см. рис. 5.4, *г*) уровень принять постоянным, равным H_3, и считать, что на всей длине l_1 имеется питание $w_a = \text{const}$?

6.9. СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Важное свойство дифференциальных уравнений — их универсальность, выражающаяся в описании общих закономерностей, присущих целому классу подобных или аналогичных процессов, а одно из основных свойств линеаризованных уравнений — возможность находить сложные решения в виде суммы частных решений. Универсальность устанавливает математическое сходство гидрогеологических процессов с процессами иного физического содержания, что позволяет переносить выявленные для этих процессов закономерности на аналогичные гидрогеологические. На этом основаны все методы математического моделирования. Так, широко известно использование электрогидродинамической аналогии, устанавливающей идентичность процессов фильтрации воды в пористой среде и движения электрического тока в проводнике. На этом принципе работают различные аналоговые вычислительные устройства [11, 17, 26, 54].

Универсальность определяется тем, что дифференциальное уравнение приводят к безразмерному виду и получают основные критерии, характеризующие процесс, который описывается этим уравнением.

Возьмем дифференциальное уравнение (6.18)

$$a\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial H}{\partial t}$$

и приведем его к безразмерному виду. Для этого введем безразмерные характеристики

$$\bar{H} = H/H_0;\ \bar{x} = x/L;\ \bar{y} = y/L;\ \bar{t} = t/\tau, \tag{6.45}$$

где H_0 — характерный уровень, например приращение или уровень на одной из границ исследуемого потока; L — характерный линейный размер, в частности длина исследуемого потока; τ — характерное время, оценивающее скорость развития нестационарного процесса и его стремление к стабилизации. С. Ф. Аверьянов [1] назвал τ временем стабилизации процесса и определил его как

$$\tau = L^2/a. \tag{6.46}$$

Подставив выражение (6.45) в уравнение (6.18), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{t}}, \tag{6.47}$$

характеризующее зависимость безразмерной функции $\bar{H}$ от безразмерных координат пространства $\bar{x}$, $\bar{y}$ и безразмерного времени $\bar{t}$. Последнее с учетом зависимости (6.46) определяется следующим образом:

$$\bar{t} = F_0 = at/L^2, \tag{6.48}$$

где $\bar{t}$ — известный критерий F_0 нестационарного процесса Фурье [6, 8, 11].

Согласно теории подобия [11, 26] уравнение (6.47) можно переписать как критериальное, устанавливающее связь искомой функции $\bar{H}$ с критериями, определяющими процесс:

$$\bar{H} = f(\bar{x};\ \bar{y};\ F_0), \tag{6.49}$$

где F_0 — основной, а $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — параметрические критерии.

В качестве $\bar{H}$ может рассматриваться любая аналогичная ей функция, например относительная концентрация какого-либо компонента, растворенного в воде. Тогда уравнения (6.47) или (6.49) будут описывать процесс молекулярной диффузии, при этом в выражении (6.48) вместо a будет содержаться аналогичный параметр, характеризующий скорость развития процесса диффузии,— коэффициент молекулярной диффузии D_0. В этом случае $\bar{t} = D_0 t/L^2$ является критерием Пекле и обозначается Pe.

Если рассмотреть дифференциальное уравнение плановой фильтрации с инфильтрационным водообменом в виде

$$a\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) + \frac{w_a}{\mu} = \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{6.50}$$

то, вводя те же безразмерные характеристики (6.45) и новую безразмерную величину $\bar{w}_a = w_a/w_0$, при

$$w_0 = \frac{\mu H^0}{\tau} = \frac{H^0 T}{L^2} \tag{6.51}$$

можно уравнение (6.50) привести к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{w}_a = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{t}}.$$

Величина $\bar{w}_a$ — это критерий, характеризующий процесс с вертикальным обменом, т. е. с внешними источниками или стоками. Он был получен С. Ф. Аверьяновым [1] и назван критерием инфильтрационного водообмена. Величина $\bar{w}_a$ с учетом условия (6.51) может быть представлена [11] в виде

$$\bar{w}_a = w_a L^2/H^0 T, \tag{6.51а}$$

что отвечает зависимости (5.16), т. е. $\bar{w}_a = K_{во}$.

В числителе $w_a L$ интерпретируется как вертикальный расход интенсивностью w_a, поступающий на единичную площадь потока длиной L, а в знаменателе $H^0 T$ как некоторый расход на той же длине участка, но идущий в горизонтальном направлении в пласте с водопроводимостью T под средним градиентом H_0/L. Критерий $\bar{w}_a$ характеризует долю участия каждого расхода в формировании общего водного баланса потока. Критериальное уравнение можно записать в следующем виде:

$$\bar{H} = f(\bar{x};\ \bar{y};\ F_0;\ \bar{w}_a). \tag{6.52}$$

Для многопластовой системы, когда основной пласт H связан с питающим его водоносным горизонтом, в котором уровень принимается неизменным H', а разделяющий слой с параметрами k_0 и m_0 не обладает емкостью $\mu_0 = 0$, фильтрация описывается уравнением (6.27). Подставив в него зависимости (6.45) и (6.46), после преобразований получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{w}_{гл} \Delta \bar{H} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial t},$$

в котором помимо известного уже критерия Фурье F_0 появляется новый критерий $\bar{w}_{гл}$ [11]:

$$\bar{w}_{гл} = \frac{L^2}{B^2} = \frac{L^2 k_0}{T m_0}. \tag{6.51б}$$

Полученный критерий тождествен уравнению (5.15), т. е. $\bar{w}_{гл} = K_{во}$ (B — известен в теории фильтрации как параметр перетекания [6, 8], $B = \sqrt{T m_0/k_0}$; $\Delta \bar{H} = \bar{H}' - \bar{H}$).

Критерий $\bar{w}_{гл}$, названный критерием глубинного водообмена, характеризует соотношение единичных расходов

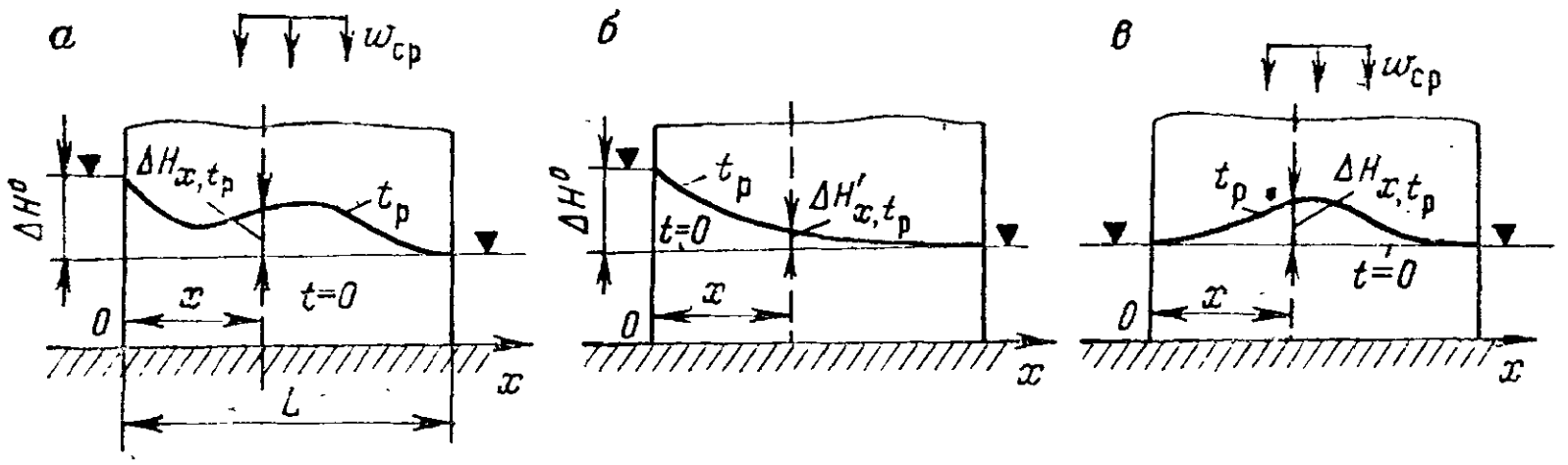


Рис. 6.5. Схемы к пояснению метода суперпозиции:

а — схема общего решения, $\Delta H_{x,t}$; *б* — схема частного решения $\Delta H'_{x,t}$ (подпор от границы $x = 0$, ΔH^0); *в* — схема частного решения $\Delta H''_{x,t}$ (подъем от орошения $w_{ор}$)

в горизонтальном T/L и вертикальном k_0L/m_0 направлениях. Критериальное уравнение имеет вид

$$\overline{H} = f(\overline{x};\ \overline{y};\ F_0;\ \overline{\omega}_{гл};\ \Delta\overline{H}). \tag{6.53}$$

Дифференциальные уравнения фильтрации (6.8), (6.12), (6.19) (6.27) и др. относятся к классу линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и обладают свойством, согласно которому сумма частных решений данного уравнения является также решением этого уравнения [24, 40]. На этом свойстве построен так называемый метод суперпозиции, или сложения фильтрационных течений.

Суть этого метода заключается в том, что сложный процесс фильтрации, формирующийся под действием нескольких источников возмущения, рассматривают как сумму частных фильтрационных процессов (течений), вызванных действием каждого возмущения в отдельности в течение своего расчетного времени

$$\Delta H_{об,\ t_р} = \sum_{i=1}^{n} \Delta H_{i,\ t_р - t_i}, \tag{6.54}$$

где $\Delta H_{об,\ t_р}$ — изменение уровня, характеризующее действие сложного процесса за время $t_р$; $t_р$ — расчетное время; n — число частных возмущений; ΔH_i — изменение уровня, вызванное i-ым возмущением в пределах той же области фильтрации за время его действия $t_р - t_i$; t_i — начало действия i-го возмущения.

Так, общее решение $\Delta H_{x,\ t}$ о подъеме уровня воды под одновременным влиянием подпора от водохранилища и инфильтрации от орошения (рис. 6.5, *а*) можно представить как сумму двух частных решений:

$$\Delta H_{x,\ t} = \Delta H'_{x,\ t} + \Delta H''_{x,\ t},$$

где $\Delta H'_{x,\ t}$ характеризует развитие подпора (см. рис. 6.5, *б*), вызванного подъемом уровня воды в водохранилище на ΔH^0 при $w'_{ор} = 0$; $\Delta H''_{x,\ t}$ — описывает подъем уровня грунтовых вод только под влиянием орошения, когда подпор на реке равен нулю ($\Delta H^0 = 0$).

Пользуясь методом сложения течений, можно упростить постановку задачи. Представим решение уравнения (6.38) $H(x, t)$ суммой

$$H(x, t) = H_e(x) + \Delta H(x, t), \tag{6.55}$$

где $H_e(x)$ — начальное значение уровня в точке x при $t = 0$, которое является частным решением уравнения (6.38); $\Delta H(x, t)$ — приращение уровня в той же точке, вызванное изменением граничного условия и полученное при начальном условии $\Delta H(x, 0) = 0$. Подставив сумму (6.55) в выражение (6.38), получим

$$\left(a\frac{\partial^2 H_e}{\partial x^2} - \frac{\partial H_e}{\partial t}\right) + \left(a\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x^2} - \frac{\partial \Delta H}{\partial t}\right) = 0,$$

где первая скобка как решение уравнения (6.38) равна нулю. Следовательно, имеем:

$$a\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x^2} = \frac{\partial \Delta H}{\partial t}. \tag{6.56}$$

Это означает, что вместо решения задачи по формуле (6.38) для уровня $H(x, t)$ при начальных условиях $H_{x,0} = f(x)$, можно найти решение по (6.56) для приращения уровня $\Delta H(x, t)$, отвечающего простым начальным условиям $\Delta H(x, 0) = 0$, а искомый уровень $H(x, t)$ получить по зависимости (6.55).

Докажем аналогию дифференциальных уравнений для напорных (6.18) и грунтовых (6.40) вод. Для этого умножим левую и правую части уравнения (6.18) на мощность пласта m и введем ее под знак дифференциала:

$$a\frac{\partial^2 (Hm)}{\partial x^2} = \frac{\partial (Hm)}{\partial t},$$

а уравнение (6.40) запишем в виде

$$a\frac{\partial^2 (H^2/2)}{\partial x^2} = \frac{\partial (H^2/2)}{\partial t}.$$

Сравнивая уравнения, убеждаемся в их тождественности, так как, вводя обозначение

$$u = mH = 0{,}5h^2, \tag{6.57}$$

которое Н. Н. Веригин [30] назвал напорной функцией, вместо (6.18) и (6.40) имеем одно уравнение

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

которым описывается фильтрация в напорных и грунтовых потоках с горизонтальным водоупором. Такое преобразование позволяет решать математические задачи только для напорных вод, а затем полученные решения трансформировать для грунтовых с использованием зависимости (6.57).

6.10. КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОСНОВНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В относительно простых гидрогеологических условиях получают решения аналитическими методами; в сложных условиях используют моделирование, привлекая вычислительную технику.

Все многообразие методов можно условно свести к трем группам. В п е р в у ю г р у п п у входят строгие гидромеханические и аналитические способы решения. Уравнения Лапласа и Пуассона, описывающие стационарную одномерную фильтрацию, интегрируются непосредственно при заданных граничных условиях. При плоско-вертикальной фильтрации используют метод конформных преобразований из теории аналитических функций [3, 8, 24, 40]. Дифференциальные уравнения нестационарной фильтрации решают методами математической физики (операционным исчислением, разложением в ряды Фурье и др. [24, 30, 40]).

Дифференциальные уравнения радиальной и планово-радиальной фильтрации, характеризующие приток воды к скважинам, решаются с использованием теории линейных и точечных стоков (или источников) на плоскости или в пространстве [3, 4, 6, 8]. В гидромеханике источниками и стоками называют особые математические точки и линии, которые соответственно выделяют или поглощают жидкость, не имеют поперечных размеров, т. е. $r = 0$, а линии характеризуются некоторой длиной l. Скважины с коротким фильтром рассматривают как точечный, а с длинным фильтром — как линейный источник (откачка) или сток (нагнетание). В результате решения устанавливается функциональная связь динамических функций процесса фильтрации H и Q с влияющими на них факторами x, y, t, T, a и т. п. Это одно из достоинств рассматриваемых методов. Однако значительное упрощение природной обстановки может привести к получению недостаточно надежных практических результатов.

В т о р а я г р у п п а — это приближенные методы: гидравлические, графические и фрагментирование потока. Гидравлические методы основаны на непосредственном интегрировании дифференциального уравнения Дарси (4.5) или (4.8) применительно к стационарной одномерной фильтрации. В этом случае принимают математически известными форму поперечного сечения потока (линий равного напора) или форму линий токов, что адекватно заданному распределению вдоль них градиентов потока.

Графические методы основаны на использовании гидродинамических сеток, которые строят вручную по правилам, изложенным выше, а в сложных условиях применяют методы моделирования. К этим способам относится известный метод недеформируемых лент (трубок) тока [3, 19, 34]. Метод фрагментов предусматривает разбиение потока на части, для которых ранее получены решения, или их можно получить в более простой постановке, чем исходная. Полученные решения «склеиваются» с использованием граничных условий четвертого рода и метода суперпозиции. Основное достоинство этих методов — простота нахождения инженерных решений, обеспечивающих

приемлемую точность практических результатов. Однако и здесь требуются значительные упрощения гидрогеологической обстановки.

Третья группа включает различные способы моделирования. Появляется возможность учесть большее число действующих факторов и меньше упрощать гидрогеологическую обстановку. В отличие от первой группы эти решения не являются функциональными, и для установления закономерностей влияния различных факторов на результаты решения должны быть выполнены неоднократно с использованием всех факторов и всего диапазона их изменения.

Теоретическая основа большинства методов математического моделирования — это численные методы, которые рассматриваются в гл. 7. Обработка информации в этой группе методов требует значительно большего времени, чем в первых двух группах, так как надо изучить и отобразить в модели большое число факторов. Построение моделей — это своего рода искусство, в котором интуиция и опыт исследователя играют важную роль и помогают правильно пользоваться разнообразными методическими приемами. Подробно такие методы рассматриваются в работах [8, 11, 17, 26]. На практике обычно используют методы разных групп в комплексе, что позволяет получать достаточно достоверные инженерные решения.

6.11. ПОНЯТИЕ О ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ

Прямыми задачами называют такие, цель которых — определение количественных значений динамических функций потока подземных вод при известных значениях параметров геофильтрационной среды и краевых условий. По гидрогеологическому назначению их условно можно подразделить на инженерные и геологические. Цель первых — количественно оценить изменения гидрогеологической обстановки, которые могут возникнуть под влиянием работы проектируемых инженерных сооружений или водохозяйственных мероприятий. Это прогнозные задачи, в которых требуется определить, как будут изменяться во времени и по площади уровень и расход подземных вод под воздействием техногенных и естественных факторов (прогноз развития подпора грунтовых вод в районе водохранилищ, оценка фильтрационных потерь из оросительных каналов и т. п.). Геологические задачи связаны с исследованием влияния различных естественных факторов (паводков, атмосферных осадков и др.) на формирование уровня и расхода потока подземных вод, с определением величины их естественных ресурсов и т. п.

Сюда могут быть отнесены и задачи восстановления пьезометрического поля путем вычисления расчетных значений отметок уровней воды в точках, где фактические их измерения отсутствуют, и др. Решение прямых задач широко освещено в литературе [1, 6, 8, 30, 40, 50].

Понятие *обратные задачи* в гидрогеологии является собирательным, под ним подразумевают инверсные, граничные и индуктивные задачи [11, 17, 35]. К инверсным относят задачи, цель которых — определение гидрогеологических параметров пласта и характеристик вертикального водообмена ($\omega_а$, $\omega_{гл}$) по известным из наблю-

дений за режимом подземных вод картам пьезо- или гидроизогипс или значениям динамических функций H и Q в определенных точках исследуемой области при заданных граничных и начальных условиях. В г р а н и ч н ы х задачах искомыми являются неизвестные значения уровней и расхода потока на его границах ($H_{гр}$, $Q_{гр}$), а параметры среды, начальные условия и динамические функции H или Q в пределах исследуемой площади, т. е. карты гидро- и пьезоизогипс, карты единичных расходов потока, считаются известными. И, наконец, и н д у к т и в н ы м и называются задачи, цель которых — установление вида и форм связи между динамическими функциями (H, Q) и определяющими их изменение факторами. В этом случае изучается физический механизм процесса или явления и определяется математическая форма его описания. Примером обратных могут служить задачи определения гидрогеологических параметров пласта (T, a, μ), интенсивности гидравлической связи водоносных пластов (параметра перетекания B и др.) по данным опытных откачек, установления величины инфильтрационного питания по данным режимно-балансовых наблюдений на специально оборудованных створах скважин. Если требуется выявить закономерность изменения параметров по площади, т. е. установить структуру фильтрационной среды, то применяют моделирование. Для этого по данным изысканий строят математическую модель объекта и на ней по специальной методике подбирают такие значения параметров в пределах всей площади, чтобы по данным моделирования были получены такие же карты или графики колебаний уровня и расхода подземных вод, что и по результатам натурных наблюдений. Чем ближе между собой модельные и натурные данные, тем точнее построенная математическая модель. Степень близости модельных и натурных данных оценивается специальными критериями. Теория и методика решения обратных задач освещены в работах [11, 26, 35, 59, 60].

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем общность и различие двух подходов, которыми пользуются при выводе дифференциальных уравнений фильтрации?
2. Почему уравнения (6.17) и (6.19) считают линеаризованными? В чем суть линеаризации?
3. Какие допущения позволяют считать зависимость ρ от p линейной?
4. Назовите все допущения, которые приняты при выводе уравнения (6.19)?
5. Перепишите уравнения (6.18) и (6.21) для изучения плосковертикальной фильтрации и приведите практический пример такого потока.
6. Назовите все допущения, принятые при выводе уравнения (6.27), и нарисуйте отвечающую ему расчетную схему.
7. Разъясните физический смысл, позволяющий исследовать фильтрацию в гетерогенно-блоковой среде на математической модели многопластовой толщи.
8. Почему уравнения (6.36) и (6.37) считают нелинейными?
9. Какие погрешности в описание пьезометрической поверхности вносит линеаризация по Буссинеску? Какой критерий оценивает возможность ее применения? Нарисуйте расчетные схемы, отвечающие уравнениям (6.38) и (6.40).
10. Если соблюдается критерий (4.36), то каким дифференциальным уравнением описывается фильтрация в таком потоке?
11. Запишите математическую постановку задачи для исследования фильтрации (только для H) для расчетных схем, показанных на рис. 4.5 и 4.6, *а—г*.

В схеме *а* предполагается изучение подпора под влиянием подъема уровня воды в реке *А*, а в схеме *в* — под влиянием откачки из скважины, вскрывшей нижний пласт.

12. Назовите два важных свойства линеаризованных дифференциальных уравнений?

13. В чем универсальность дифференциальных уравнений? В чем суть метода сложения фильтрационных полей? Какие упрощения он позволяет сделать в математической постановке задач фильтрации?

14. Запишите критерии Фурье, инфильтрационного и глубинного водообмена, разъясните их роль при моделировании.

15. При каких допущениях вместо уравнения (6.38) можно использовать (6.56), каким начальным условиям оно отвечает?

16. Почему гидравлические методы считают приближенными?

17. Что такое прямые и обратные задачи фильтрации? Приведите примеры.

Глава 7

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В сложных гидрогеологических условиях, когда не удается их схематизировать и привести к типовым расчетным схемам, имеющим аналитическое решение, используют численные методы. Им посвящено много работ [14, 26, 27, 42]. Для решения гидрогеологических задач численный метод (метод конечных разностей) впервые использовал в 1940-х гг. Г. Н. Каменский [14, 20], который разработал гидрогеологические основы его применения для решения прогнозных задач подпора грунтовых вод и водопритока к шахтам, а также обратных задач, связанных с определением инфильтрационного питания грунтовых вод и коэффициента водоотдачи. На основе уравнения в конечных разностях он разработал гидродинамические основы изучения режима и баланса подземных вод [14]. Его идеи нашли дальнейшее развитие в работах М. А. Вевиоровской, Н. К. Гиринского, Н. Н. Биндемана, А. В. Лебедева, П. А. Киселева, И. К. Гавич, С. М. Семеновой-Ерофеевой, Н. А. Мясниковой, В. М. Шестакова и др. С 1960-х гг. численные методы широко используются в качестве теоретической основы при моделировании на аналоговых [11, 17, 25] и цифровых [18, 26, 28, 40] вычислительных машинах.

7.1. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ СЕТОК

Численное решение означает, что вместо дифференциального уравнения в частных производных второго порядка решается аналогичная ему система конечно-разностных уравнений, в которой дифференциалы функции H по координатам пространства и времени заменены на малые, но конечные ее приращения по тем же координатам. Такой прием позволяет находить числовые значения производных по их конечным малым приращениям и путем последовательного суммирования, например, по расстоянию определять изменение уровня воды в исследуемой области за расчетное время. Так, дифференциальное уравнение (6.38) принимает вид

$$T\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=\mu\frac{\partial H}{\partial t}\rightarrow T\frac{\Delta^2 H}{\Delta x^2}=\mu\frac{\Delta H}{\Delta t},$$

где $\Delta^2 H/\Delta x^2$ — конечная малая величина второго порядка на участке длиной Δx, представляющая собой разность двух конечных малых величин первого порядка:

$$\frac{\Delta^2 H}{\Delta x^2}=\frac{\dfrac{\Delta H_{1,2}}{\Delta x}-\dfrac{\Delta H_{2,4}}{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{\dfrac{H_1-H_2}{\Delta x}-\dfrac{H_2-H_4}{\Delta x}}{\Delta x}.$$

при этом конечное приращение ΔH функции за время Δt выразится как ее изменение на начало и конец этого интервала, т. е.

$$\frac{\Delta H}{\Delta t}=\frac{H_{t+\Delta t}-H_t}{\Delta t}.$$

Отсюда следует, что вместо непрерывного изменения уровня подземных вод во времени и по площади рассматриваются его изменения в отдельных точках пласта и через определенные моменты времени. Чтобы получить такую математическую модель, исследуемую область разбивают системой плоскостей на элементарные сопряженные между собой блоки и все физические и гидродинамические характеристики потока, свойственные выделенному элементарному объему, относят к его центру тяжести, который называется у з л о в о й т о ч к о й. Закономерное множество узловых точек образует с е т к у. Расстояние между двумя соседними узловыми точками Δx называют ш а г о м с е т к и. В итоге процесс движения подземных вод в пласте рассматривают как движение воды между узловыми точками построенной сетки и характеризуют его для интервала времени Δt по уравнению Дарси. Такой принцип замены непрерывных области и процесса на дискретные получил название м е т о д а с е т о к. Он является основой численного решения дифференциальных уравнений фильтрации.

7.2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

Рассмотрим одномерную нестационарную фильтрацию. Следуя рекомендациям Г. Н. Каменского [14, 20], выберем элемент линейного потока (рис. 7.1) и ограничим его тремя сечениями $i-1$, i и $i+1$, находящимися на расстояниях $\Delta x_{i-1,i}$ и $\Delta x_{i,i+1}$ друг от друга. Выделим балансовый участок длиной $\Delta x=(\Delta x_{i-1,i}+\Delta x_{i,i+1})/2$ и рассмотрим формирование его водного баланса. Изменение баланса на участке Δx за время Δt при монотонном изменении уровней воды в сечениях $i-1$, i и $i+1$ определяется как объем воды, затраченной на осушение или насыщение пласта (при снижении или повышении

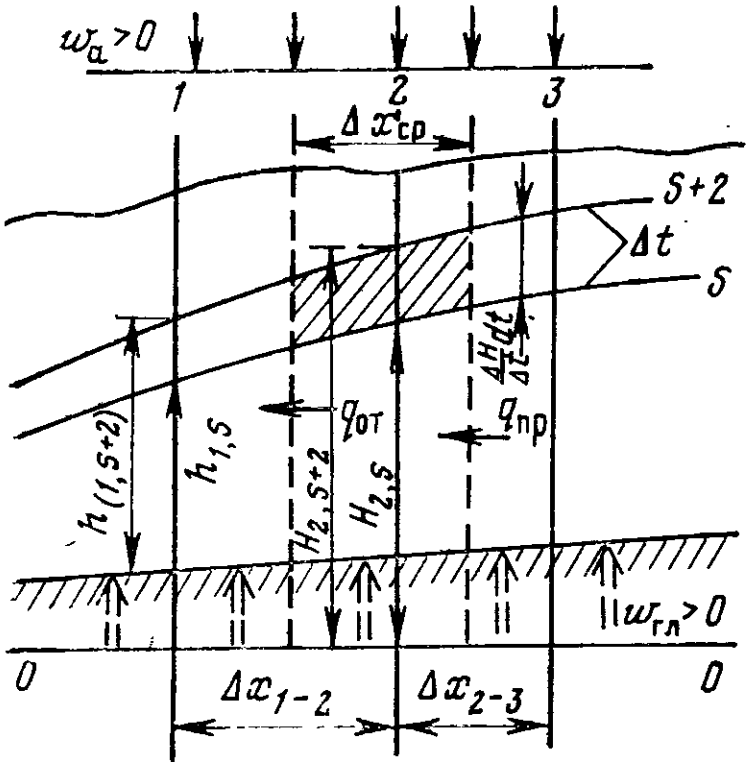


Рис. 7.1. Схема к выводу уравнения в конечных разностях (по Г. Н. Каменскому)

уровня соответственно) в среднем сечении i на величину ΔH, т. е. $\Delta V = \mu \Delta x \Delta H_i$. Это изменение происходит под влиянием горизонтального $\Delta q = q_{пр} - q_{от}$ и вертикального $\Delta q^w = \Delta x w$ водообмена. В результате получим уравнение в конечных разностях в балансовом виде:

$$\pm \frac{q_{пр} - q_{от}}{\Delta x} \pm w = \pm \mu \frac{\Delta H}{\Delta t}, \tag{7.1}$$

где $q_{пр}$ и $q_{от}$ — средние горизонтальные приток и отток воды, определяемые при достаточно малых Δx, Δt и относительно малых изменениях мощностей h и уровней H в сечениях $i-1$, i, $i+1$ согласно принятой расчетной схеме. При этом учитывается, что на участках $i-1$, i и $i+1$ фильтрационные свойства различны:

$$\left.\begin{aligned} q_{пр} &= k_{i,\,i+1} h_{i,\,i+1} \frac{H_{i+1} - H_i}{\Delta x_{i,\,i+1}} \\ q_{от} &= k_{i-1,\,i} h_{i-1,\,i} \frac{H_i - H_{i-1}}{\Delta x_{i-1,\,i}} \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

или

$$q_{пр} = T_{i,\,i+1} \frac{H_{i+1} - H_i}{\Delta x_{i,\,i+1}}; \quad q_{от} = T_{i,\,i-1} \frac{H_i - H_{i-1}}{\Delta x_{i,\,i-1}}. \tag{7.3}$$

Как видно из рис. 7.1, $q_{пр}$ и $q_{от}$ могут быть определены по формулам (7.2) или (7.3) в зависимости от положения уровня на разные моменты времени в течение интервала Δt: на начало — $q^S = f(H^S)$, середину — $q^{S+1/2} = f(H^{S+1/2})$ и его конец — $q^{S+1} = f(H^{S+1})$. В зависимости от этого могут быть получены различные конечно-разностные уравнения (см. ниже).

Величина w представляет собой результирующую за Δt интенсивность вертикального водообмена и может быть при необходимости разделена на две составляющие

$$w = w_a \pm w_{гл}. \tag{7.4}$$

Правая часть уравнения (7.1) усредненно характеризует изменение запасов воды в выделенном элементе за время Δt, оцениваемое по изменению уровня воды в среднем сечении

$$\Delta H_i = H_i^{S+1} - H_i^S. \tag{7.5}$$

Подставив в уравнение (7.1) значения расходов согласно зависимости (7.2) и выразив величину ΔH по формуле (7.5), после преобра-

зований получим развернутый вид уравнения в конечных разностях, характеризующий, по определению Г. Н. Каменского, гидродинамическую связь режима колебаний уровня подземных вод с водным балансом потока

$$k_{i,\,i+1}h^{S}_{i,\,i+1}\frac{H^{S}_{i+1}-H^{S}_{i}}{\Delta x_{i,\,i+1}}-k_{i-1,\,i}h^{S}_{i-1,\,i}\frac{H^{S}_{i}-H^{S}_{i-1}}{\Delta x_{i-1,\,i}}\pm$$

$$\pm w\Delta x=\mu\Delta x\frac{H^{S+1}_{i}-H^{S}_{i}}{\Delta t} \qquad (7.6)$$

Уравнение (7.6) является аналогом нелинейного дифференциального уравнения Буссинеска (6.36). Если на исследуемом участке фильтрационные свойства считать постоянными ($k_{i,\,i+1}h^{S}_{i,\,i+1}\approx k_{i-1,\,i}h^{S}_{i-1,\,i}\approx T$) и $\Delta x_{i,\,i+1}=\Delta x_{i-1,\,i}=\Delta x$, то уравнение (7.6) линеаризуется и становится аналогом уравнения теплопроводности (6.38)

$$\frac{T}{\mu}\left(\frac{H^{S}_{i-1}-2H^{S}_{i}+H^{S}_{i+1}}{\Delta x^{2}}\right)\pm\frac{w}{\mu}=\frac{H^{S+1}_{i}-H^{S}_{i}}{\Delta t}. \qquad (7.7)$$

С вычислительных позиций уравнение (7.7) представляет собой разностную схему, которая носит название я в н о й и позволяет по известным на начало времени Δt отметкам уровней воды, заданным параметрам среды и интенсивности результирующего вертикального водообмена найти непосредственно из уравнения (7.7) значение уровня воды в среднем из трех сечений на конец периода времени Δt

$$H^{S+1}_{i}=H^{S}_{i}+\frac{2T\Delta t}{\mu\Delta x^{2}}\left(\frac{H^{S}_{i}+H^{S}_{i+1}}{2}-H^{S}_{i}\right)\pm\frac{w\Delta t}{\mu}, \qquad (7.8)$$

что отвечает смыслу решения задачи прогноза.

Из теории разностных методов известно [42], что явные схемы неустойчивы в решении, т. е. могут накапливать погрешности счета, что приводит к получению неверных результатов. Кроме того, численное решение всегда содержит погрешность, связанную с переходом от дифференциального представления баланса элемента потока к конечно-разностному аналогу. Это вызывает необходимость исследовать так называемые условия сходимости решения конечно-разностного уравнения к аналогичному, полученному аналитическим способом.

Устойчивость и сходимость явной схемы зависят от параметров пласта и отношения шага времени к шагу длины. Чтобы конечно-разностное решение было устойчивым и сходилось к аналитическому, должно выполняться условие

$$\frac{2T}{\mu}\frac{\Delta t}{\Delta x^{2}}\leqslant 1. \qquad (7.9)$$

Приняв по Г. Н. Каменскому [20]

$$\frac{2T\Delta t}{\mu\Delta x^2}=1, \tag{7.9а}$$

получим из выражения (7.8) после преобразований уравнение

$$H_i^{S+1}=\frac{H_{i-1}^S+H_{i+1}^S}{2}\pm\frac{W\Delta t}{\mu}, \tag{7.10}$$

которое широко используется гидрогеологами для прогнозирования при расчетах вручную и на ЭЦВМ. Выполнение критерия (7.9) или (7.9а) часто требует резкого увеличения числа временны́х шагов и объема расчетных операций в целом, поэтому в практике гидрогеологических расчетов часто используют неявные схемы, а также смешанные — явно-неявные, которые являются безусловно устойчивыми и равномерно сходящимися [24, 42].

Неявная схема может быть получена, если в уравнение (7.1) подставить горизонтальные приток и отток, определенные по уровням воды на конец интервала Δt, используя в формулах (7.2) выражения для $q_{\text{пр}}^{S+1}=f\left(H_i^{S+1}\right)$ и $q_{\text{от}}=f\left(H^{S+1}\right)$. В этом случае вместо выражения (7.7) получаем

$$\frac{H_i^{S+1}-H_i^S}{\Delta t}=\frac{T}{\mu}\left(\frac{H_{i-1}^{S+1}-2H_i^{S+1}+H_{i+1}^{S+1}}{\Delta x^2}\right)\pm\frac{w}{\mu}. \tag{7.11}$$

Явно-неявная, или так называемая схема Кранка—Никольсона, может быть получена аналогичным путем; при

$$q_{\text{пр}}^{S+1/2}=f\left(\frac{H_i^{S+1}+H_i^S}{2}\right)\text{ и }q_{\text{от}}=f\left(\frac{H_i^{S+1}+H_i^S}{2}\right)$$

она имеет вид

$$\frac{H_i^{S+1}-H_i^S}{\Delta t}=\frac{T}{2\mu}\left(\frac{H_{i-1}^S-2H_i^S+H_{i+1}^S+H_{i-1}^{S+1}-2H_i^{S+1}+H_{i+1}^{S+1}}{\Delta x^2}\right)\pm$$

$$\pm\frac{}{\mu}\cdot \tag{7.12}$$

Для нахождения по неявным схемам H^{S+1} из уравнений (7.11) и (7.12) требуется одновременно решить систему из трех как минимум линейных уравнений, если считать, что точки $i-2$ и $i+2$ являются граничными и в них известны уровни подземных вод или расход потока. В случае, если будет n узловых точек, то с помощью АВМ или ЭЦВМ решается система из n уравнений.

Установлено, что дискретизация по пространству влияет на точность решения меньше, чем по времени. Исследования показывают, что при $\tau=at/L^2\leqslant 0{,}3—0{,}6$ все разностные схемы при различных граничных условиях обеспечивают относительную погрешность в расчетах соответственно от 5 до 10 % при ограниченном числе шагов по

времени (от 3 до 8). При $\tau > 0{,}3$—$0{,}6$ погрешности резко возрастают; они неодинаковы в разных точках пласта и в различные моменты времени.

7.3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ ПО ЯВНОЙ СХЕМЕ

Наиболее просто усвоить принцип численного метода, рассмотрев ход такого решения по явной схеме с использованием уравнения (7.10) и условия (7.9а) при исследовании одномерной линейной нестационарной фильтрации.

Алгоритм расчета не зависит от конкретного вида фильтрации и типа решаемой задачи. Последовательность операций следующая:

1) выбираем расчетную схему и вид уравнения в конечных разностях (рис. 7.2, *а*). Принимаем равномерную сетку, т. е. $\Delta x = \text{const}$ и $w_a = 0$, тогда исходное конечно-разностное уравнение (7.10) имеет вид

$$H_i^{S+1} = \frac{H_{i-1}^S + H_{i+1}^S}{2} \text{ при } \frac{2kh_{ср}\Delta t}{\mu \Delta x^2}; \qquad (7.13)$$

2) определяем параметры разностной сетки и дискретное представление начальных и граничных условий. Примем число узловых точек $N = 4$, тогда шаг сетки определится как $\Delta x = L/N$. Разбив профиль на четыре блока, находим начальное положение уровня воды H_{i0} в каждой узловой точке расчетом по уравнению стационарной фильтрации или снимаем его с гидрогеологического разреза, построенного по материалам изысканий (см. рис. 7.2, *б*). Анализируем график изменения граничных условий (см. рис. 7.2, *в*) и принимаем

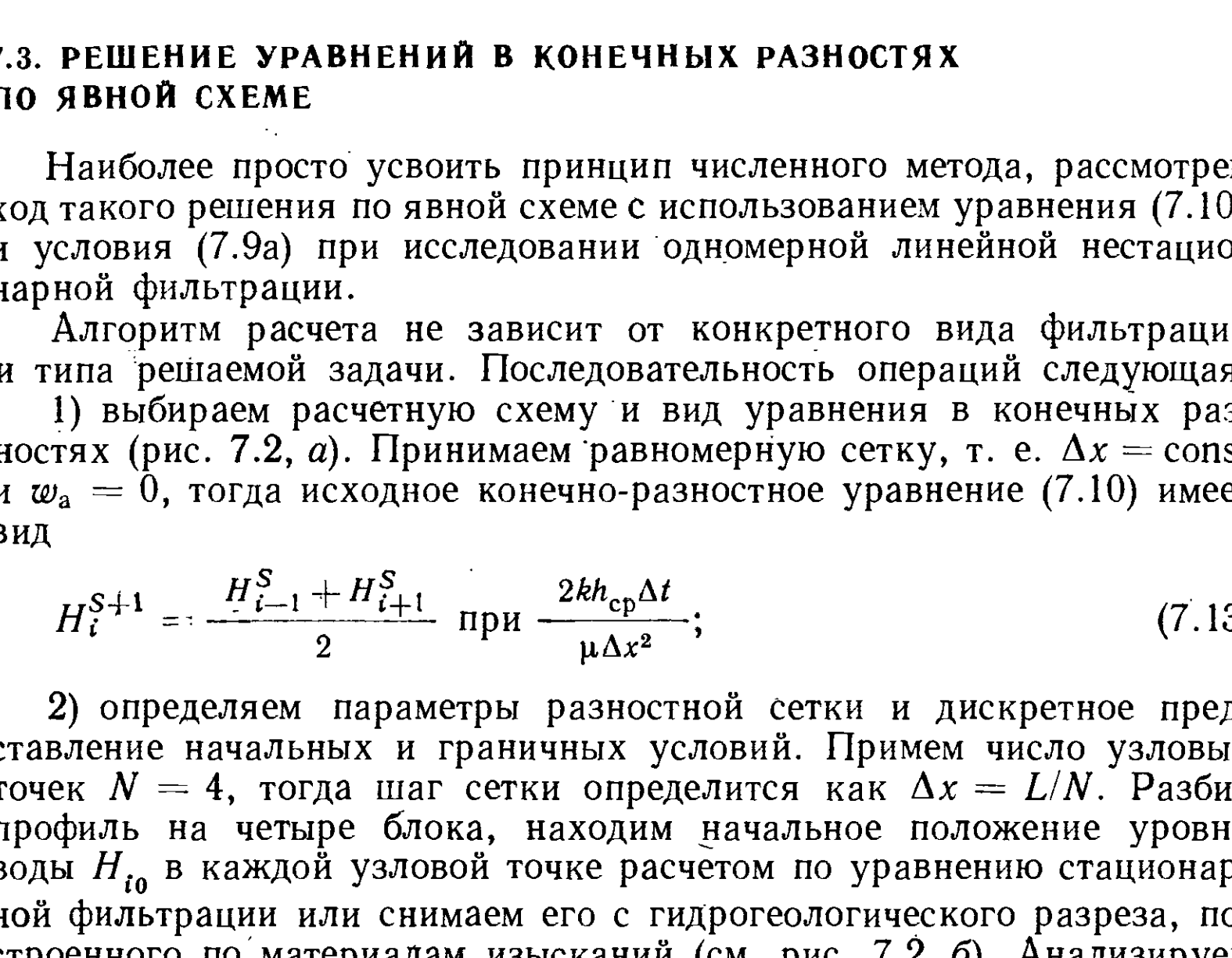


Рис. 7.2. Схема к исследованию одномериой линейной фильтрации численным методом по явной и неявной разиостным сеткам

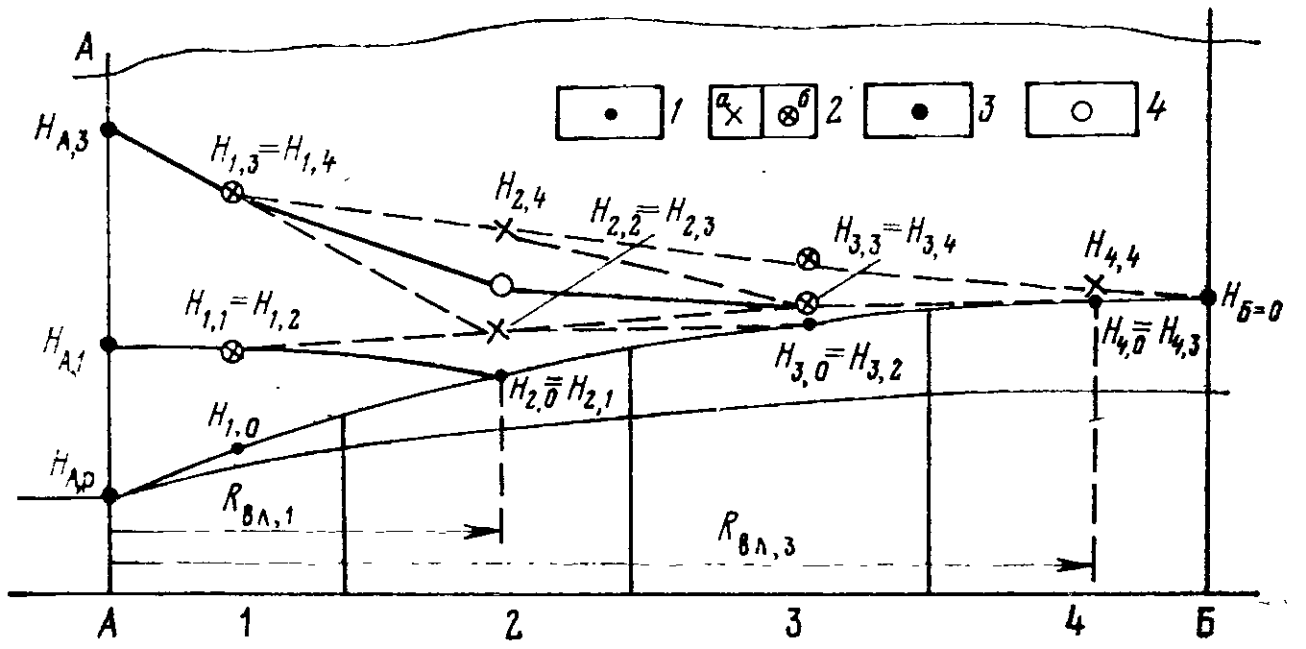


Рис. 7.3. Схема к графическому решению уравнения в конечных разностях (7.13) по явной схеме:

Точки: *1* — начальные узловые; *2—4* — расчетные (*2* — промежуточные (*а*) и основные (*б*) расчетные, *3* — граничные, *4* — интерполяционные)

предварительное значение шага по времени Δt и отвечающее ему значение граничного уровня H_{Aj} в сечении A, задав тем самым число M интервалов Δt, которыми аппроксимируется расчетное время прогноза $t_р = M\Delta t$ (при $j = 1, 2, \ldots, M$);

3) проверяем выполнение условия устойчивости (7.9а), и если оно не выполняется, то изменяем Δx или Δt так, чтобы при принятых параметрах пласта k, $h_{ср}$ и μ это условие выполнялось;

4) ведем расчет прогнозных значений H_i в узловых точках на принятые моменты времени $j = 1, 2, \ldots$ по уравнению (7.13), последовательно рассчитывая по тройкам сечений, начиная слева от граничной точки A и находя на нечетные моменты времени уровни в нечетных сечениях, на четные моменты — в четных. Тем самым ускоряется расчет и определяется положение кривой депрессии через $2\Delta t$. Для получения плавных кривых в промежуточных узлах уровни определяют интерполяцией.

Конечно-разностное уравнение (7.13) можно решить графически (рис. 7.3). Из рисунка хорошо видно, какие погрешности возникают при расчете относительно тех изменений, которые должны наблюдаться в действительности в соответствии с заданным граничным условием, определяющим развитие подпора грунтовых вод от подъема уровня воды на границе A.

З а д а ч а. Выяснить, завышаются или занижаются прогнозный уровень воды и прогнозная зона влияния подпора $R_{вл}$ в точках 1, 2 и 3 на моменты времени 1 и 3. Составить алгоритм решения при $w_а > 0$.

7.4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ * МЕТОДОМ ПРОГОНКИ ПО НЕЯВНОЙ СХЕМЕ

Наиболее часто решения разностных уравнений типа (7.11) на ЭЦВМ ведут методом прогонки и основанными на нем различными модификациями метода переменных направлений, подробно описанными в работе [42]. Рассмотрим решение прогнозной задачи методом прогонки по неявной схеме. Примем нестационарную одномерную фильтрацию в кусочно-однородном пласте с граничными условиями первого, второго и третьего родов. Используем неявную по (7.11) разностную схему. Вначале для простоты примем разностную схему, состоящую из четырех внутренних узлов и двух граничных (см. рис. 7.2). Каждый блок характеризуется своей водопроводимостью T, которую будем считать постоянной во времени. Запишем уравнение (7.11) для точки 2:

$$T_{1,2}\frac{H_1^{S+1}-H_2^{S+1}}{\Delta x_{1,2}}+T_{2,3}\frac{H_3^{S+1}-H_2^{S+1}}{\Delta x_{2,3}}+w_2\Delta x_2=\mu_2\Delta x_2\times$$

$$\times\frac{H_2^{S+1}-H_2^{S}}{\Delta t},$$

где $T_{1,2}$ и $T_{2,3}$ — средние значения водопроводимости при движении воды перпендикулярно к границе раздела, $T_{1,2}=T_1T_2/(T_1+T_2)$ и $T_{2,3}=T_2T_3/(T_2+T_3)$; $\Delta x_{1,2}$ и $\Delta x_{2,3}$ — средние расстояния между узловыми точками $\Delta x_{1,2}=(\Delta x_1+\Delta x_2)/2$ и $\Delta x_{2,3}=(\Delta x_2+\Delta x_3)/2$.

Перепишем полученное уравнение в более компактном виде

$$A_2H_1^{S+1}-B_2H_2^{S+1}+C_2H_3^{S+1}=-D_2, \tag{7.14}$$

где

$$A_2=\frac{T_{1,2}}{\Delta x_{1,2}}=\frac{2T_1T_2}{T_1\Delta x_2+T_2\Delta x_1}; \tag{7.15}$$

$$C_2=\frac{T_{2,3}}{\Delta x_{2,3}}=\frac{2T_2T_3}{T_2\Delta x_3+T_3\Delta x_2};$$

$$B_2=A_2+C_2+\frac{\mu_2\Delta x_2}{\Delta t}; \tag{7.16}$$

$$D_2=\frac{\mu_2\Delta x_2}{\Delta t}H_2^S+w_2\Delta x_2. \tag{7.17}$$

Аналогично для точки 3 имеем:

$$A_3H_2^{S+1}-B_3H_3^{S+1}+C_3H_4^{S+1}=-D_3. \tag{7.18}$$

---

* Раздел написан В. И. Угорцом при участии И. К. Гавич.

наблюдений отвечают принятой расчетной схеме, а определяющие свойственную ей динамику факторы являются режимообразующими; 2) обоснованно планировать число и схему размещения наблюдательных точек, частоту и длительность наблюдений, так как появляется возможность имитационным моделированием на основе инвариантных графиков проанализировать эффективность работы будущей наблюдательной сети. В настоящее время такая оценка эффективности наблюдательной сети отсутствует.

10.7. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Принципы составления и решения уравнения в конечных разностях изложены в разд. 7.3. Дополним эти принципы. При построении депрессионных кривых можно определить на каждый момент времени Δt величину расхода $q_{\Delta t}$ в любом сечении потока и величину потерь $\Delta V_{\Delta t}$

$$q_{\Delta t} = \frac{\Delta V_{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\sum_{1}^{n} F_{\text{нас } i} \mu_i}{\Delta t}, \qquad (10.29)$$

где n — число участков вдоль профиля с разными значениями μ_i; $F_{\text{нас. } i}\,\mu_i$ — объем воды, затраченный за время Δt на насыщение (или осушение) участка пласта площадью $F_{\text{нас. } i}$, которая определяется по графику $\Delta H_{x,\,t} = f(x)$ как площадь между кривыми на начало и конец интервала Δt.

Суммарный объем потерь равен $V_{\text{об}} = \sum_{1}^{m} V_{\Delta t,\,j}$, где m — число интервалов Δt, $m = t_{\text{р}}/\Delta t$; $j = 1, 2, 3, \ldots, m$. По значениям $q_{\Delta t,\,j}$ и $V_{\Delta t,\,j}$ строят графики изменения расхода и потерь во времени для любого сечения, чаще всего для $x = 0$. При применении аналоговых вычислительных машин технология расчета сохраняется, использование ЭЦВМ позволяет всю обработку информации автоматизировать.

10.8. ЕДИНАЯ МОДЕЛЬ «ЗОНА АЭРАЦИИ — ГРУНТОВЫЕ ВОДЫ»

Рассмотрим некоторые подходы к постановке задачи, в которой подземные и поверхностные воды, ландшафт и климат являются элементами единой гидрогеологической системы и связаны между собой прямыми и обратными связями. Такого типа модель за рубежом рассмотрена в работах Дж. Рубина, Б. Верруйтаи, А. Фриза [60], а в нашей стране — в работах И. С. Пашковского [56], В. В. Бадова и А. А. Киселева, А. Б. Борисова, Л. М. Рекса и А. Б. Ситникова [46]. Она описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{\text{в}}\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_{\text{в}}\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{\text{в}}\frac{\partial H}{\partial z}\right)+\varepsilon = C\frac{\partial H}{\partial t}, \qquad (10.30)$$

в котором при $H < z\,k_{\text{в}}$, C являются функциями H, при $H \geqslant z\,k_{\text{в}} = k$, $C = \mu^*$; ε — интенсивность действия корневой системы растительно-

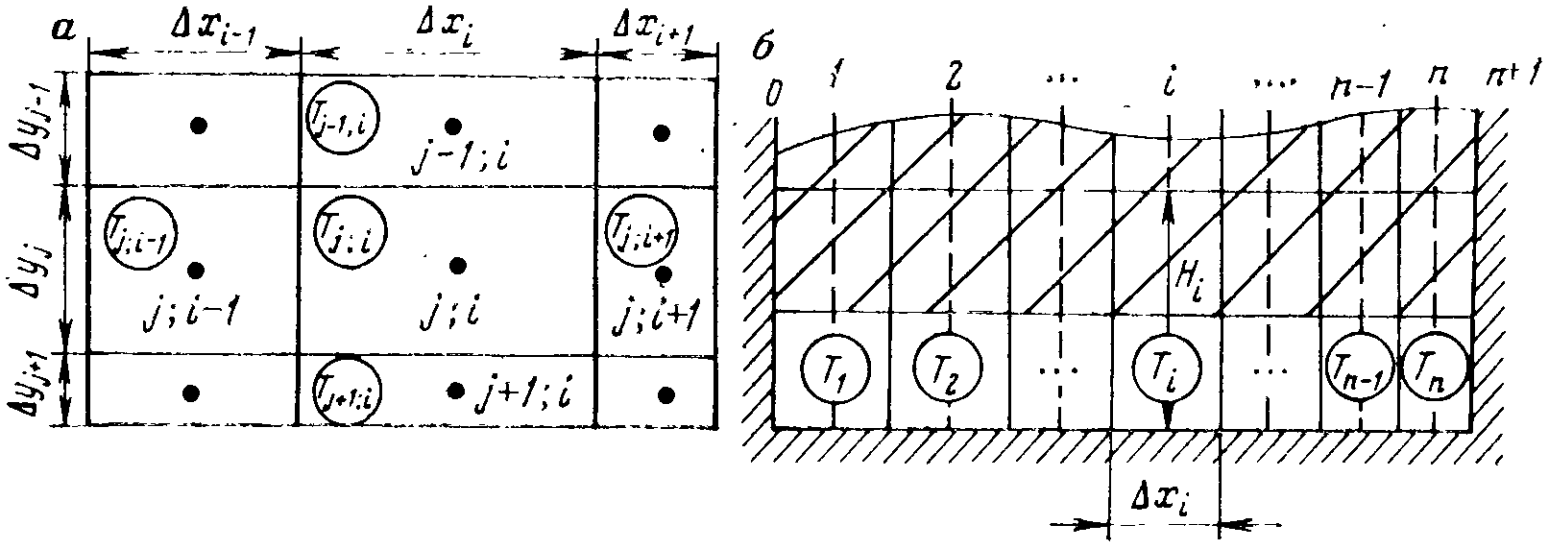


Рис. 7.4. Разностная сетка из n узловых точек для исследования одномерной нестационарной фильтрации ($б$) и фрагмент прямоугольного шаблона для исследования плановой фильтрации ($а$)

При рассмотрении напорной фильтрации $\mu_i = \mu_i^*$. Полная система n уравнений принимает вид

$$\left.\begin{aligned}
&-B_1H_1 + C_1H_2 = -D_1\\
&A_2H_1 - B_2H_2 + C_2H_3 = -D_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&A_{n-1}H_{n-2} - B_{n-1}H_{n-1} + C_{n-1}H_n = -D_{n-1}\\
&A_nH_{n-1} - B_nH_n = -D_n
\end{aligned}\right\}. \qquad (7.25)$$

Коэффициенты A_1 и C_n равны нулю, что свидетельствует о наличии непроницаемых границ $А$ и $Б$ в крайних блоках с индексами 0 и $n+1$ (см. рис. 7.4, $б$).

Для точки $i = 1$ из первого уравнения системы (7.25) запишем

$$H_1 = \frac{D_1}{B_1} + \frac{C_1}{B_1} H_2 \qquad (7.26)$$

и, обозначив

$$\alpha_1 = D_1/B_1 \text{ и } \beta_1 = C_1/B_1, \qquad (7.27)$$

получим вместо (7.26) выражение

$$H_1 = \alpha_1 + \beta_1 H_2. \qquad (7.28)$$

Для точки $i = 2$ из второго уравнения системы (7.25) имеем:

$$H_2 = \frac{D_2}{B_2} + \frac{A_2}{B_2} H_1 + \frac{C_2}{B_2} H_3. \qquad (7.29)$$

Подставив (7.28) в выражение (7.29), получим

$$H_2 = \frac{D_2 + A_2\alpha_1}{B_2 - A_2\beta_1} + \frac{C_2}{B_2 - A_2\beta_1} H_3.$$

Обозначив в общем случае как прогоночные коэффициенты

$$\alpha_i = \frac{D_i + A_i\alpha_{i-1}}{B_i - A_i\beta_{i-1}}; \quad \beta_i = \frac{C_i}{B_i - A_i\beta_{i-1}}, \tag{7.30}$$

получим зависимость для определения уровня в точках до n—1

$$H_i = \alpha_i + \beta_i H_{i+1}; \quad i = 1, \ldots, n-1 \tag{7.31}$$

и для последней точки имеем:

$$i = n, \; H_n = \alpha_n. \tag{7.32}$$

Рассмотрим принципы представления границ первого, второго и третьего родов. Положим, что в i-й точке находится река — граница первого рода, где задано $H_i^k = \text{const}$ или $H_i^k = f(t)$. Тогда уравнение (7.20) можно записать следующим образом:

$$H_i = \frac{D_i}{B_i} + \frac{A_i}{B_i} H_{i-1} + \frac{C_i}{B_i} H_{i+1}, \tag{7.33}$$

откуда видно, что, если относительно A_i и C_i существенно увеличить коэффициенты B_i и D_i (порядка до 10^{10} и более путем увеличения μ), то второй и третий члены уравнения практически исключаются и при учете (7.23) и (7.24) имеем:

$$H_i \approx \frac{D_i}{B_i} \approx \frac{10^{10} H_i^k}{10^{10}} = H_i^k. \tag{7.34}$$

Граничное условие второго рода $q_i^k = \text{const}$ или $q_i^k = f(t)$ с физической точки зрения соответствует дополнительному притоку (оттоку) воды в i-й блок, что представляется изменением коэффициента D_i в уравнении (7.34) на величину q_i^k.

Граничное условие третьего рода в обобщенном виде записывается как

$$q_i = p_i(H_i^k - H_i^{S+1}), \tag{7.35}$$

где p_i — параметр проводимости, используемый, например, при моделировании процессов фильтрации в русловых отложениях при закольматированном русле реки или перетекания из соседнего выше (или ниже) лежащего слоя, $p_i = k_0/(m_0\Delta x_i)$; H_i^k — постоянный напор. В этом случае в уравнении (7.34) коэффициенты B_i и D_i увеличиваются соответственно на величины p_i и $p_i H_i^k$. Форма задания граничных условий показана в табл. 7.1.

При наличии в граничных блоках 0 и $n+1$ границ первого рода в виде $H_0^k = H_A = \text{const}$ и $H_{n+1}^k = H_0 = \text{const}$, эти значения входят, как видно из выражения (7.19), в структуру уравнения в конечных разностях, и тогда в системе (7.25) первые и последние уравнения принимают вид $A_1 H_A - B_1 H_1^{S+1} + C_1 H_2^{S+1} = -D_1$; $A_n H_{n-1} - B_n H_n + C_n H_Б = -D_n$ или, переписывая по типу зависимости (7.26) с учетом выражений (7.27), (7.31), имеем:

$$H_1 = (A_1/B_1) H_A + \alpha_1 + \beta_1 H_2; \tag{7.36}$$

$$H_n = \alpha_n + \beta_n H_Б. \tag{7.36а}$$

Таблица 7.1. Задание граничных условий (ГУ) при численном решении методом прогонки

Гидрогеологическое содержание	Вид граничного условия	Математическая запись	Форма задания ГУ	
			B_i	D_i
Реки, каналы, озера, дрены, гидроизогипсы	ГУ-I	$H_i^k = \text{const}$; $H_i^k = f(t)$	10^{10}	$10^{10} H_i^k$
Приток, отток, скважины	ГУ-II	$q_i^k = \text{const}$; $q_i^k = f(t)$	—	q_i
Перетекание, испарение, родник, заиленные канал, дрена или река	ГУ-III	$q_i = p_i (H_i^k - H_i)$	p_i	$p_i H_i^k$

Из сказанного выше видно, что алгоритмы решения задачи для пласта с непроницаемыми и открытыми границами различны, так как в последнем случае необходимо предварительно вычислять значения H_0^k и H_{n+1}^k по формуле (7.33) при условии $\mu \geqslant 10^{10}$. Тогда $B_0 \geqslant 10^{10}$, $B_{n+1} \geqslant 10^{10}$, $D_0 \geqslant 10^{10} H_0^k$, $D_{n+1} \geqslant 10^{10} H_{n+1}^k$ и $H_0^k = H_A$, а $H_{n+1}^k = H_Б$. Аналогично поступают при наличии в точках 0 и $n+1$ граничных условий второго и третьего родов (см. табл. 7.1).

Для задания начальных условий необходимо решить систему уравнений (7.25), приняв в коэффициентах B_i и D_i $\mu = 0$ для всех n узловых точек.

Общий алгоритм метода прогонки на любой шаг Δt_j может быть представлен следующим образом.

1. По формулам (7.21) — (7.24) определяют коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i уравнения (7.20) для всех n внутренних точек сетки. При этом для вычисления D_i по формуле (7.24) в качестве значений H_i^S принимают уровни, полученные на предыдущем шаге Δt_{j-1} (для первого шага — из начальных условий).

2. Сначала по формуле (7.27), затем по (7.30) рассчитывают прогоночные коэффициенты α_i и β_i.

3. При непроницаемых границах в точках 0 и $n+1$ вычисляют значение искомого уровня H сначала в последней точке n по формуле (7.32), а затем по формуле (7.31) обратной прогонкой последовательно определяют значения H для точек n—1, . . . , 1. На этом расчет для принятого интервала Δt_j заканчивается и для следующего интервала Δt_{j+1} переходят опять к пункту 1 и т. д., повторяя расчет M раз, исходя из условия, что $M = t_р/\Delta t$ при $j = 1, 2, \ldots, M$.

4. При границах первого рода в точках 0 и $n+1$ вычисляют значения $H_0^k = H_A$ и $H_{n+1}^k = H_Б$ по формуле (7.33) при условии $\mu \geqslant 10^{10}$, $B_0 = 10^{10}$, $B_{n+1} = 10^{10}$, $D_0 = 10^{10} H_A$, $D_{n+1} = 10^{10} H_Б$.

5. По формуле (7.36а) определяют значение искомого уровня H в последней точке n, а затем обратной прогонкой — значение H в точках $n-1, \ldots, 2$ по формуле (7.31), а в точке 1 — по (7.36). Для следующего интервала Δt_{j+1} повторяют операции, описанные в пунктах 1, 2, 4, 5. Для удобства вычислений систему (7.25) обычно представляют в матричном виде [42, 26].

В решении системы уравнений (7.25) для грунтовых вод появляется нелинейность в связи с тем, что величина водопроводимости становится зависимой от искомой величины напора

$$T_i = k_i(H_i - H_{в_i}),$$

где $H_{в_i}$ — отметка кровли водоупора. В большинстве случаев нелинейные задачи сводятся к итерационной процедуре решения линейных задач по следующему алгоритму: 1) вводят новую переменную $\bar{H}_i = H_i^s$; 2) в результате решения системы (7.25) определяют уровни воды H_i^{s+1}, которые сопоставляются с величинами $\bar{H}_i$; 3) если выполняется условие

$$\max_i \left| \frac{\bar{H}_i^{s+1} - \bar{H}_i}{\bar{H}_i} \right| \leqslant \varepsilon$$

(где ε — заданная малая величина), то решение нелинейной задачи считается законченным, если нет, то $\bar{H}_i = \bar{H}_i^{s+1}$, и возвращаются к пункту 2.

При изучении плановой фильтрации для конечно-разностной аппроксимации дифференциального уравнения (6.50) используется пятиточечный шаблон, показанный на рис. 7.4, *а*.

Для решения систем уравнения в этом случае используется метод переменных направлений ADI (или продольно-поперечной прогонки) [42].

7.5. МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК МЕТОД ИЗУЧЕНИЯ ГДС

Понятие о моделировании. М о д е л и р о в а н и е — это воспроизведение на специальных моделях различных объектов и свойственных им процессов и явлений для получения о них новой информации, используемой при решении научных и практических задач. Понятие «моделирование» многообразно [11]. Например, под моделированием можно понимать процесс гидрогеологического картирования, которое завершается построением комплекса геологических и гидрогеологических карт и разрезов, представляющих изучаемый объект в виде графической модели (см. рис. 5.1). Схематизация геолого-гидрогеологической обстановки позволяет представить объект в виде расчетной схемы и дифференциального уравнения. Решив замкнутую систему аналитическим методом, получим конкретное уравнение, которое будет з н а к о в о й м а т е м а т и ч е с к о й м о д е л ь ю о б ъ е к т а. Если эту же систему решать численным методом на ЭЦВМ, то математическая модель объекта будет представлена системой конечно-

разностных уравнений типа (7.25). При этом сам объект из непрерывной области превратится в дискретную, а непрерывный процесс фильтрации — в дискретный. Такая математическая модель объекта называется разностной и представляется массивом чисел, который выдает вычислительная машина на специальном бланке.

Используя специальное вычислительное устройство, можно построить овеществленную, так называемую аналоговую, модель объекта. Действие отдельных элементов такого устройства воспроизводит процессы, аналогичные фильтрации и насыщению (или осушению). Одновременно они работают как вычислительные элементы, что позволяет решать систему дифференциальных или конечно-разностных уравнений. При таком моделировании изучение гидрогеологического процесса заменяют изучением другого процесса, который в лабораторной обстановке воспроизводится более просто и наглядно. Такая замена возможна, потому что многие процессы характеризуются тождественностью математических уравнений, описывающих эти процессы (см. разд. 6.9). Так, процессы фильтрации воды в пористой среде, движения электрического тока в проводнике и распространения тепла в твердом теле описываются одинаковыми с математических позиций законами Дарси $Q = \Delta H/\Phi$, Ома $I = \Delta U/R$, Фурье $Q_t = \Delta T^0 R_t$ (где Q, I, Q_t — соответственно расход потока, сила тока, количество тепла; ΔH, ΔU, ΔT^0 — разности напоров, потенциалов, температур; Φ, R, R_t — фильтрационное, электрическое, тепловое сопротивления). Поэтому можно построить электрическую аналоговую вычислительную машину (АВМ) и на ней изучать процесс фильтрации. Можно построить физическую модель объекта, в которой сохраняется физическое подобие процессов, но в определенном масштабе изменяются геометрические размеры объекта.

И, наконец, при изучении очень сложного природного объекта можно не строить для него модель, а найти аналогичный природный объект, в котором изучаемые гидрогеологические процессы уже полностью или частично себя проявили и результаты этого развития «перенести» на исследуемый объект. Такой способ расчета носит название метода аналогий. Если при сравнении объектов используются критерии подобия, то такой перенос результатов называется натурным моделированием [11]. Аналитические расчеты можно назвать знаковым моделированием.

Все гидрогеологические процессы протекают в конкретной геологической обстановке, поэтому математическая модель гидрогеологического объекта двойственна: она отображает механизм процесса и гидрогеологическую структуру изучаемой ГДС. Геологическая информация об объекте всегда является неполной, поэтому модель с той или иной степенью приближения отображает реальный объект.

Принципы моделирования на цифровых и аналоговых вычислительных машинах. При использовании ЭЦВМ и АВМ требуется доказать, что модели будут воспроизводить изучаемый процесс близко к реальному. Такие доказательства основываются на теории подобия и включают следующие необходимые и достаточные требования [11]:

1) замкнутые системы уравнений, описывающие процесс на объекте и модели, должны быть тождественны; 2) определяющие эти процессы критерии должны быть равны между собой.

О п р е д е л я ю щ и м к р и т е р и е м называют безразмерный комплекс из размерных сомножителей, содержащий основные переменные и не включающий искомую функцию. О п р е д е л я е м ы й к р и т е р и й содержит искомую функцию. В разд. 6.9 были получены критерии, характеризующие три основных типа нестационарной фильтрации: а) только с горизонтальным водообменом — критерий Фурье (6.48); б) только с вертикальным инфильтрационным водообменом — критерий (6.51а); в) при наличии гидравлической связи между пластами добавляется критерий (6.51б). Критерий Фурье — определяющий, а критерии вертикального водообмена — определяемые.

В разд. 6.9 было показано, что дифференциальные уравнения можно преобразовать в безразмерную, т. е. критериальную, форму, что и доказывает математическую тождественность описания различных физических процессов.

Критериальные уравнения (6.49), (6.52) и (6.53) используются в качестве теоретической основы методов аналогового моделирования, так как критерии, входящие в эти уравнения, определяют необходимые и достаточные условия для воспроизведения исследуемого процесса на модели. Идентичность критериев-комплексов типа (6.48), (6.51а) и (6.51б) для природного и аналогичного ему процесса на модели позволяет преобразовать их в так называемые у р а в н е н и я с в я з и м а с ш т а б н ы х к о э ф ф и ц и е н т о в. Последние характеризуют соотношение аналогичных величин в натуре и на модели и используются для перехода от природных величин к модельным при построении математической модели и, наоборот, при переносе полученных результатов на объект. Действительно, если считать, что процесс фильтрации, описываемый уравнением (6.18), тождественно воспроизводится на электрической модели, то для нее должно быть справедливо то же уравнение, а процесс движения электрического тока в проводнике должен определяться критерием, аналогичным критерию Фурье. Тогда для электрической модели уравнение (6.49) принимает вид $\bar{U} = f\left(\bar{x}_э;\ \bar{y}_э;\ F_{0_э}\right)$, где $\bar{U}$ — безразмерное выражение электрического потенциала, аналога $\bar{H}$; $\bar{x}_э$ и $\bar{y}_э$ — безразмерные координаты пространства в электрической области; $F_{0_э}$ — критерий Фурье, связывающий по типу выражения (6.48) характеристики аналогичной электрической среды, $F_{0_э} = a_э t_э / l_э^2$. Из условия тождественности процессов $F_0 = F_{0_э}$ и, следовательно, $at/l^2 = a_э t_э / l_э^2$. Имея в виду аналогию законов Дарси и Ома, можно воспользоваться понятием общего фильтрационного сопротивления $\Phi = l/(Tb)$, где l и b — длина и ширина элемента потока в плане; T — его водопроводимость. Обозначая общую водоемкость пласта $C = \mu lb$ и принимая единичный поток с площадью в плане $lb = \Delta x^2$, критерий Фурье для объекта можно представить в таком виде:

$$F_0 = \frac{at}{\Delta x^2} = \frac{Tt}{\mu \Delta x^2} = \frac{t}{C\Phi},$$

а для модели

$$F_{0э} = t_э / C_э R_э,$$

где $R_э$ и $C_э$ — соответственно общие электрические сопротивление и емкость элемента модели. Вводя масштабные соотношения $\alpha_C = C_э/C$ и $\alpha_R = R_э/\Phi$ и помня, что по условию $F_0 = F_{0э}$, получим зависимость

$$\alpha_C \alpha_R / \alpha_t = 1, \qquad (7.37)$$

которая широко известна в моделировании и называется уравнением связи масштабных коэффициентов.

Критериальное уравнение (6.49) не представляло замкнутую систему, и поэтому основные требования моделирования выполнены не полностью. Необходимо проверить тождественность условий однозначности и выяснить, нет ли в них еще какого-либо критерия и соответственно уравнения связи масштабных коэффициентов. Граничные условия первого рода и начальные условия содержат только функцию H, а граничные условия второго и третьего родов включают расход потока. Следовательно, положив тождественность уравнений Дарси и Ома как критериев расхода и силы тока в виде $Q\Phi/\Delta H = I R_э/\Delta U$ и вводя масштабные соотношения $\alpha_I = I/Q$, $\alpha_U = \Delta U/\Delta H$, получим еще одно уравнение связи

$$\alpha_I \alpha_U / \alpha_R = 1. \qquad (7.38)$$

Таким образом устанавливаем, что моделирование нестационарной фильтрации на электрической модели осуществляется с использованием пяти масштабных коэффициентов и двух уравнений их связи, согласно которым два масштаба рассчитываются из зависимостей (7.37) и (7.38) — обычно это α_I и α_t, а остальные задаются произвольно в соответствии с конструктивными особенностями АВМ. Подробно теория моделирования гидрогеологических процессов изложена в работах [11, 26], а методика и технология моделирования — в работе [17].

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем суть метода сеток?
2. Почему уравнение в конечных разностях выражает гидродинамическую связь режима и баланса потока подземных вод?
3. Что такое явная и неявная разностные схемы? Запишите отвечающие им уравнения в конечных разностях.
4. Как вы понимаете термины «сходимость» и «устойчивость»? Какой вид имеет критерий, по которому оценивают устойчивость явной разностной схемы?
5. В чем суть метода прогонки? Запишите формулы для прогоночных коэффициентов и объясните, что в них представляют собой коэффициенты A_i, C_i, B_i и D_i?
6. Как представляются в методе прогонки граничные условия первого, второго и третьего родов, в каком виде записываются отвечающие им уравнения?
7. Что такое алгоритм решения задачи?

8. Что такое моделирование и на какие классы оно подразделяется?
9. В чем двойственность гидрогеологических моделей?
10. В чем сходство и различие моделирования на АВМ и ЭЦВМ?
11. Что такое уравнение связи масштабных коэффициентов и как оно может быть получено?

Глава 8

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЛАГОПЕРЕНОСА В ГГС

8.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИЗУЧЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА

Движение влаги в условиях неполного насыщения ею пород зоны аэрации в гидрогеологии изучается давно [1, 19]. Оно базировалось на гидравлической предпосылке о независимости параметров процесса от влажности пород, что давало возможность пользоваться уравнением Дарси (4.12).

В последние 15 лет резко повысился интерес к строгой математической теории этого движения в связи с детальным изучением условий питания грунтовых вод под влиянием орошения, решением проблем охраны таких вод от истощения и загрязнения и т. д. К этому времени многие аспекты влагопереноса были уже исследованы, главным образом в почвоведении, как у нас в стране, так и за рубежом — А. А. Роде, С. В. Нерпиным, А. Ф. Чудновским, А. Н. Будаговским, А. М. Глобусом, И. И. Судницыным [47], В. Гарднером, Е. Чайлдсом, А. Клютом и др. Эти результаты использовали гидрогеологи. Появились математические модели, в которых зоны аэрации и насыщения рассматривались как одна область, границами которой являются поверхность земли, поверхностные водотоки и региональный водоупор, подстилающий верхнюю часть многопластовой зоны насыщения. В этом случае уровень грунтовых вод как внешняя граница не рассматривается, а определяется в процессе решения задачи. Такие постановки задач излагаются в работах И. С. Пашковского [56], В. В. Бадова, А. Б. Ситникова [46] и др. [49]. Математическая теория влагопереноса рассматривается в работах Н. Н. Веригина, П. Я. Полубариновой-Кочиной [40], С. Т. Рыбаковой, Л. Лукнера [26], Л. М. Рекса, Дж. Рубина, В. Я. Кулика.

Изучение влагопереноса в математическом отношении очень сложно. Все параметры процесса зависят от влажности, т. е. от искомой функции, вследствие этого дифференциальные уравнения нелинейны. Обычно влагоперенос исследуют как одномерный по вертикали. Несмотря на возможность решения совместной задачи для зон аэрации и насыщения, во многих случаях целесообразно их разделение. В первую очередь это относится к региональным математическим моделям, в которых размеры геофильтрационных потоков в плане значительно превышают мощность зоны аэрации, поэтому движение влаги в ней интегрируется и рассматривается некоторая усредненная интенсивность ω инфильтрационного питания, поступающего на уровень грунтовых вод. В локальных моделях эти зоны соизмеримы, и

при составлении краткосрочных прогнозов требуется детальный учет в верхней части зоны аэрации процессов эвапотранспирации, деятельности корневой системы растительности, просачивания осадков, формирования поверхностного стока и других сложных взаимодействий капиллярной и гравитационной влаги. В таких условиях задача должна формулироваться как единая для зон аэрации и насыщения.

Исследование влагопереноса важно для повышения качества гидрогеологического обоснования проектов оросительных систем и достоверности прогнозов изменения гидрогеологической обстановки на орошаемых территориях. Знание физических и математических основ теории влагопереноса необходимо и для понимания тех экологических задач, которые гидрогеологи должны решать совместно с другими специалистами, предоставляя им необходимую информацию.

8.2. ДЕЙСТВУЮЩИЕ СИЛЫ И ПАРАМЕТРЫ ВЛАГОПЕРЕНОСА

Процесс движения влаги в зоне аэрации, представляющий собой перенос свободной и молекулярной влаги под действием гравитационных и сорбционных (молекулярных и капиллярных) сил, называют влагопереносом. Он развивается в трехфазной среде (порода—вода—воздух), и его показатели $k_в$ и H зависят от влажности пород. Если влажность по разрезу постоянна и равна $\theta_{мм}$ или $\theta_{нв}$, действие сорбционных сил приближенно оценивается половиной высоты капиллярного поднятия, а градиент и скорость движения определяются по уравнению Дарси, то процесс называют инфильтрацией.

Действие основных сил при влагопереносе математически можно выразить так же, как действие процесса фильтрации. Если рассмотреть движение в вертикальной плоскости по координате z, то, как видно из рис. 8.1, напор H в соответствии с выражением (2.7) определится как

$$H = \frac{p_к}{\gamma} + z = -\psi + z, \tag{8.1}$$

где z — геометрическая высота положения точки над плоскостью сравнения, принятой по линии уровня грунтовых вод; ψ — высота всасывания.

Давление всасывания $p_к$ является аналогом гидростатического давления p, измеряется в паскалях и определяется зависимостью (2.6). По аналогии с пьезометрической высотой имеем

$$p_к/\gamma = -\psi, \tag{8.2}$$

где γ — объемная масса воды. Для пресной воды $p_к$ численно равно $-\psi$. Знак минус указывает, что $p_к$ действует в направлении, обратном действию силы тяжести. При влажности породы, равной полной влагоемкости, $p_к = 0$. Величина z характеризует действие гравитационных сил. Высота всасывания, как и давление, зависит от влажности пород. Высоту всасывания ψ часто называют потенциалом влаги, а изолинии ψ — изолиниями потенциала влаги; аналогично изолиниям напоров они характеризуют

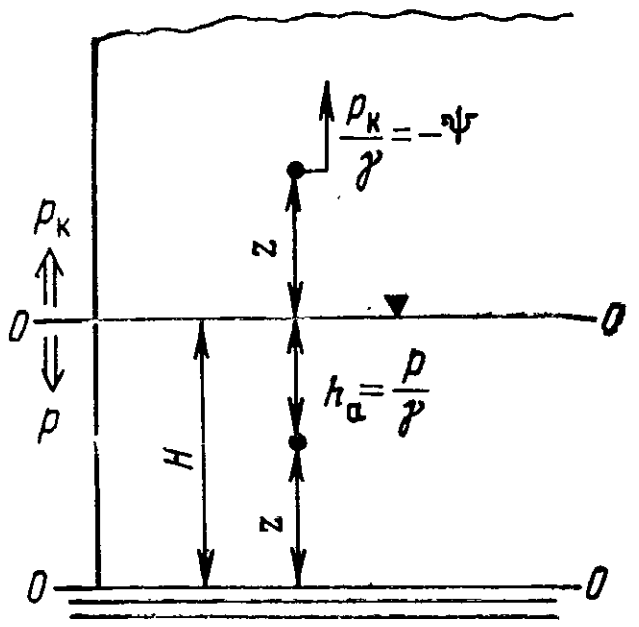


Рис. 8.1. Расчетная схема к анализу влагопереноса

гидродинамическую структуру потока влаги. При однородном строении зоны аэрации изолинии потенциала влаги совпадают с изоплетами влажности; при неоднородном строении совпадения нет.

К основным параметрам влагопереноса относят $p_к$, ψ и $k_в$. Все они зависят от влажности и определяются экспериментально [1, 46, 47, 49]. Кривая $\psi = f(\theta)$ в почвоведении называется основной гидрофизической характеристикой (ОГХ). Она зависит от гранулометрического состава и водных свойств пород и существенно различается для песков, супесей и суглинков. Типовые кривые $\psi = f(\theta)$ приведены на рис. 8.2, *а*, а экспериментальные зависимости для лёссовидных пород Восточного Предкавказья — на рис. 8.3, *а*, *в*. Связь ψ с θ неоднозначна и зависит от процесса ее получения: при увлажнении сухого образца каждому значению ψ соответствует минимальное значение влажности, а при осушении образца, предварительно насыщенного водой, тем же значениям ψ отвечают максимальные значения влажности. Это свидетельствует о наличии гистерезиса (см. рис. 8.2, *б*). Для расчетов экспериментальную кривую $\psi f(\theta)$ аппроксимируют различными аналитическими зависимостями [56]:

$$\psi = -h_к \ln\bar{\theta}, \tag{8.3}$$

$$\bar{\theta} = \frac{\theta - \theta_{мм}}{\theta_п - \theta_{мм}} \quad \text{при} \quad \theta_{мм} \leqslant \theta \leqslant \theta_п, \tag{8.3а}$$

где $h_к$ — приведенная высота капиллярного поднятия, эквивалентная интегрально полному влагосодержанию капиллярной зоны высотой $H_к$; величина $\theta_п - \theta_{мм} = \mu_0$ определяется по уравнению (3.15)·

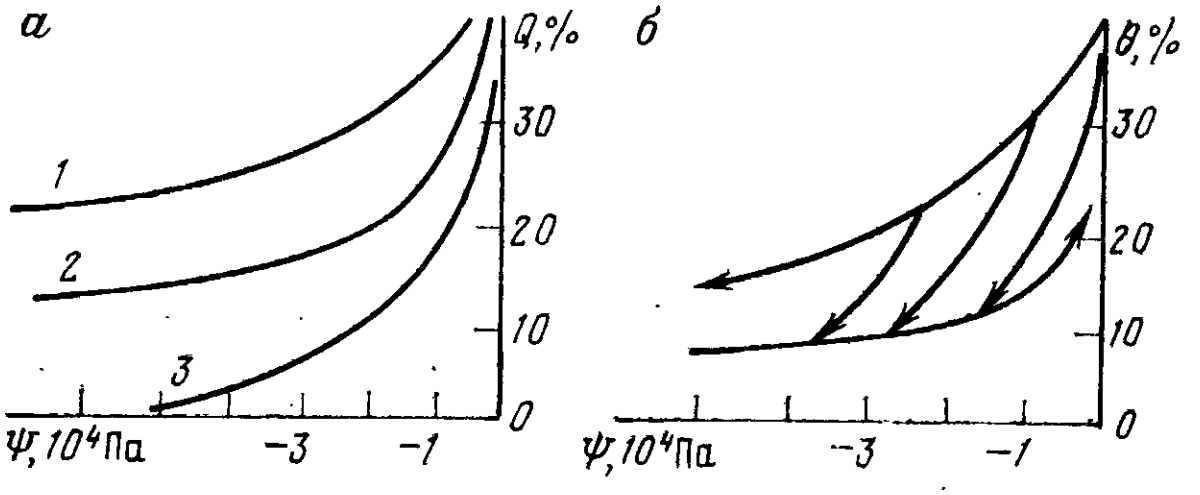


Рис. 8.2. Типовые кривые потенциала влаги ψ (*б*) и коэффициента влагопереноса Q (*а*) для суглинка (*1*), супеси (*2*) и песка (*3*).

Стрелки, направленные в сторону увеличения влажности, определяют увлажнение, а направленные в сторону уменьшения — иссушение

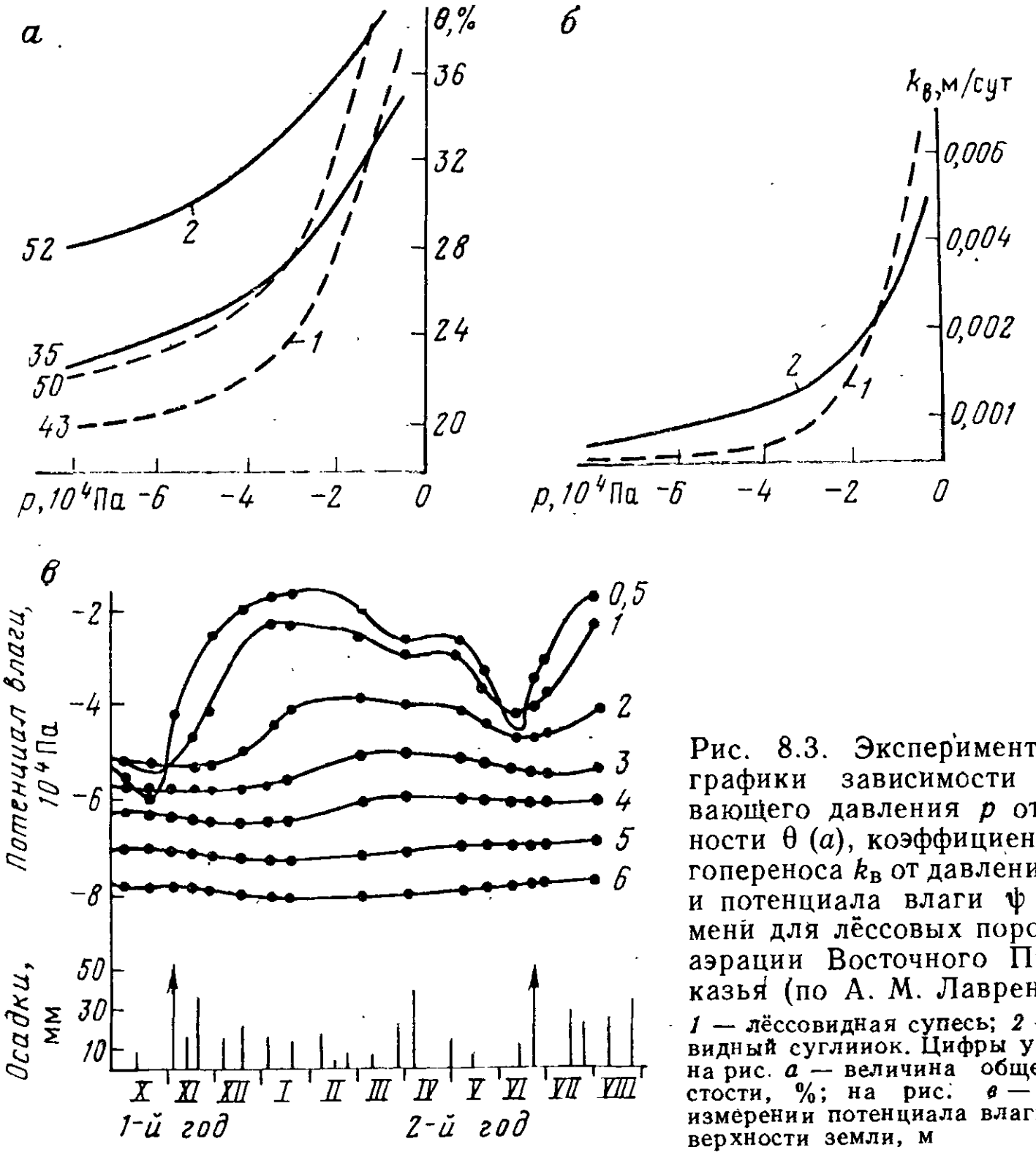


Рис. 8.3. Экспериментальные графики зависимости всасывающего давления p от влажности θ ($а$), коэффициента влагопереноса $k_в$ от давления p ($б$) и потенциала влаги ψ от времени для лёссовых пород зоны аэрации Восточного Предкавказья (по А. М. Лаврентьеву):

1 — лёссовидная супесь; *2* — лёссовидный суглинок. Цифры у кривых на рис. *а* — величина общей пористости, %; на рис. *в* — глубина измерении потенциала влаги от поверхности земли, м

Связь $k_в$ с влажностью изучалась многими исследователями экспериментальным путем, она аппроксимируется типовыми зависимостями (степенной, логарифмической и экспонентой) [56]. Наиболее часто используется зависимость типа (3.14), предложенная С. Ф. Аверьяновым [1]. На рис. 3.4, *б* приведены типовые зависимости $\bar{k} = k_в/k$ от $\bar{\theta}$ различных пород, построенные по уравнению (3.14).

На рис. 8.3, *б* показаны экспериментальные зависимости, полученные А. М. Лаврентьевым для лёссовых пород Восточного Предкавказья. Уменьшение влагосодержания (увеличение абсолютного значения $p_к$) ведет к резкому уменьшению $k_в$, что соответствует общей закономерности, свойственной фазовой проницаемости (см. гл. 3, рис. 3.4). Параметры влагопереноса $p_к$ (θ), $k_в$ и $k_в$ ($p_к$) определяются лабораторными и полевыми методами. В лаборатории используются капилляриметрический метод и центрифугирование, а в поле и в специальных шурфах — тензиометрический [12, 46, 49].

8.3. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ВЛАГОПЕРЕНОСА

Процесс влагопереноса описывается уравнением (4.3), которое аналогично уравнению Дарси характеризует физические предпосылки движения влаги в условиях неполного водонасыщения и называется основным законом влагопереноса.

$$v_z = -k_в \frac{dH}{dz}. \tag{8.4}$$

Подставив в формулу (8.4) значение H из уравнения (8.1), получим

$$v_z = k_в \frac{d\psi}{dz} - k_в, \tag{8.5}$$

где первый член зависимости характеризует действие сорбционных сил, а второй — гравитации; $k_в$ (θ) определяется по уравнению (3.14). Если влажность по разрезу постоянна (θ = const), то $d\psi/dz = 0$, что свидетельствует об отсутствии действия сорбционных сил. В этом случае скорость влагопереноса равна коэффициенту влагопереноса. Вся поступающая в зону аэрации инфильтрационная влага идет транзитом через зону аэрации с постоянной скоростью при градиенте напора, равном 1, до уровня грунтовых вод. Обычно такие условия принимают в гидравлической постановке изучения процесса влагопереноса, например при проведении опытных работ с целью определения $k_в$ песков наливами в шурфы. При глубине шурфов более 2 м можно принять условно θ = const; в этом случае опытная величина $k_в$ ориентировочно оценивает интенсивность влагопереноса v_z.

8.4. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРАВЛЕННОСТИ ВЕРТИКАЛЬНОГО ВОДООБМЕНА

В условиях квазистационарного влагопереноса на основе уравнения (8.5) можно оценить направленность вертикального водообмена. Такие условия возникают, когда приток к поверхности грунтовых вод при значительной глубине их залегания компенсируется оттоком к дренам. Запишем уравнение (8.5) иначе:

$$\frac{v_z}{k_в} = \frac{d\psi}{dz} - 1 \text{ или } \frac{d\psi}{dz} = \frac{v_z}{k_в} + 1. \tag{8.5а}$$

Как видно из уравнения (8.5а), распределение влажности по высоте над уровнем грунтовых вод определяется характеристиками пород зоны аэрации $k_в$ (ψ), ψ (θ) и зависит от интенсивности потока влаги v_z. Рассмотрим три случая распределения влажности по высоте в однородной зоне аэрации. Они показаны на рис. 8.4, *а*, где кривые построены в координатах $\beta\psi$—βz при различном соотношении $v_z/k_в$ [56]:

1) $v_z = 0$, поток влаги отсутствует, из формулы (8.5а) $(d\psi/dt) = 1$, $d\psi = dz$ и $\psi = z$, т. е. имеем равновесное распределение влажности, потенциал влаги равен высоте положения точки над уровнем грунтовых вод;

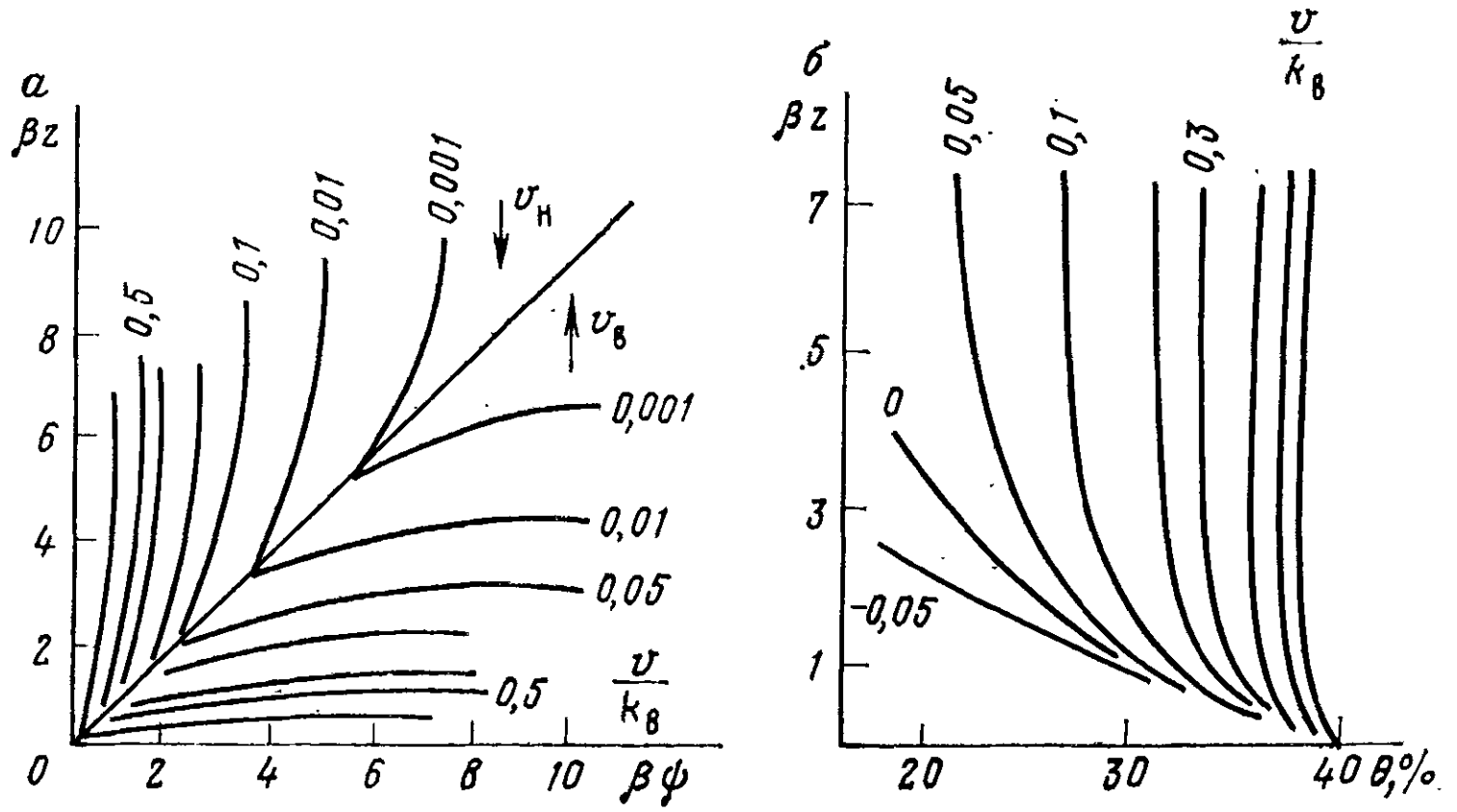


Рис. 8.4. Исследование направленности вертикального водообмена анализом графиков распределения величины высоты всасывания (*а*) и влажности (*б*) над уровнем грунтовых вод (по И. С. Пашковскому)

2) $v_z > 0$, из выражения (8.5а) $(d\psi/dz) > 1$ и $\psi > z$, следовательно, наблюдается восходящий поток $v_в$ влаги с уровня грунтовых вод в зону аэрации и к поверхности земли, что отвечает процессу испарения грунтовых вод в зону аэрации;

3) $v_z < 0$, согласно уравнению (8.5а) $(d\psi/dz) < 1$ и $\psi < z$, что создает нисходящий поток $v_н$ влаги к уровню грунтовых вод и отвечает процессу их питания за счет инфильтрации осадков и поливных вод.

Зная зависимость $\psi(z)$, можно построить графики распределения влажности при изменении интенсивности расхода и направления потока. На рис. 8.4, *б* показан такой график, построенный по зависимости (8.3). Начало оси z принято на уровне грунтовых вод. При $(v_z/k_в) = 0$ имеем равновесную кривую распределения влажности, при нисходящем потоке влаги эпюры влажности располагаются правее равновесной кривой, а при восходящем — левее ее. Впервые направленность влагообмена с атмосферой анализом эпюр влажности исследовал Н. В. Чубаров, который разработал для этого специальные палетки влажности. Однако этот способ требует высокой точности определения влажности. Надежнее использовать зависимость $\psi(z)$. При неоднородном строении зоны аэрации каждый слой характеризуется своей зависимостью $\psi(\theta)$, и поэтому на границе слоев наблюдается скачок влажности (по горизонтали). При этом значение ψ для каждого слоя зависит от $k(\psi)$ этого слоя, что следует из уравнения неразрывности потока влаги, которое согласно выражению (8.5) имеет вид

$$\frac{d\psi_1}{dz} = \frac{k_{в_2}(\psi)}{k_{в_1}(\psi)}\left(\frac{d\psi_2}{dz} - 1\right) + 1.$$

Зависимость $\psi(\theta)$ можно получить, если известно распределение влажности в капиллярной зоне при отсутствии в ней движения влаги.

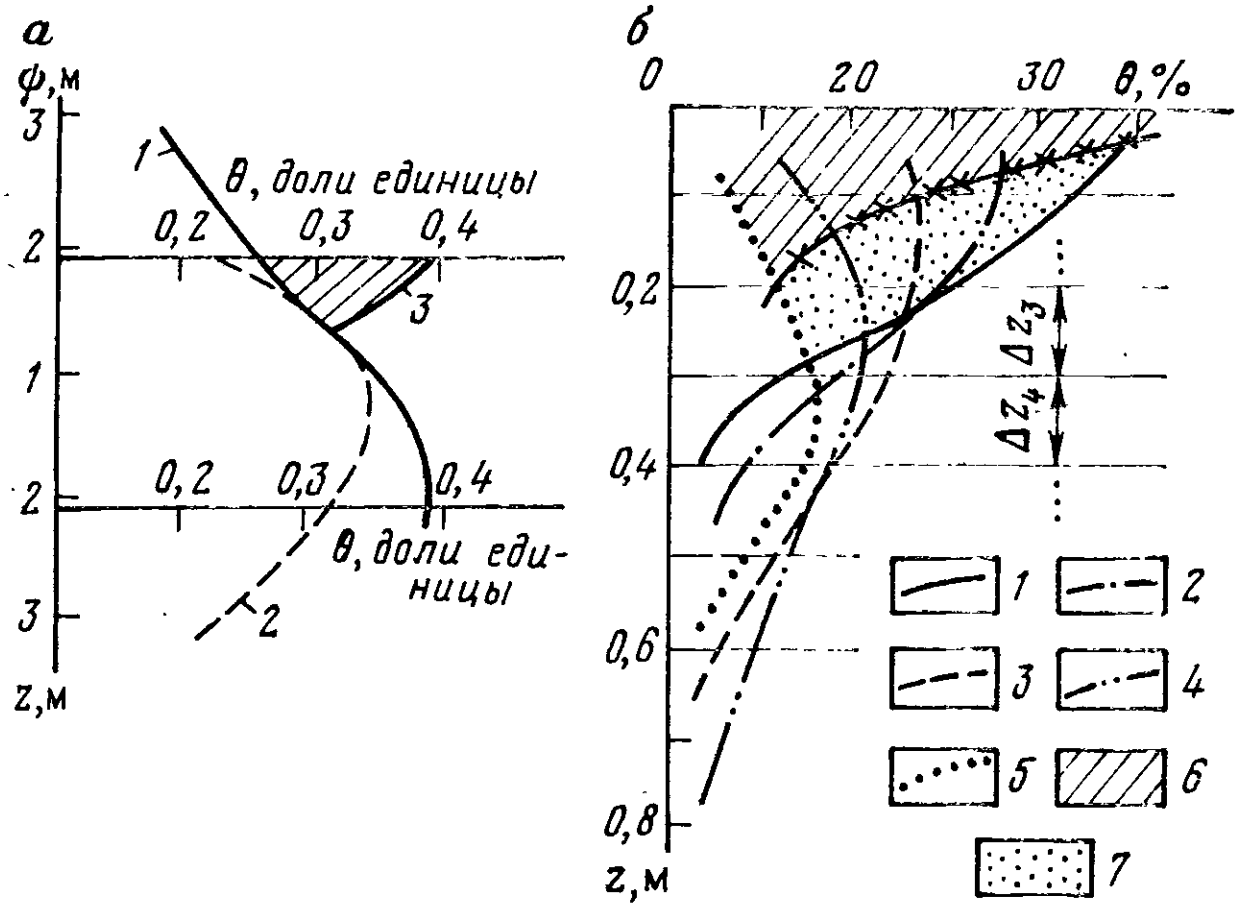


Рис. 8.5. Схемы для определения границы, разделяющей нисходящую и восходящую инфильтрации (*а*), и коэффициента влагопереноса (*б*) численным методом (по И. С. Пашковскому):

1—4 — распределение влаги после полива через 1, 2, 3 и 20 сут соответственно; *5* — то же, до полива; *6, 7* — зоны восходящего (*6*) и нисходящего (*7*) потоков. Цифры на кривых: *1* — график зависимости $\psi(\theta)$; *2* — распределение влаги; *3* — разделяющая граница

Такие условия наблюдаются при глубоком залегании уровня грунтовых вод. В этом случае высота точки над уровнем соответствует величине всасывающего давления, т. е. $z = \psi$, и искомая зависимость строится путем непосредственного измерения влажности по высоте капиллярной зоны. Аналогичным образом такая зависимость может быть получена в лаборатории методом высоких колонн при квазистационарном распределении капиллярной влажности [12].

В общем случае высота z, для которой характерно значение ψ, определяется из уравнения (8.5а) численным интегрированием при известной зависимости $k_в\psi$ с использованием АВМ или ЭЦВМ [40, 56].

При известной зависимости $\theta(\psi)$ и наличии синхронных профилей влажности, характеризующих изменение $\theta(z)$ на разные моменты времени в данной точке, можно решить такие задачи: а) найти границу, разделяющую нисходящий и восходящий потоки; б) определить $k_в$. Синхронные профили влажности получают, например, по результатам искусственного промачивания пород в зоне аэрации (методом налива в котлован или в целик породы в шурфе) или строят по данным наблюдений на специальных участках за режимом влажности в естественных условиях или при орошении.

Рассмотрим первую задачу. На линии, разделяющей восходящий и нисходящий потоки, $v_z = 0$ и в соответствии с уравнением (8.5а) в раздельной точке $(d\psi/dz) = 1$. Для нахождения таких точек на кривые влажности накладывают кривую $\theta(\psi)$, вычерченную в том же масштабе. Перемещая ее по вертикали (вертикальные оси графи-

ков $\theta(z)$ и $\theta(\psi)$ совпадают), находят точки, где графики имеют общую касательную. Соединив эти точки на всех эпюрах влажности общей линией, получают положение границы раздела потоков на принятый период времени (рис. 8.5, *а*).

Значение $k_в$ определяют численным методом, считая процесс квазистационарным и используя уравнение (8.5а). В этом уравнении на период времени $\Delta t = t_{s+1} - t_s$ (где t_{s+1} и t_s — принятые моменты времени, отвечающие синхронным эпюрам влажности) заменяют дифференциалы их конечными значениями в виде

$$k_в = \frac{v_z \Delta z}{\Delta\psi + \Delta z}, \tag{8.6}$$

где Δz — длины блоков, на которые разбивают по вертикали профиль с синхронными изолиниями влажности. Число блоков зависит от интенсивности изменения влажности; в пределах каждого блока она должна быть по возможности постоянной. Значения $\Delta\psi$ определяют как разность средних за период Δt всасывающих давлений в центрах последующего $i + 1$ и предыдущего i блоков (отсчет по направлению оси z)

$$\Delta\psi = \psi_{i+1}^{s+0,5} - \psi_i^{s+0,5}.$$

Величины $\psi^{s+0,5}$ вычисляют по кривой $\theta(\psi)$, предварительно определив по синхронным эпюрам влажности средние значения $\theta^{s+0,5}$ для центров этих блоков за период Δt.

Величина $v_z^{s+0,5}$ определяется как среднее значение расхода потока инфильтрирующейся через объем V влаги, вовлеченной в инфильтрацию за Δt

$$v_z^{s+0,5} = V/(t_{s+1} - t_s).$$

Для этого по синхронным эпюрам влажности находят границу, разделяющую восходящий и нисходящий потоки, и вычисляют объем V влаги между этой границей и принятыми двумя эпюрами (рис. 8.5, *б*). Как видно из уравнения (8.6), расчетное значение $k_в$ соответствует средней влажности на границе, разделяющей принятые для расчета блоки. Проведя такие вычисления для других сечений, а затем и для других периодов времени, строят зависимость $k_в(\theta)$, которая в квазистационарных условиях характеризует интенсивность инфильтрационного питания.

8.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим одномерный влагоперенос интенсивностью v_z. Выделим по координате z единичный элемент (с площадью в плане 1 м^2) длиной dz и составим для него уравнение неразрывности поступления влаги за время dt (рис. 8.6).

Сверху в элемент поступает влага $v_z dt$ и оттекает через нижнюю границу $\left(v_z dz + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz\right) dt$. Это изменение объема влаги компенси-

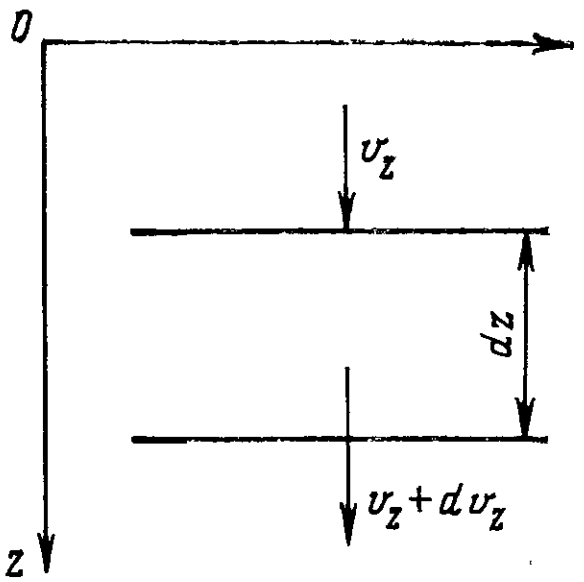


Рис. 8.6. Схема к выводу уравнения неразрывности процесса влагопереноса

руется изменением влажности в выделенном элементе $\frac{\partial\theta}{\partial t}\,dtdz$. После приравнивания и сокращения получаем уравнение неразрывности потока влаги

$$-\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{8.7}$$

Подставив в уравнение (8.7) выражение для v_z по формуле (8.4) и имея в виду связь H с ψ [см. формулу (8.1)], придем к дифференциальному уравнению влагопереноса

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(k_в\frac{\partial H}{\partial z}\right)=C\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{8.8}$$

которое впервые было получено А. Клютом [56] в начале 1950-х гг. Здесь $C(\theta)$ — коэффициент, зависящий от влажности,

$$C=-\frac{\partial\theta}{\partial\psi}, \tag{8.9}$$

который называется дифференциальной водоемкостью, или коэффициентом удельной емкости пород зоны аэрации. По физическому смыслу он аналогичен параметру емкости μ_0. При выводе уравнения (8.8) сделана замена

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\theta}{\partial\theta}=\frac{1}{c}\frac{\partial\theta}{\partial t}.$$

Выразим уравнение (8.8) через функцию ψ. Учитывая зависимость (8.1), получим

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(k_в\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial k_в}{\partial z}=C\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{8.10}$$

Выразим дифференциальное уравнение влагопереноса через θ. Для этого в уравнение (8.10) подставим выражение (8.5), а производную ψ по dz умножим и разделим на $\partial\theta$:

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(k_в\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial k_в}{\partial z}=\frac{\partial\theta}{\partial t}.$$

Вводя обозначение, которое впервые предложили в 1950-е гг. Е. Чайлдс и Н. Коллис-Джордж [56]

$$D=k_в/C, \tag{8.11}$$

с учетом зависимости (8.9) перепишем полученное выше выражение:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)+\frac{\partial k_в}{\partial t}=\frac{\partial\theta}{\partial z}, \tag{8.12}$$

где $D(\theta)$ — коэффициент диффузии влаги, или влагопроводности, аналогичный, как видно из выражения (8.11), по физическому смыслу коэффициенту уровнепроводности [56].

Уравнения (8.8), (8.10) и (8.12) могут содержать, как и дифференциальные уравнения движения грунтовых вод, свободный член, характеризующий интенсивность истока ε в виде отбора влаги корнями растений. Величина ε связана с удельной поверхностью корневых волосков $\bar{r}$ на некоторой глубине и суммарной транспирацией E_0 ($\varepsilon = E_0\bar{r}$) и зависит от глубины и времени, поскольку корневая система развивается со временем. Величина ε может характеризовать также интенсивность водообмена крупных трещин, по которым в первую очередь движется инфильтрующаяся вода, с агрегатами почвы и блоками пород зоны аэрации при гетерогенно-блоковой ее структуре. Дифференциальные уравнения (8.10) и (8.12) являются нелинейными и их коэффициенты зависят от H, ψ или θ. Решение их связано с серьезными трудностями. Существуют различные способы линеаризации этих уравнений, сводящиеся к усреднению параметров влагопереноса [40, 47]. Аналитических решений таких уравнений мало.

Нелинейные уравнения решаются численным методом с применением АВМ или ЭЦВМ [56]. Однако и такое решение весьма трудоемко, так как требуются большой объем исходной информации и выполнение итерационных приближений в решении нелинейного уравнения.

8.6. РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ ПРОЦЕССОВ ПИТАНИЯ, НАСЫЩЕНИЯ И ОСУШЕНИЯ

Рассмотрим схемы процессов питания, осушения и насыщения и их динамические характеристики. Составим балансовое уравнение, характеризующее приток w к свободной поверхности со стороны зоны аэрации, отток v от нее в грунтовые воды и приращение уровня h:

$$\mu_0 \frac{dh}{dt} = w - v. \tag{8.13}$$

Полный водный баланс элементарного объема высотой L (от поверхности земли до первого регионального водоупора или до некоторой границы в зоне насыщения) включает поступление воды интенсивностью I через поверхность земли, отток интенсивностью v через нижнюю границу и изменение влагозапасов V в элементе за dt. Учитывая переменную по высоте влажность θ, получим [56]

$$I - v = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^L \theta dt.$$

Рассматривая приращение влагозапасов раздельно в зоне насыщения (от 0 до h) и в зоне аэрации (от h до L)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L \theta dz = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^h \theta dz + \frac{\partial}{\partial t}\int_h^L \theta dz$$

и считая, что в зоне насыщения влажность соответствует полной влагоемкости $\theta_п = \text{const}$, запишем

$$I - v = \theta_п \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_h^L \theta dz. \tag{8.14}$$

Полагая $\mu_0 = \theta_п$ и заменяя первый справа член выражения (8.14) по (8.13), после преобразования получим

$$w = I - \frac{\partial}{\partial t} \int_h^L \theta dz.$$

Принимая в уравнении (8.13) $\mu_0 = \theta_п - \theta_{мм}$, после подстановки полученного выражения в формулу (8.14) величину питания w можно определить следующим образом:

$$w = I - \frac{\partial}{\partial t} \int_h^L \theta dz - \theta_0 \frac{\partial h}{\partial t}. \tag{8.15}$$

Отсюда следует, что интенсивность питания зависит от емкостных свойств пород зоны аэрации и выражается различно в зависимости от того, какой смысл придается коэффициенту емкости. В связи с этим четко разделить процессы насыщения, осушения и питания оказывается невозможным. Если коэффициент емкости считать постоянным ($\mu_0 = \theta_п - \theta_{мм}$), то изменяющееся питание w можно определить по формуле (8.15). В другой постановке [34, 54] приток w к свободной поверхности трактуется как изменение только коэффициентов водоотдачи или насыщения. В этом случае поступление воды через поверхность земли считается постоянным во времени или равным нулю, а изменяющийся показатель μ характеризует ту долю свободной воды, которая может быть получена из пласта при вытекании или насыщении его за бесконечно долгое время. Здесь μ представляет собой динамическую характеристику процессов осушения или насыщения и определяется как отношение абсолютного притока к свободной поверхности к приращению уровня

$$\mu = \theta_п + \frac{\frac{\partial}{\partial t} \int_z^L \theta dz}{\frac{\partial h}{\partial t}}. \tag{8.16}$$

Из уравнения (8.16) следует, что μ — величина переменная во времени и зависит от начальных значений $k_в(\theta)$, $\psi(\theta)$ и граничных условий в зоне аэрации, в частности от положения свободной поверхности относительно земли и скорости снижения уровня. Установлено [34], что при снижении уровня с постоянной скоростью v в зоне аэрации формируется профиль влажности, отличающийся от равновесного (время $t_м$ его формирования тем больше, чем меньше v), и появляется так называемое запаздывание водоотдачи. При этом предельное

значение μ зависит от v, но при подъеме уровня с постоянной скоростью оно не связано с изменением v. Такое представление о формировании замедленной водоотдачи отличается от известной концепции Н. Болтона [8], согласно которой переменное μ стремится к предельному значению независимо от скорости снижения уровня. Если темп изменения уровня составляет несколько метров в год, то время запаздывания можно не учитывать и использовать в региональных прогнозах показатель μ_0 и его связь с ω и глубиной до уровня грунтовых вод.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем различие математических постановок при изучении передвижения влаги в зоне аэрации по теории влагопереноса и как процесса инфильтрации?
2. Что такое основная гидрофизическая характеристика? Нарисуйте типовые кривые для песков и суглинков.
3. В каком случае изолинии потенциала влаги совпадают с изоплетами влажности?
4. При каком распределении влажности пород в зоне аэрации $v_z = k_в$? Если $\psi > z$, как определить направление потока влаги?
5. Как надо поставить опыт, чтобы прямым измерением влажности построить зависимость $\psi(\theta)$?
6. Какие исходные данные надо иметь для нахождения границы, разделяющей на профиле влажности нисходящий и восходящий потоки?
7. В чем проявляется нелинейность дифференциальных уравнений влагопереноса?
8. Найдите в тексте уравнение, которое показывает, что величину инфильтрационного питания можно представить как динамическую характеристику процесса насыщения (осушения), какой смысл в этом случае придается коэффициенту емкости?
9. Как представляется инфильтрационное питание в моделях краткосрочных локальных и долгосрочных региональных прогнозов?
10. Чем различаются модели: «зона аэрации — грунтовые воды», «зона аэрации» и «грунтовые воды»?

ЧАСТЬ II

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ, ПЛАНОВОЙ И ПЛОСКОВЕРТИКАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ГГС

Теория плоскопараллельной и плановой фильтрации является математической основой изучения гидродинамики естественных потоков, а также в зоне действия водохранилищ, каналов, плотин, горизонтальных дренажей, массивов орошения и т. п. На этой теории основаны изучение процессов формирования режима и баланса подземных вод и определение гидрогеологических параметров по данным режимно-балансовых исследований.

Глава 9

ОДНОМЕРНАЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

9.1. ТИПЫ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ И ОСОБЕННОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ

Выделяют расчетные схемы в горизонтальном (по координате x, см. рис. 4.1, *а—в*) и вертикальном (по координате z, см. рис. 4.1, *г*, *д*) направлениях (см. разд. 5.2).

В пластах с горизонтальным движением выделяют потоки в однородных (рис. 9.1) и неоднородных (рис. 9.2) пластах, а также инфильтрационные (рис. 9.3). Рассматривают схемы с горизонтальным, ($i = 0$) и негоризонтальным ($i \gtrless 0$) водоупорами, с постоянной и переменной мощностью, а также с переменной шириной потока в плане; для инфильтрационных потоков выделяют схемы с равномерно распределенным и кусочно-однородным питанием. Изменение фильтрационных свойств аппроксимируется типами многослойного, двухслойного, кусочно-однородного и линейного изменения. При однонаправленном движении начало координат принимают так, чтобы направление потока совпадало с осью x. Наличие инфильтрационного питания определяет центробежное движение, и вид уравнения зависит от принятого при выводе положения начала координат. В данной работе мы принимаем начало координат слева; если ось x совпадает с направлением потока, то расход положительный ($q_x > 0$), в противном случае — отрицательный ($q_x < 0$).

Для упрощения используем предпосылку о постоянстве водопроводимости пласта, что отвечает схеме 1 напорного потока по А. Дарси. Таким потоком эквивалентно заменяем фильтрацию (схема 2) в неоднородном k_x и горизонтальнослоистом грунтовом потоке с горизонтальным водоупором (схема 3). Такой прием обоснован следующим сопоставлением (см. рис. 9.1, *а*, *б* и 9.2, *а*):

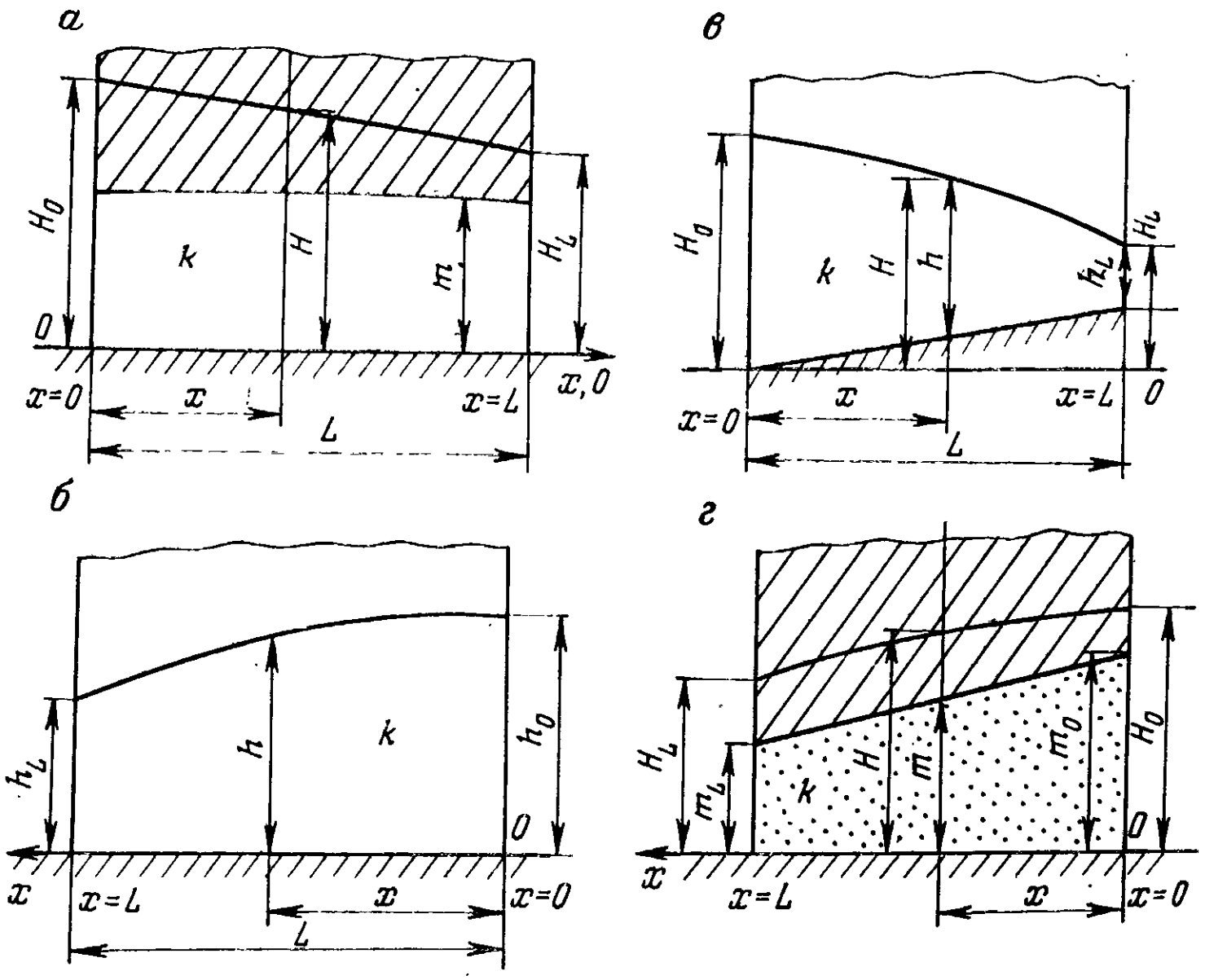


Рис. 9.1. Расчетные схемы линейных однородных потоков:
а — Дарси для напорного потока; *б* — Дюпюн для грунтового потока при горизонтальном водоупоре; *в* — Каменского для грунтового потока при наклонном водоупоре; *г* — Биндемана—Давидовича для напорного потока с мощностью, изменяющейся по линейному закону

$$\text{схема } 1\ q_x = -T\frac{\partial H}{\partial x} = -km\frac{\partial H}{\partial x}; \tag{9.1}$$

$$\text{схема } 2\ q_x = -k_x h\frac{\partial h}{\partial x}; \tag{9.2}$$

$$\text{схема } 3\ q = -\frac{\partial G}{\partial x}. \tag{9.3}$$

Если представить эти зависимости соответственно в виде [54]

$$q_x = -\frac{\partial (kmH)}{\partial x}; \quad q_x = -\frac{\partial (kh^2/2)}{\partial x}; \quad q_x = -\frac{\partial G}{\partial x},$$

то выявляются их единообразие и взаимозаменяемость путем преобразования схемы 1 в схему 2 с использованием напорной функции по зависимости (6.57), т. е. $mH \to 0{,}5\ h^2$ и схем 1 и 2 в схему 3:

$$kmH \to 0{,}5kh^2 \to G. \tag{9.4}$$

где G — функция Гиринского, заменяющая горизонтальнослоистый пласт с грунтовыми водами условно однородным при выполнении

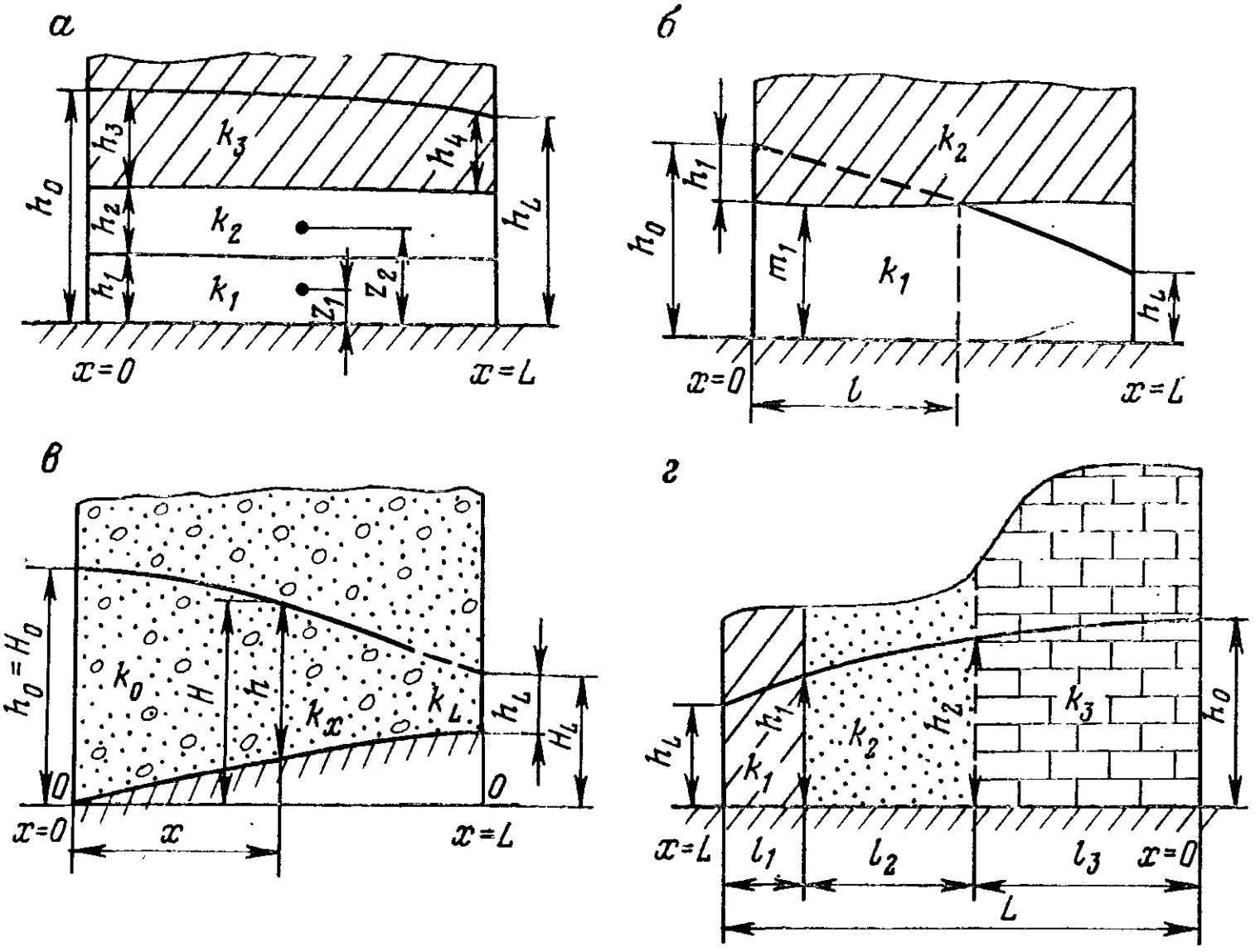


Рис. 9.2. Расчетные схемы линейных потоков с типовым неоднородным строением фильтрационной среды (по Г. Н. Каменскому):
а — многослойным; *б* — двухслойным; *в* — изменяющимся по линейному закону; *г* — кусочно-однородным

критерия (4.36) и приближенно вычисляемая следующим образом (см. рис. 9.2, *а*):

$$G \cong \sum_{1}^{n} k_i m_i (h - z_i). \qquad (9.4а)$$

где n — число слоев; h — уровень воды (общая мощность водоносного пласта); z_i — расстояние от горизонтального водоупора до середины слоя с i-м номером с коэффициентом фильтрации k_i и мощностью m_i.

Зависимость (9.4) означает, что уравнения, полученные на основе интегрирования выражения (9.1), можно с помощью подстановок (9.4) переписать для потоков, движение в которых определяется дифференциальными уравнениями (9.2) и (9.3) с учетом (9.4 а).

Вертикальная одномерная фильтрация возникает под каналами, реками и балками при глубоком положении уровня грунтовых вод. Такой режим называют с в о б о д н ы м. Различают свободную фильтрацию б е з р а з р ы в а (см. рис. 4.1, *г*) и с р а з р ы в о м (см. рис. 4.1, *д*) сплошности фильтрующегося потока. В первом случае при достаточном количестве воды в водоеме или на поверхности земли в зоне аэрации возникает сплошной нисходящий инфильтрационный поток, движение которого определяется действием сил гравитации,

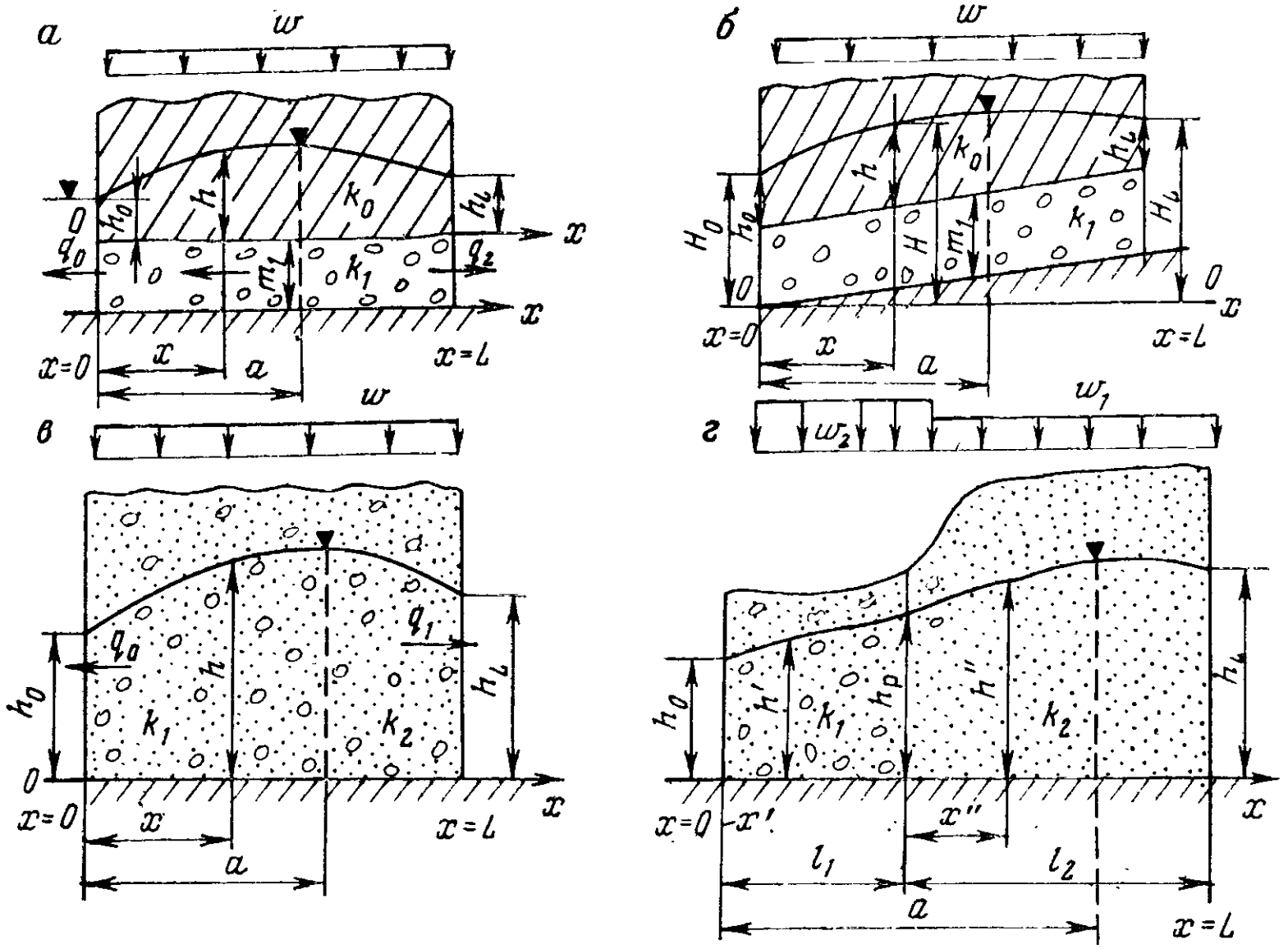


Рис. 9.3. Расчетные схемы линейных потоков с инфильтрационным питанием: *а* — при двухслойном строении, горизонтальном водоупоре и равномерной инфильтрации; *б* — при двухслойном строении, наклонном водоупоре и равномерной инфильтрации; *в* — при однородном строении; *г* — при постепенном изменении фильтрационных свойств, горизонтальном водоупоре и неравномерной инфильтрации

гидростатического и капиллярного давлений. При отсутствии достаточного для заполнения порового пространства количества воды формируется свободное просачивание в виде отдельных струй, продвигающихся вниз под действием собственного веса, образуется «подземный дождь» (аналогично инфильтрационному питанию от осадков). Движение в зоне аэрации в таких условиях должно исследоваться с позиций влагопереноса. Однако, если принять влажность θ_e пород зоны аэрации по всему разрезу неизменяющейся и равной $\theta_e \geqslant \theta_{мм}$, то $k_в \approx k$, и процесс инфильтрации можно изучать в приближенной постановке на основе уравнения Дарси (4.13), которое принимает вид

$$v_z = k\,\frac{h_0 + h + h_к}{h}, \tag{9.5}$$

где v_z — интенсивность вертикальной фильтрации; h_0 — глубина воды в канале, водоеме или на поверхности земли; h — глубина от дна реки или канала, на которую профильтровался нисходящий поток; $h_к$ — высота всасывания, $h_к \approx 0{,}5\,H_к$. Если выполняется условие

$$v_z \geqslant k \tag{9.5а}$$

(где k — коэффициент фильтрации пород, слагающих зону аэрации), то всегда возникает нисходящий поток без разрыва сплошности.

Чаще всего поток с разрывом сплошности формируется при двухслойном строении зоны аэрации, когда на хорошо проницаемых породах с коэффициентом фильтрации k залегают слабопроницаемые с параметрами $h_{к_0}$, k_0, m_0 (см. рис. 4.1, *д*) и на границе их раздела нарушается неразрывность потока

$$v_z^0 < v_z \tag{9.6}$$

или

$$\frac{k}{k_0} > \frac{h_0 + m_0 + h_{к_0}}{m_0}, \tag{9.6а}$$

где v_z^0 и v_z — соответственно скорости фильтрации в слабо- и хорошопроницаемых слоях, при этом для v_z градиент напора принят равным единице.

В таких условиях в слабопроницаемом слое идет фильтрация согласно уравнению (9.5), а в хорошо проницаемых породах возникает «подземный дождь», интенсивность поступления которого на поверхность грунтовых вод определяется выражением

$$w_ф = v_z^0 = k_0\left(1 + \frac{h_0 + h_к}{m_0}\right). \tag{9.7}$$

Если $v_z^0 \geqslant v_z$, то в обоих слоях устанавливается фильтрационный поток.

Используют две математические постановки, каждой из которых отвечает свой способ получения решений. В первой, гидромеханической, исходными являются уравнения Лапласа (6.12) или Пуассона (при наличии w вертикального водообмена); во второй, гидравлической, решается уравнение Дарси (4.5) или (4.6). Чаще пользуются более простой второй постановкой.

9.2. ПОТОКИ В ОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ

Простейшим является поток с постоянной проводимостью T (см. рис. 9.1, *а*). Единичный расход его можно получить интегрированием уравнения (9.1) в пределах $x = 0$, $H = H_0$, $x = L$, $H = H_L$:

$$q = T\frac{H_0 - H_L}{L}. \tag{9.8}$$

Уравнение для напора H в любом сечении получим, используя равенство расходов $q_{0-L} = q_{0-x}$, как гидродинамическую особенность потока с сосредоточенным питанием. После преобразований имеем

$$H = H_0 - \frac{H_0 - H_L}{L}x. \tag{9.9}$$

Зависимости (9.8) и (9.9) известны как уравнения Дарси. Получим эти зависимости интегрированием уравнения Лапласа (6.12) в тех же пределах; для линейного потока оно имеет вид

$$\frac{d^2H}{dx^2}=0.$$

Интегрирование дает

$$H=Ax+B, \tag{9.10}$$

где A и B — постоянные, определяемые из граничных условий $x=0$, $B=H_0$, $x=L$, $A=(H_L-H_0)/L$. Подставляя их в выражение (9.10), приходим к уравнению (9.9). Подставляем в зависимость (9.1) уравнение (9.9) и, дифференцируя по x, получаем формулу (9.8).

Для горизонтального потока грунтовых вод решение получим, используя напорную функцию U по уравнению (6.57) и заменив в (9.8) и (9.9) величины H_0, H и H соответственно на $h_0^2/(2m)$, $h_L^2/(2m)$ и $h^2/(2m)$. После преобразования получим уравнения Дюпюи:

$$q=k\frac{h_0^2-h_L^2}{2L}; \tag{9.11}$$

$$h^2=h_0^2-\frac{h_0^2-h_L^2}{L}. \tag{9.12}$$

Задача. Получить уравнения (9.11) и (9.12), приняв в качестве исходных уравнения Лапласа и (9.2), Интегрировать их в пределах, показанных на рис. 9.1, *б*.

При наклонном залегании водоупора исходным является уравнение (4.6). Как видно из рис. 9.1, *в*, величина H зависит от изменения мощности пласта h и высоты положения водоупора z относительно плоскости сравнения, т. е. $H=h+z$. Тогда уравнение (4.6) принимает вид $q=-kh\,(dh/dx+dz/dx)$ и не может быть однозначно решено без дополнительного условия, учитывающего переменную z. Н. Н. Павловский нашел такие условия и решил задачу [3, 20], однако пользоваться этими решениями не просто, и с достаточной для практики точностью вместо них применяют приближенное уравнение, полученное Г. Н. Каменским [20]. Принимая мощность потока постоянной и равной $h_{ср}=(h_1+h_2)/2$, переводят уравнение (4.6) в (9.1) и после интегрирования получают

$$q=kh_{ср}\frac{H_0-H_L}{L}. \tag{9.13}$$

Уравнение для депрессионной кривой получают, используя равенство расходов потока по формуле (9.13) ($q_{0-L}=q_{0-x}$) и представляя $h=H-ix$ (где i — уклон водоупора) [54]:

$$h=\sqrt{h_0^2-ix\,(h_0-0{,}25ix)+(2qx/k)}-0{,}5ix.$$

Задача. Получить решения для радиальносходящегося и радиальнорасходящегося потоков, приняв в качестве исходного уравнение (9.1) и введя

в него ширину потока B_x, изменяющуюся по зависимости $B_x = B_1 - \frac{B_1 - B_2}{L} x$. Указать, какие погрешности возникают в процессе математического решения задачи. Переписать полученные выражения для грунтового потока, используя напорную функцию (6.57).

9.3. ПОТОКИ В НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ

Основные уравнения для неоднородных по строению пластов были получены Г. Н. Каменским [19, 20] и Н. К. Гиринским [3, 40]. Типовые расчетные схемы показаны на рис. 9.2. Для большинства из них расчетные уравнения можно получить из зависимостей для однородных потоков, если неоднородность считать упорядоченной с соотношением k или T по критериям (4.35) и (4.36). Тогда расчетные показатели вычисляют как средние взвешенные значения по формулам (4.18), (4.19) и вводят их в формулы для однородных пластов.

Рассмотрим поток с кусочно-однородным строением (см. рис. 9.2, *г*). Найдем уравнения движения, используя метод фрагментов и значение среднего взвешенного коэффициента фильтрации по формуле (4.18). Расход грунтового потока на участке $L = l_1 + l_2 + l_3$ определим как для однородного пласта по формуле Дюпюи (9.11), в которой k заменим на $k_\perp$

$$k_\perp = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{\frac{l_1}{k_1} + \frac{l_2}{k_2} + \frac{l_3}{k_3}},$$

и после преобразований получим уравнение Каменского [20]

$$q = \frac{h_0^2 - h_L^2}{2\left(\frac{l_1}{k_1} + \frac{l_2}{k_2} + \frac{l_3}{k_3}\right)}. \qquad (9.14)$$

Записывая равенство расходов потока по формуле (9.14) для всего участка и по формуле (9.11) для первого фрагмента, определим мощность потока h_1 на контакте первого и второго фрагментов, а затем из аналогичного равенства для всего участка и второго фрагмента — мощность h_2. Кривую депрессии каждого участка строят, используя уравнение (9.12).

При наклонном водоупоре после замены $h^2 = 2Hm$ и с учетом, что $m = h_{ср}$ и $T = k_i h_{ср}$, уравнение (9.14) принимает вид

$$q = h_{ср} \frac{H_0 - H_L}{\frac{l_1}{k_1} + \frac{l_2}{k_2} + \frac{l_3}{k_3}}. \qquad (9.15)$$

Рассмотрим другие способы. Примем линейное изменение k по зависимости (5.1), а в качестве исходного — уравнение Дарси (4.6),

которое (см. рис. 9.1, *в*) для сечения на расстоянии x от начала координат имеет вид

$$q = -\left(k_0 - \frac{k_0 - k_L}{L} x\right) h \frac{dH}{dx}. \tag{9.16}$$

Разделим в выражении (9.16) переменные

$$\frac{qdx}{k_0 - \frac{k_0 - k_L}{L} x} = -hdH$$

и, принимая $h = h_{ср}$, проинтегрируем полученное выражение в пределах $x = 0$, $H = H_0$ и $x = L$, $H = H_L$; после преобразований получим уравнение Каменского

$$q = \frac{k_0 - k_L}{\ln k_0 - \ln k_L} h_{ср} \frac{H_0 - H_L}{L}, \tag{9.17}$$

где k_0 и k_L — соответственно коэффициенты фильтрации в сечениях $x = 0$ и $x = L$.

Сравнивая уравнения (9.13) и (9.17), получаем выражение для среднего коэффициента фильтрации при линейном законе его изменения по формуле (5.1) при $k_0 > k_L$:

$$k_{ср} = \frac{k_0 - k_L}{\ln k_0 - \ln k_L}. \tag{9.18}$$

З а д а ч а. Получите зависимости для q, H и $k_{ср}$ аналогичным путем при линейно изменяющейся водопроводимости пласта с напорными водами.

Для горизонтальнослоистых пластов (см. рис. 9.1, *а*) решения находят, применяя функцию Гиринского G по формуле (9.4а). Для этого согласно зависимости (9.4) перепишем уравнения (9.11) и (9.12):

$$q = \frac{G_0 - G_L}{L}, \tag{9.19}$$

$$G = G_0 - \frac{G_0 - G_L}{L} x, \tag{9.20}$$

где G_0, G_L и G — соответственно значения функций Гиринского на границах и в любом сечении. Связь между G и h устанавливается из уравнения (9.4а), согласно чему для схемы, приведенной на рис. 9.2, *а*, имеем:

$$G_0 = k_1 m_1 (h_0 - 0{,}5m_1) + k_2 m_2 (h_0 - m_1 - 0{,}5m_2) + 0{,}5k_3 h_3^2;$$
$$G_L = k_2 m_2 (h_L - 0{,}5m_1) + k_2 m_2 (h_L - m_1 - 0{,}5m_2) + 0{,}5k_3 h_L^2.$$

Можно эту задачу решить иначе, как это сделал Г. Н. Каменский, используя закон преломления токов. В этом случае при выполнении критерия (4.36) движение в слоях идет вдоль напластования с одинаковыми градиентами. Тогда, проведя плоскость сравнения по верхней

границе раздела слоев, можно движение в нижних слоях рассматривать как в напорных с суммарной водопроводимостью, определяемой по формуле (4.19) а в верхнем — по схеме Дюпюи (9.11), и уравнение для общего расхода потока (9.19) примет вид (см. рис. 9.2, *а*)

$$q = q_в + q_н = k_3 \frac{h_3^2 - h_4^2}{2L} + \sum_{i=1}^{i=2} k_i m_i \frac{h_3 - h_4}{L}. \qquad (9.21)$$

Уравнение депрессионной кривой вместо выражения (9.20) определяется уравнением (9.12).

Задача. Получить методами Гиринского и Каменского зависимости для определения q и H при двухслойном строении пласта (см. рис. 9.2, *б*). Найти зависимость для определения расстояния l, на котором двухслойный пласт переходит в однослойный.

9.4. ИНФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ

Потоки с равномерным инфильтрационным питанием исследованы Г. Н. Каменским, ряд схем рассмотрен в работах И. А. Скабалланович, В. М. Шестакова, В. К. Рудакова и др. Рассмотрим вывод уравнений для условий, представленных на рис. 9.3, *в*, принимая пласт однородным ($k_1 = k_2 = k$). Используем в качестве исходного дифференциальное уравнение Пуассона. Рассмотрим водный баланс для участка dx потока и выразим приходные части как q и $w dx$, а расходную — как $q + dq$, тогда уравнение неразрывности примет вид: $dq = w dx$. Подставив в него вместо q его выражение по Дарси в виде уравнения (9.2) и принимая $k_x = k$, получим $kd\,(hdh)/dx = w dx$ или окончательно

$$\frac{d^2\,(h^2/2)}{dx^2} + \frac{w}{2k} = 0. \qquad (9.22)$$

При постоянном питании w уравнение (9.22), переписанное как $\frac{d^2\,(h^2/2)}{dx^2} = -\frac{w}{2k}$, можно почленно проинтегрировать и в результате получить после первого интегрирования $\frac{d\,(h^2/2)}{dx} = \frac{w}{2k} x + C_1$ и после второго

$$\frac{h^2}{2} = -\frac{w}{2k} x^2 + C_1 x + C_2. \qquad (9.23)$$

Постоянные C_1 и C_2 найдем из граничных условий, представленных на рис. 9.2, *в*; при $x = 0$ $C_2 = \frac{h_0}{2}$ и при $x = L$ $C_1 = \frac{h_L^2 - L_0^2}{2L} + \frac{wL}{2k}$. Подставив их в выражение (9.23), получим уравнение депрессионной кривой

$$h_x = h_0^2 + \frac{h_L^2 - h_0^2}{x} x + \frac{wx}{k} (L - x). \qquad (9.24)$$

Расход потока в любом сечении определяется как

$$q_x = -kh\frac{dh_x^2}{dx} = k\frac{h_L^2 - h_0^2}{2L} - \frac{wL}{2} + wx. \qquad (9.25)$$

В сечениях $x = 0$ и $x = L$ расходы, определяемые по (9.25), соответственно равны:

$$q_0 = k\frac{h_L^2 - h_0^2}{2L} - \frac{wL}{2}; \qquad q_L = k\frac{h_L^2 - h_0^2}{2L} + \frac{wL}{2}. \qquad (9.26)$$

Уравнения (9.24) — (9.26) известны в гидрогеологической литературе как уравнения Каменского [20].

З а д а ч а. Решить задачу для пласта с наклонным водоупором, используя в качестве исходного уравнение Пуассона в виде

$$\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{w}{T}.$$

Рассмотрим более общий случай, отвечающий схеме, приведенной на рис. 9.3, *а*, и исследуем его, используя другую математическую постановку. Примем питание w равномерным на всем участке длиной L. Для двухслойного пласта при горизонтальном водоупоре для сечения x уравнение Дарси имеет вид [9]

$$q_x = -k_1 m_1 \frac{dh}{dx} - k_0 h \frac{dh}{dx}$$

при плоскости сравнения по кровле нижнего слоя m_1. Кроме того, расход потока можно выразить как $q_x = q_0 + wx$. Приравнивая эти расходы, после разделения переменных и интегрирования от 0 до x и от h_0 до h, получим

$$q_0 x + \frac{wx^2}{2} = k_1 m_1 (h_0 - h) + k_0 \frac{h_0^2 - h^2}{2}. \qquad (9.27)$$

Используя граничные условия $x = L$, $h = h_L$ и принимая $T = k_1 m_1$, найдем из формулы (9.27) расход потока в сечении $x = 0$:

$$q_0 = T_1\frac{h_0 - h_L}{L} + \frac{h_0^2 - h_L^2}{2L} - \frac{wL}{2}; \qquad (9.28)$$

для сечения на расстоянии x согласно уравнению $q_x = q_0 + wx$ имеем:

$$q_x = T_1\frac{h_0 - h_L}{L} + k_0\frac{h_0^2 - h_L^2}{2L} - \frac{wL}{2} + wx. \qquad (9.29)$$

Принимая на водоразделе при $x = a$ условие $q_x = 0$, получим

$$a = \frac{L}{2} - \frac{T_1}{w}\cdot\frac{h_0 - h_L}{L} - \frac{k_0}{w}\cdot\frac{h_0^2 - h_L^2}{2L}. \qquad (9.30)$$

Зависимость для депрессионной кривой находим путем подстановки (9.28) в (9.27), и после преобразования имеем:

$$T_1\frac{h_0-h}{x}+k_0\frac{h_0^2-h^2}{2x}=T_1\frac{h_0-h_L}{L}+k_0\frac{h_0^2-h_L^2}{2L}-\frac{w}{2}(L-x). \tag{9.31}$$

Решая квадратное уравнение (9.31) относительно h, найдем искомое значение уровня грунтовых вод. При наклонном залегании водоупора (см. рис. 9.3, *б*), принимая $h^2=2Hh_{ср}$, для верхнего пласта имеем $T_0=k_0h_{ср}$. Вводя $T=T_1+T_2$, из уравнений (9.28), (9.30) и (9.31) получаем

$$q_0=T\frac{H_0-H_L}{L}-\frac{wL}{2}; \tag{9.32}$$

$$a=\frac{L}{2}-\frac{T}{w}\frac{H_0-H_L}{L}; \tag{9.33}$$

$$H=H_0-\frac{H_0-H_L}{L}x+\frac{w}{2T}(Lx-x^2). \tag{9.34}$$

При многослойном строении междуречного массива величина T_1 представляет собой суммарную водопроводимость всех слоев, кроме верхнего. При отсутствии инфильтрационного питания из уравнения (9.28) получаем зависимость (9.21) для многослойного пласта, а из (9.32) и (9.34) — уравнения (9.8) и (9.9). При $k_1=0$ или $T_1=0$ из уравнений (9.28) — (9.31) получим уравнения для однородного пласта (9.24) — (9.26). Принимая $w=0$, получим уравнения Дюпюи (9.11) и (9.12).

З а д а ч а. Приняв пласт однородным и водоупор горизонтальным, получить аналогичным способом расчетные зависимости для случая равномерного питания при граничных условиях:

а) $x=0, \quad h=h_0; \quad x=L, \quad \frac{dh}{dx}=0$

[ответ: $h^2=h_0^2+\frac{wx}{k}(2L-x), \quad q_0=-wL$];

б) $x=0, \quad h_0=0; \quad x=L, \quad h_L=0$

[ответ: $h^2=\frac{wx}{k}\cdot(L-x)$].

З а д а ч а. Получить расчетные зависимости при линейном изменении k по формуле (5.1), используя уравнение Дарси (9.2).

Ответ: $$q_0=\frac{k_2-k_1}{\ln\frac{k_2}{k_1}}\cdot\frac{h_0^2-h_L^2}{2L}-wL\left[\frac{k_2-k_1\left(1+\ln\frac{k_2}{k_1}\right)}{(k_2-k_1)\ln\frac{k_2}{k_1}}\right];$$

$$a = L\left[\frac{k_2 - k_1\left(1 + \ln\frac{k_2}{k_1}\right)}{(k_2 - k_1)\ln\frac{k_2}{k_1}}\right] - \frac{k_2 - k_1}{w\ln\frac{k_2}{k_1}}\,\frac{h_0^2 - h_L^2}{2L}.$$

При неравномерном инфильтрационном питании расчетные зависимости легко получить методом фрагментов. Примем пласт с кусочно-однородной водопроводимостью (см. рис. 9.3, *г*). Разделим поток на два фрагмента l_1 и l_2, каждый из которых имеет постоянное питание w_1 и w_2 и водопроводимость T_1 и T_2. Для раздельного сечения p расходы слева и справа от границы

$$q_p = T_1\frac{H_0 - H_p}{l_1} + \frac{w_1 l_1}{2} \quad \text{и} \quad q_p = T_2\frac{H_p - H_L}{l_2} - \frac{w_2 l_2}{2} \qquad (9.35)$$

равны, и после преобразований найдем уровень воды в этом сечении.

$$H_p = \frac{l_1 l_2}{l_1 T_1 + l_2 T_2}\left(H_0\frac{T_1}{l_1} + H_L\frac{T_2}{l_2} + \frac{w_1 l_1 + w_2 l_2}{2}\right). \qquad (9.36)$$

Определив H_p, находим по формуле (9.35) расход потока. В сечении $x = 0$ он равен

$$q_0 = \frac{T_1 T_2}{l_1 T + l_2 T_2}(H_0 - H_L) - \frac{l_2 T_1}{l_1 T_2 + l_2 T_1}\,\frac{w_1 l_1 + w_2 l_2}{2} - \frac{w_1 l_1}{2}. \qquad (9.37)$$

Расчетные зависимости, учитывающие испарение с поверхности грунтовых вод, приводятся в работах С. Ф. Аверьянова [1], В. М. Шестакова [54] и Н. Н. Веригина [30]. Сложные профильные задачи решают методом моделирования.

З а д а ч а. Получить из уравнений (9.35) — (9.37): а) расчетные зависимости для случая $T_1 = T_2$; б) формулу Дарси; в) расчетные зависимости для грунтового потока с горизонтальным ложем, приняв k_1 вместо T_1 и k_2 вместо T_2, $2h_{ср}H = h^2$; г) уравнения (9.26) и (9.11).

9.5. ВЕРТИКАЛЬНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Такая фильтрация возникает, если выполняется условие (9.5а). Скорость фильтрации и форма вертикального потока зависят от конфигурации смоченного периметра канала или водотока (чем положе откосы, тем ближе направление потока к вертикали и меньше изменение его ширины), свойств пород зоны аэрации ($k_в$, $H_к$), глубины h_0 заполнения шурфа или канала. В работах Н. Н. Павловского, В. В. Ведерникова, Н. К. Гиринского и Н. Н. Веригина по-разному учитывались влияние капиллярных сил и ширина потока, а скорость фильтрации оценивалась по формуле (9.5) или градиент напора принимался равным единице.

Обобщение результатов исследований выполнено С. Ф. Аверьяновым [1], который для оценки вертикального стационарного расхода предложил использовать формулу Дарси в виде (см. рис. 4.1, *г*)

$$\overline{Q}_{\Phi} = k_{\text{в}}\left[1 + 0{,}5\frac{H_{\text{к}}}{B}\right](B + 2h_0), \tag{9.38}$$

где $k_{\text{в}}$ определяется по формуле (3.16); B — ширина канала по урезу воды при глубине заполнения h_0.

9.6. ИЗУЧЕНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ ЕСТЕСТВЕННЫХ ПОТОКОВ

Аналитические решения используются для решения следующих задач: 1) построение депрессионных кривых; 2) определение расходов естественных потоков; 3) исследование гидродинамики потока; 4) оценка принятых допущений при геофильтрационной схематизации; 5) определение гидрогеологических параметров по данным наблюдений за режимом подземных вод.

Построение депрессионных кривых состоит в нахождении расчетных значений мощности потока h и отметок пьезометрических уровней H в тех точках пласта, где отсутствуют экспериментальные данные. Для этого как минимум должны быть известны схема строения пласта с расчетными значениями параметров и значения h или H в двух точках. Определение расходов потока q и Q в различных гидрогеологических условиях представляет собой оценку естественных ресурсов подземных вод (подробнее см. [12, 38]).

Исследования гидродинамики потока. Эти исследования включают оценку влияния различных геологических факторов на динамику потоков подземных вод, что позволяет выявить закономерности их движения в различных природных условиях.

Рассмотрим схему, приведенную на рис. 9.2, *г*, и оценим роль суглинистых отложений, прикрывающих зону разгрузки грунтовых вод вблизи водотока. Сопоставим для участка длиной $L = l_1 + l_2$ два расхода для однородного (9.11) и кусочно-однородного (9.14) пластов, принимая, что в пределах l_1 залегают суглинки с k_1

$$\alpha = \frac{q_{\text{н}}}{q_0} = \frac{L}{\left(\frac{l_1}{k_1} + \frac{l_2}{k_2}\right)k_2} = \frac{l_1 + l_2}{\frac{l_1 k_2}{k_1} + l_2}. \tag{9.39}$$

Анализ выражения (9.39) показывает, что уменьшение k_1 ведет к уменьшению α и сокращению расхода потока (в случае, когда водоносные пески прикрыты суглинками не возникает заметных источников). Примем соотношение длин участков $l_1/l_2 = 0{,}1$, тогда для отношения k_2/k_1 получим следующие значения α:

k_2/k_1	100	50	10	5
α	0,1	0,2	0,55	0,7,

что свидетельствует о значительном уменьшении расхода $q_{\text{н}}$.

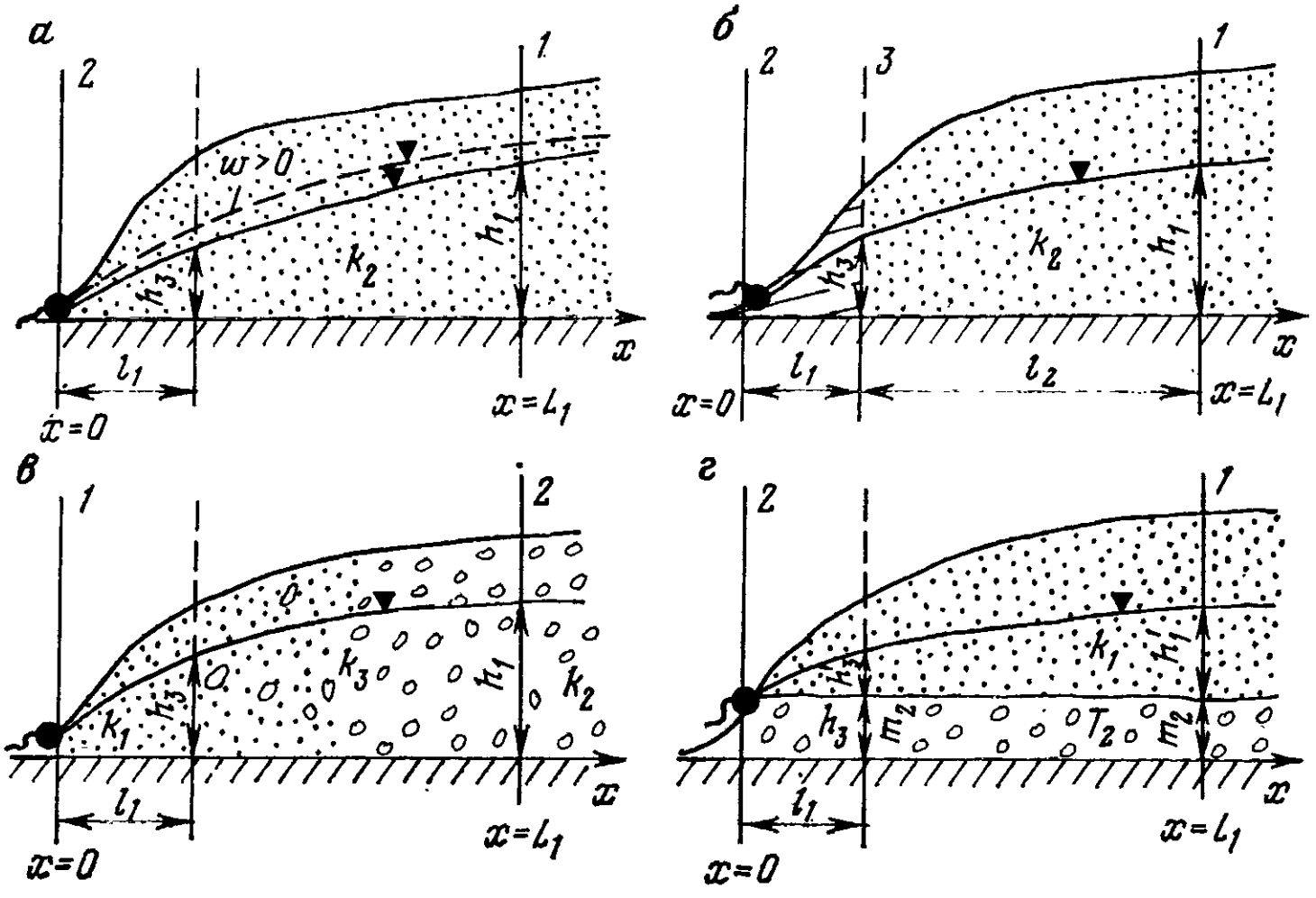


Рис. 9.4. Расчетные схемы к задаче исследования зависимости дебита источника от строения пласта.

Строение пласта: *а* — однородное; *б* — кусочно-однородное; *в* — постепенно изменяющееся; *г* — двухслойное

З а д а ч а. Определить, как изменяется расход потока, если зона l_1 будет представлена слоем галечников или закарстованных известняков с $k_1 \gg k_2$.

Аналогичным образом исследуем соотношение расходов потока для однородного пласта с k_2 или T_2 по формуле (9.13) и с T и k, изменяющимися линейно по формуле (9.17):

$$\alpha = \frac{1 - (T_1/T_2)}{\ln (T_2/T_1)} \qquad \text{или} \qquad \alpha = \frac{1 - (k_1/k_2)}{\ln (k_2/k_1)}.$$

Эти зависимости используем для изучения влияния строения, пласта на дебит источника. Для четырех типовых схем, приведенных на рис. 9.4, в табл. 9.1 даны рассчитанные значения дебитов источника при условии, что k_2/k_1 или T_2/T_1 равно 10. Как видно, дебиты заметно различаются.

Таблица 9.1

Строение пласта	Дебит источника, м³/сут	Мощность потока при $x = l_1$, м
Однородное	11,2	4,74
Кусочно-однородное	5,9	10,9
Линейно изменяющееся	4,4	7,9
Двухслойное	5,5	8,2

Из уравнений (9.9) и (9.12) видно, что в однородных напорных и грунтовых потоках с постоянной T кривая депрессии описывается уравнением прямой линии, в грунтовых водах с горизонтальным водоупором—параболой, а градиент потока от k и T не зависит. Если ширина, мощность потока или его фильтрационные свойства изменяются по линейному закону, то это изменение влияет на градиент, т. е. форму депрессионной кривой. Это легко показать, если уравнение (9.17) записать для участков 0—L и 0—x. Тогда, приравнивая расходы, получим

$$H_x = H_0 - \frac{\varphi_0 - \varphi_L}{\varphi_0 - \varphi_x} \cdot \frac{\ln \frac{\varphi_0}{\varphi_x}}{\ln \frac{\varphi_0}{\varphi_L}} \cdot (H_0 - H_L),$$

где φ_x — один из показателей (k, B или m), определяемый по зависимости (5.1). При этом, если $\varphi_0 > \varphi_L$, то кривая выпуклая (относительно оси x), а если $\varphi_0 < \varphi_L$,— вогнутая.

Анализ формы пьезометрических кривых показывает, что подземные воды могут двигаться как по падению, так и по восстанию пласта, и при значительных переуглублениях ложа поток существует, хотя скорость его на таких участках существенно снижается.

З а д а ч и: 1. Запишите для каждой схемы, приведенной на рис. 9.4, уравнение депрессионной кривой.

2. Покажите, что депрессионная кривая инфильтрационного потока описывается уравнением эллипса. Примите простые условия: $h_0 = h_L = 0$, $L = 2a$ (где a — расстояние до водораздела).

Установим положение подземного водораздела в пределах междуречья или в заданной части потока. Задача решается анализом знаков расхода q_0 потока в начале координат и расстояния a до подземного водораздела. Из анализа, например, уравнений (9.32) и (9.33) или (9.28) и (9.30) видно, что при $q_0 < 0$ или $a > 0$ и $a < L$ подземный водораздел находится внутри участка L, при $a > L$ — смещен за правую границу участка; при $q_0 = 0$ или $a = 0$ он располагается в начальном сечении $x = 0$; при $q_0 > 0$ или $a < 0$ водораздел смещен влево от исследуемого участка.

Возможности гидродинамического анализа на рассмотренных примерах не исчерпываются. Подводя итог, отметим, что формулы стационарной фильтрации можно использовать для выполнения так называемых «разведочных» расчетов при составлении программы изысканий. Сопоставляя между собой результаты числовых определений q, h, a, H для различных типовых схем при возможном диапазоне исходных параметров, выявляют те области соотношения факторов, при которых различие в показателях q, h, a, H практически мало́ или, наоборот, значительно. В первом случае, близкое сходство расчетных значений показывает, что не следует при изысканиях добиваться высокой точности определения гидрогеологических параметров, входящих в расчетные формулы. Во втором значительное расхождение указывает на необходимость оценивать параметры более достоверно.

Таким образом, типовые схемы играют роль имитационных моделей и позволяют теоретическим путем выявить свойственные каждой схеме особенности гидродинамики, установить для каждой ведущие факторы и использовать эти данные при составлении программы, повышая тем самым целенаправленность изысканий. Такой имитационный процесс называют разведочным, или имитационным, моделированием.

Оценка погрешностей схематизации. Последовательно упрощая гидрогеологическую обстановку и заменяя, например, неоднородное строение пласта однородным $\varepsilon_к$, негоризонтальный водоупор горизонтальным ε_i и пренебрегая величиной инфильтрационного питания ε_w и т. п., мы допускаем погрешность в расчетах, связанную с неучетом этих факторов. Суммарная относительная погрешность схематизации определяется по формуле

$$\varepsilon_{об} = \sqrt{\varepsilon_к^2 + \varepsilon_w^2 + \varepsilon_i^2 + \ldots}. \qquad (9.40)$$

При оценке влияния схематизации указанных факторов на величину расхода потока в формуле (9.40) значения ε принимают вид

$$\varepsilon_к = \frac{q_н - q_0}{q_н}; \qquad \varepsilon_w = \frac{q^w - q}{q^w};$$

$$\varepsilon_i = \frac{q_{i>0} - q_{i=0}}{q_{i>0}},$$

где в числителе стоит разность значений расходов, полученных с учетом действия фактора и при его схематизации. Примем для расчетной схемы однородного пласта (см. рис. 9.4, *а*) такие данные: $k_2 = 10$ м/сут; $h = 38{,}8$ м; $h_0 = 0$; $L = 500$ м; $w = 10^{-2}$ м/сут. За исходное примем уравнение (9.26) и вычислим расход потока в сечении $x=0$ $q_0^w = -k\frac{h_L^2}{2L} - \frac{wL}{2} = -11{,}5 - 2{,}5 = -14$ м²/сут на 1 м ширины потока. Первый член уравнения отвечает расходу потока при $w = 0$, а второй — приращению расхода за счет инфильтрационного питания, которое составляет 18 % от общей величины и которым пренебрегать при построении расчетной схемы нельзя.

9.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ ЗА СТАЦИОНАРНЫМ РЕЖИМОМ ПОТОКА

Определение гидрогеологических параметров по данным наблюдений за стационарным режимом подземных вод рассмотрено в работах Г. Н. Каменского, Н. Н. Биндемана, А. В. Лебедева, В. М. Шестакова, И. К. Гавич и др.

Определение проводится на основе построения лент тока и рассмотрения соотношений расходов потока в этой ленте. Для плоского в плане потока при отсутствии инфильтрационного водообмена равен-

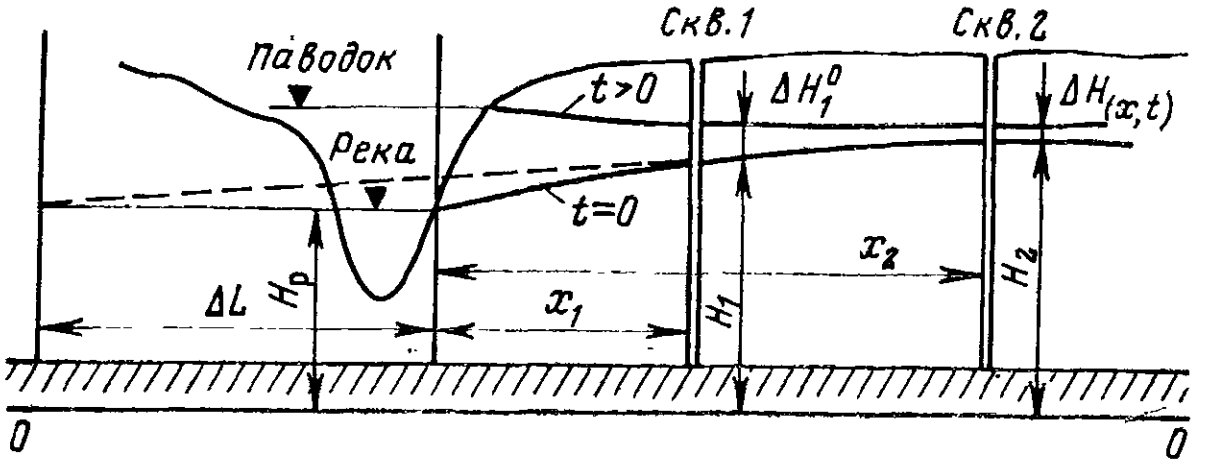


Рис. 9.5. Расчетная схема расположения скважин для определения параметра $L_{нд}$ (по В. М. Шестакову)

ство расходов между парами 1—2 и 2—3 наблюдательных скважин записывается согласно уравнению (9.8):

$$\frac{T_{1-2}}{T_{2-3}} = \frac{I_{2-3}}{I_{1-2}} \cdot \frac{b_{2-3}}{b_{1-2}}, \tag{9.41}$$

где T_{1-2}, T_{2-3} и b_{1-2}, b_{2-3} — соответственно средние значения водопроводимости и ширины ленты тока между парами скважин; I_{1-2} и I_{2-3} — средние градиенты потока, $I_{1-2} = \Delta H_{1-2}/\Delta x_{1-2}$ и $I_{2-3} = \Delta H_{2-3}/\Delta x_{2-3}$. При известной величине T_{2-3} по формуле (9.41) определяют T_{1-2}, а зная соотношение средних мощностей потока на участке, находят значения k_{1-2} и k_{2-3}. При однородном строении пласта по уравнению (9.24) рассчитывается относительная величина инфильтрационного питания w/k. При известных значениях мощности потока в трех точках и $i = 0$ расчетная формула имеет вид

$$\frac{w}{k} = \frac{h_0^2 - h_x^2}{(L-x)\,x} + \frac{h_0^2 - h_L^2}{(L-x)\,L}. \tag{9.42}$$

Если известно значение k, то из (9.42) вычисляют w как среднюю величину, отвечающую модулю подземного стока.

Оценка сопротивления ложа водоема $L_{нд}$ выполняется на основе наблюдений за уровнем воды в реке и в двух скважинах, расположенных вне зоны гидродинамического несовершенства реки (примерно на расстоянии не менее двух мощностей потока). Исходное уравнение получают из равенства двух расходов (рис. 9.5): 1) идущего к реке на участке между скв. 1 и 2; 2) на участке между скв. 1 и урезом реки, который условно отодвигается от скважины на величину $L_{нд}$, характеризующую ту дополнительную потерю напора, которая связана с деформацией потока под влиянием несовершенства вреза реки в водоносный горизонт [54]

$$L_{нд} = \frac{H_1 - H_р}{H_2 - H_1}(x_2 - x_1) - x_1, \tag{9.43}$$

где H_1 и H_2 — отметки уровня подземных вод в скважинах на расстояниях x_1 и x_2 от уреза реки с отметкой $H_р$. Формула (9.43) предполагает однородное строение пласта на всем участке и $w_а = 0$.

В сложных условиях $L_{нд}$ определяют с помощью моделирования [11, 17, 54, 55].

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие упрощения свойственны плоскопараллельной фильтрации?
2. Как доказать эквивалентность потоков с постоянной водопроводимостью, неоднородного и горизонтальнослоистого строения?
3. Какие погрешности возникают, если пользоваться уравнением (9.13) вместо (9.11)?
4. Как получить уравнение для построения пьезометрической кривой, если известна формула (9.17)?
5. Как доказать, что мощность грунтового потока с инфильтрационным питанием больше, чем при его отсутствии?
6. Как, зная уравнение (9.25), получить формулу для определения положения подземного водораздела?
7. Если по зависимости (9.26) $q_0 > 0$, то где находится подземный водораздел?
8. Чему равен градиент потока в формуле (9.38)?
9. Получите уравнения для определения расхода и мощности напорного потока, если установлено, что мощность в нем изменяется по закону (5.1).
10. Какие допущения приняты при выводе формулы (9.43)?
11. Какие условия должны быть выполнены для оценки отношения w/k по формуле (9.42)?

Глава 10
ОДНОМЕРНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

10.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА И ОСНОВНЫЕ ТИПЫ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ

Математическая постановка задачи формулируется главным образом для приращения уровня подземных вод $\Delta H_{x,\,t}$. Пьезометрический уровень $H_{x,\,t}$ находят методом суперпозиции согласно зависимости (6.55). При использовании такого приема предполагается, что при $w = 0$ фильтрация описывается линеаризованным уравнением (6.56), а при наличии питания зависимостью

$$a\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x^2} + \frac{w}{\mu} = \frac{\partial \Delta H}{\partial t}. \qquad (10.1)$$

В качестве типовых расчетных схем, для которых аналитически получены ф у н д а м е н т а л ь н ы е решения, используются схемы полуограниченного и ограниченного пластов с граничными условиями первого и второго родов, без учета и с учетом инфильтрационного питания, заданного на всей площади распространения потока или на полосе шириной B (рис. 10.1, 10.2). На границах потока $x = 0$ и $x = L$ рассматриваются в качестве основных такие законы (рис. 10.3): а) мгновенное приращение уровня ΔH^0; б) постепенное изменение $\Delta H^0 = vt = \Delta H^0 t/t_p$; в) одна из границ непроницаема (см. рис. 10.2,*б*). Рассматривают в основном пласты с однородным строением.

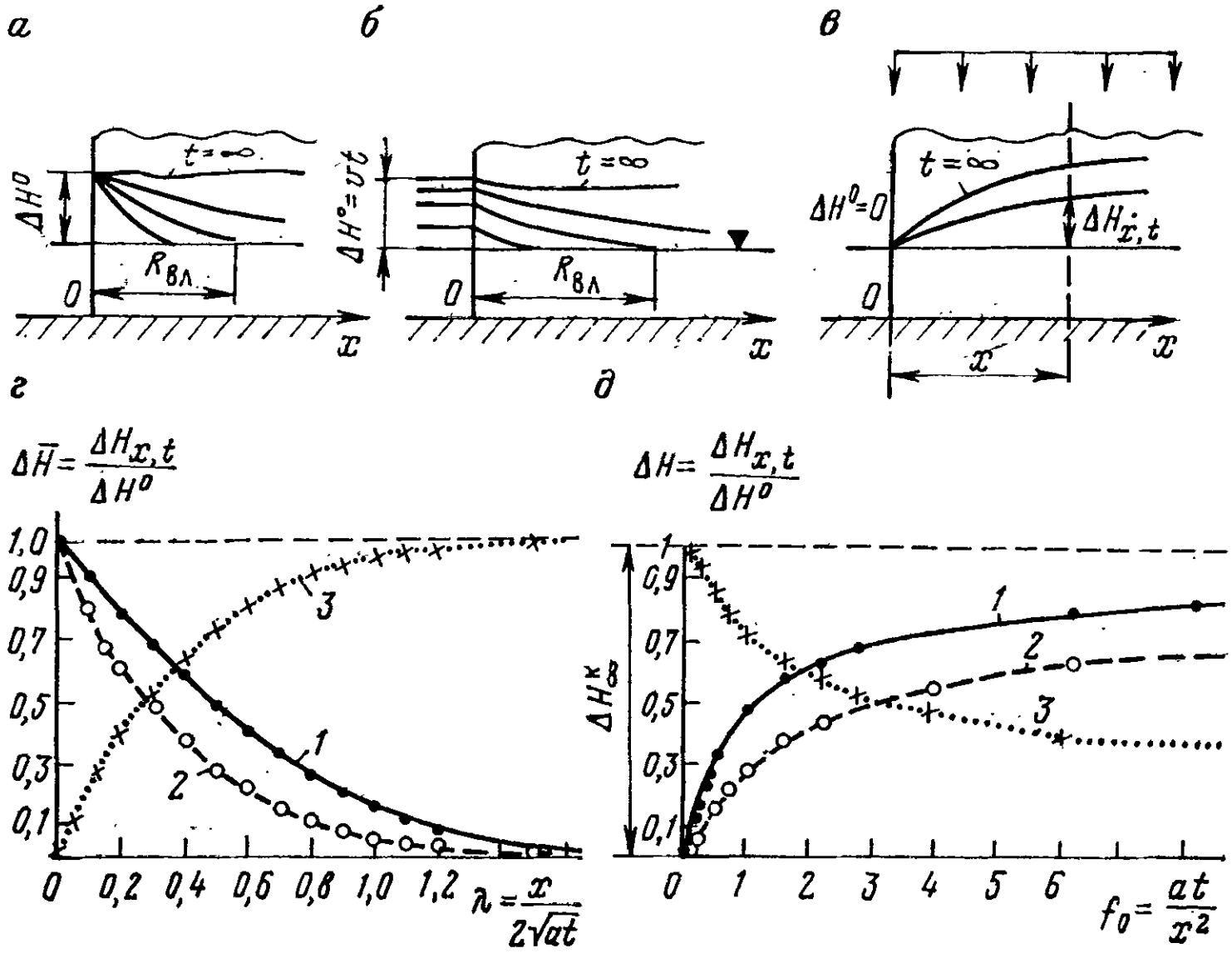


Рис. 10.1. Расчетные схемы нестационарной фильтрации в полуограниченном пласте (*а*, *б*, *в*) и диагностические графики изменения относительного приращения $\Delta\bar{H}$ уровня грунтовых вод в зависимости от λ (*г*) и f_0 (*д*).

Относительные депрессионные кривые при следующих граничных условиях: *1* — мгновенном изменении ΔH^0; *2* — постепенном изменении vt; *3* — равномерном инфильтрационном питании w

Выводы фундаментальных решений для перечисленных и других расчетных схем приведены в работах П. Я. Полубариновой-Кочиной [40], С. Ф. Аверьянова [1], Н. Н. Веригина [30], В. М. Шестакова [54], В. К. Рудакова [30] и др. [8. 50], численные решения, основанные на методе конечных разностей, рассмотрены в работах Г. Н. Каменского с соавторами [14] и В. М. Шестакова [26]. Сложные случаи нестационарной плановой и плосковертикальной фильтрации исследуются с применением АВМ и ЭЦВМ [11, 54, 56].

10.2. ОДНОМЕРНЫЕ ПОТОКИ БЕЗ ИНФИЛЬТРАЦИОННОГО ПИТАНИЯ

Полуограниченные потоки. Рассмотрим фундаментальное решение для полубесконечного потока (см. рис. 10.1, *г*, кривая 1) при мгновенном изменении уровня на границе. Краевые условия для уравнения (6.56) формулируются так: $t=0$, $\Delta H_{x,0}=0$, $x=0$, $\Delta H^0=\text{const}$, $x=\infty$, $\Delta H_{\infty}\to 0$. Решение имеет вид

$$\Delta H_{x,t}=\Delta H^0\operatorname{erfc}(\lambda). \qquad (10.2)$$

Функция erfc (λ) определяется следующим образом:

$$\operatorname{erfc}(\lambda) = 1 - \Phi(\lambda); \tag{10.3}$$

$$\lambda = x/2\sqrt{at}. \tag{10.3а}$$

Функция $\Phi(\lambda) = \operatorname{erfc}(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-\lambda^2} d\lambda$ — известный интеграл вероятности, она табулирована, значения ее и функции erfc (λ) приведены в приложении и на рис. 10.1, (кривая *1*). При $t = 0 \lambda \to \infty$ и $\Phi(\infty) = 1$, а $\operatorname{erfc}(\infty) = 0$ и $\Delta H_{x,t} = 0$, что отвечает заданным начальным условиям. При стационарных условиях, когда $t = \infty$ $\lambda = 0$ и $\Phi(0) = 0$, а $\operatorname{erfc}(0) = 1$ и $\Delta H_{x,t} = \Delta H^0$, и, следовательно, изменение уровня $\Delta H_{x,t}$ в каждом сечении со временем стремится к предельному стационарному значению $\Delta H^{к}_{x,\infty}$, равному изменению на границе $x = 0$, т. е. $\Delta H^{к}_{x,\infty} = \Delta H^0$.

Найдем зону влияния нестационарной фильтрации $R_{вл}$ (см. рис. 10.1, *а*), приняв допустимую погрешность ε в определении, $\Delta H_{x,t}/\Delta H^0$ равной 1 %, что отвечает величине расхождения функций $\operatorname{erfc}(\lambda)/\operatorname{erfc}(\infty)$. Как видно из таблицы, приведенной в приложении, принятая величина расхождения наблюдается при аргументе функции $\lambda = 2$. Подставив это значение в формулу (10.3а), получаем

$$R_{вл} = 4\sqrt{at}. \tag{10.4}$$

Зависимость (10.4) используют для оценки: а) сферы влияния инженерного сооружения, если подпор создается повышением уровня воды в канале или водохранилище; б) степени влияния внешних границ ($x = L$) на формирование подпора и необходимости их учета в расчетной схеме (см. разд. 5.3).

Время $t_р$, начиная с которого вместо полуограниченного пласта нужно пользоваться схемой ограниченного потока, равно

$$t_р \geqslant 0{,}25 \frac{L^2_{гр}}{a}. \tag{10.5}$$

Принимая другие значения ε, можно получить иные цифровые коэффициенты в выражениях (10.4) и (10.5).

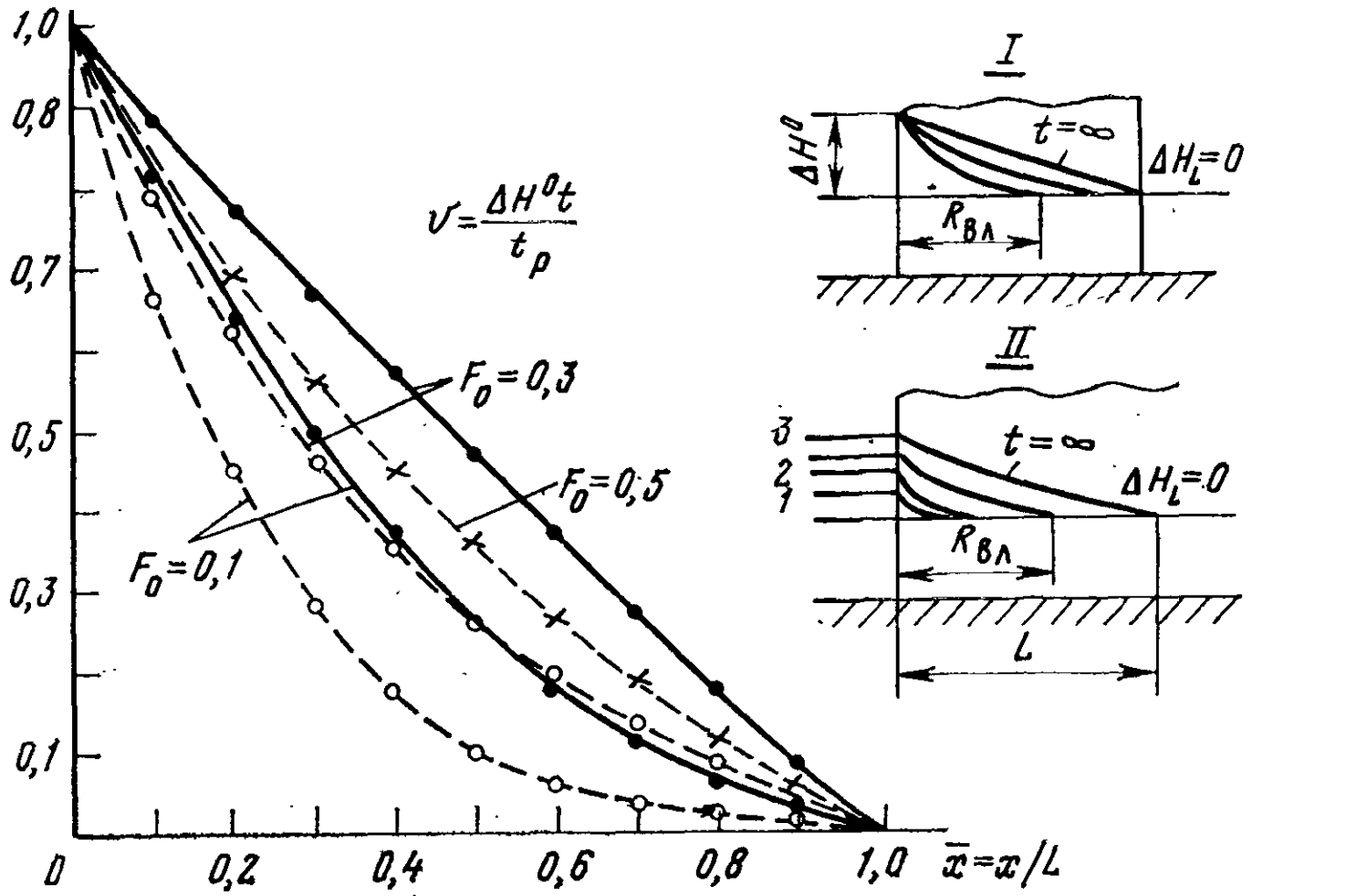
Для получения уравнения фильтрационного расхода следует в уравнение Дарси (4.6) подставить зависимость (10.2) и продифференцировать полученное выражение по x (рис. 10.4, *а*)

$$q_ф = -kh_{ср} \frac{\partial \Delta H_{x,t}}{\partial x} = \frac{kh_{ср}\Delta H^0}{\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{x^2}{4at}} \Big|_{x=0} = \frac{T\Delta H^0}{\sqrt{\pi at}}. \tag{10.6}$$

При наличии естественного $q_е$ расхода потока согласно методу сложения течений имеем (см. рис. 10.4, *б*):

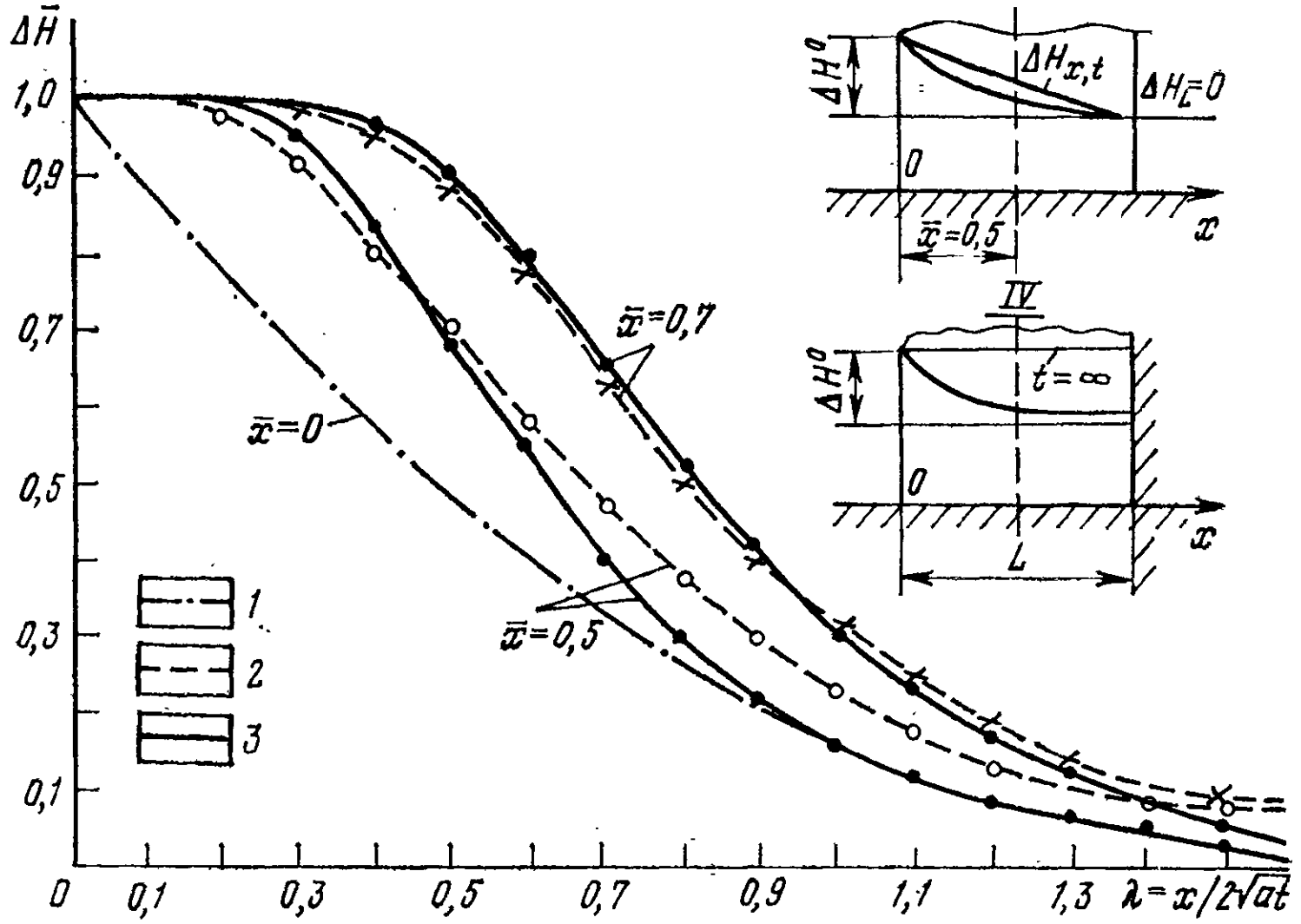
$$q_{об} = q_ф \pm q_е = \frac{T\Delta H^0}{\sqrt{\pi at}} \pm T\frac{\Delta H_{0-L}}{L}, \tag{10.7}$$

а


ΔH̄
1,0
0,8
0,7
0,5
0,3
0,1
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
x̄=x/L
ν=ΔH⁰t/t_p
F₀=0,3
F₀=0,5
F₀=0,1
I
ΔH⁰
t=∞
ΔH_L=0
R_вл
II
3
2
1
t=∞
ΔH_L=0
R_вл
L

б

III


ΔH̄
1,0
0,9
0,7
0,5
0,3
0,1
0
0,1
0,3
0,5
0,7
0,9
1,1
1,3
λ=x/2√at
x̄=0
x̄=0,7
x̄=0,5
1
2
3
ΔH⁰
ΔH_x,t
ΔH_L=0
0
x̄=0,5
x
IV
ΔH⁰
t=∞
0
x
L

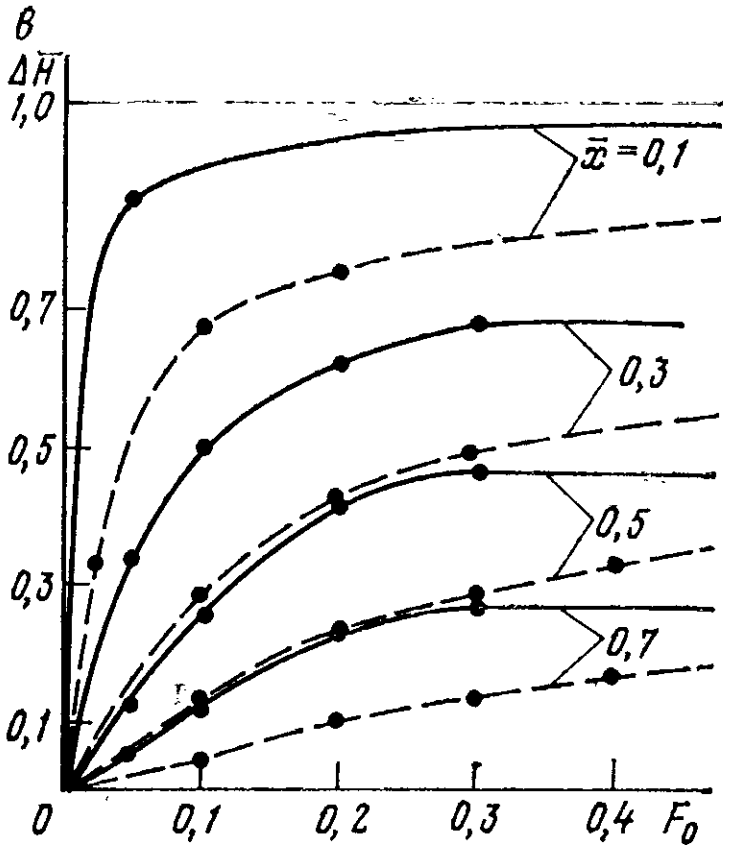


Рис. 10.2. Расчетные схемы нестационарной фильтрации в ограниченном пласте и диагностические графики зависимости относительного приращения $\Delta\bar{H}$ уровня грунтовых вод от $\bar{x}$ (*а*), λ (*б*) и F_0 (*в*).

Относительные депрессионные кривые при мгновенном изменении относительного уровня на границе $\Delta\bar{H}^0$: *1* — в полубесконечном пласте; *2—3* — в ограниченном пласте (*2* — с открытой границей при $x = L$, *3* — с закрытой границей при $x = L$). I—IV — расчетные схемы

где $\Delta H^0{}_{-L}/L$ — средний градиент естественного потока на участке длиной L. Положительный знак q_e имеет, если направление потока совпадает с осью x.

Объем воды, затраченнои на насыщение пласта за время $t_р$, определяется с учетом формулы (10.7):

$$V_{об} = \int_0^{t_р} q_{об}dt = \frac{2T\Delta H^0}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{t_р} \pm T\frac{\Delta H_{0-L}}{L}t_р. \qquad (10.8)$$

Согласно уравнению (10.8) формирование подпора грунтовых вод зависит от соотношения $q_ф$ и q_e (некоторые схемы, основанные на этом отношении, показаны на рис. 10.4*в*, *г*). Если направления потоков $q_ф$ и q_e не совпадают, то в процессе формирования подпора грунтовых вод наступает момент $t_ф$, когда фильтрация воды через сечение $x = 0$ закончится и далее развитие подпора определяется только величиной q_e (см. рис. 10.4, *б*).

Для определения времени $t_ф$ воспользуемся формулой (10.7), считая, что в ней $q_ф = q_e$, и после преобразований получим

$$t_ф = \frac{L^2\Delta H^{0^2}}{\pi a\Delta H^2_{0-L}}. \qquad (10.9)$$

З а д а ч а. Для потока с горизонтальным водоупором получить расчетные зависимости (10.2) и (10.6) — (10.9), используя напорную функцию $U = \Delta Hm = 0{,}5\ \Delta h^2$.

К в а з и с т а ц и о н а р н а я ф и л ь т р а ц и я характеризуется регулярным упорядоченным режимом фильтрации. Для того чтобы найти зависимость для определения градиента потока и скорости изменения приращения уровня, продифференцируем выражение (10.2) по t и по x

$$\frac{\partial\Delta H}{\partial x} = -\frac{\Delta H^0}{\sqrt{\pi a}}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4at}}; \qquad (10.10)$$

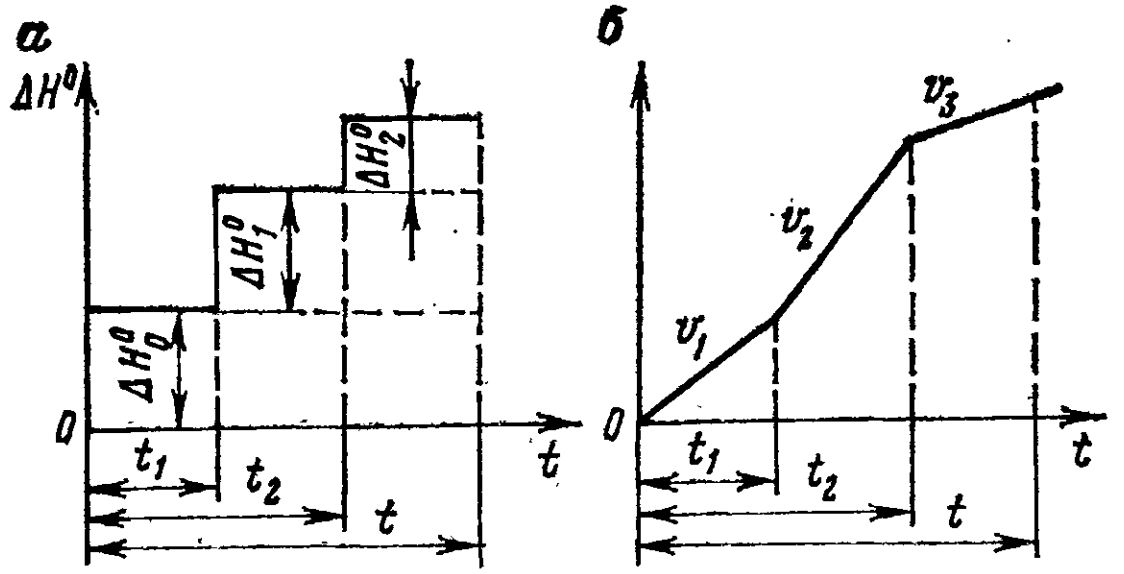


Рис. 10.3. Схема типовых граничных условий мгновенного подъема (*а*) и постепенного повышения уровня воды (*б*) на границе потока подземных вод

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial x} = \frac{\Delta H^0}{2\sqrt{\pi a}} \frac{x}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4at}} \qquad (10.11)$$

При условии, что $x < 10$ м и $t > 1$ сут или $x < 100$ м, $t > 100$ сут, $a = 10^3$ м^2/сут (что характерно для грунтовых вод с параметрами пласта $h_{ср} = 10—20$ м, $k = 10—5$ м/сут и $\mu = 0{,}1$) и $e^{x^2/(4at)} \to 1$, уравнения (10.10) и (10.11) могут быть упрощены:

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial x} = -\frac{\Delta H^0}{\sqrt{\pi a}} \frac{1}{\sqrt{t}}; \qquad (10.10а)$$

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial x} = \frac{\Delta H^0}{2\sqrt{\pi a}} \frac{x}{t\sqrt{t}} \qquad (10.11а)$$

Как показывает анализ уравнений (10.10а) и (10.11а), градиент потока и скорость изменения уровня зависят не только от фильтрационных, но и от емкостных свойств пласта, при этом градиент зависит от времени, а скорость — от расстояния до «действующей» границы. С некоторого момента вблизи границы $x = 0$ начинает формироваться расширяющаяся зона, в пределах которой процесс фильтрации по своим гидродинамическим характеристикам (распределение градиентов потока, количество проходящей через поперечное сечение потока воды) мало отличается от стационарного. Оценим [1], с какого момента для расстояний x от границы можно нестационарный расход потока подсчитывать по формуле Дюпюи для стационарной фильтрации при той же разнице напоров $(\Delta H^0 — \Delta H_{x,t})$.

Для установившегося движения при $i > 0$ расход $q_{ус}$ определяют по формуле

$$q_{ус} = T\frac{\Delta H^0 - \Delta H}{x}.$$

Согласно уравнениям (10.2) и (10.3) $(\Delta H^0 — \Delta H) = \Delta H^0 \mathrm{erf}\,(\lambda)$, тогда

$$q_{ус} = \frac{T\Delta H^0}{x}\,\mathrm{erf}\,(\lambda).$$

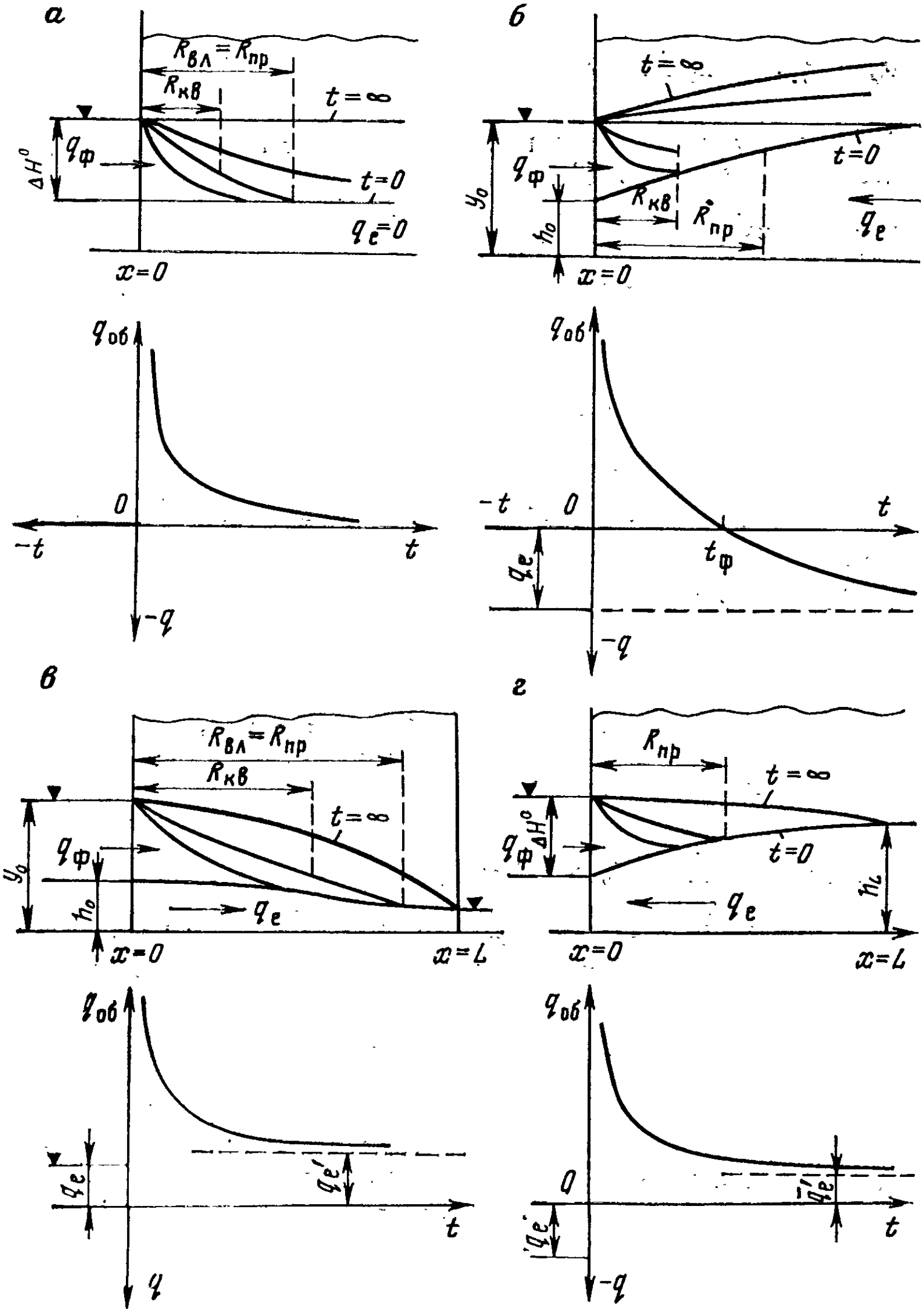


Рис. 10.4. Схемы формирования кривых подпора и фильтрационного расхода потока в различных гидрогеологических условиях

Определяя нестационарный расход $q_ф$ по формуле (10.6), найдем отношение $\varkappa = q_ф/q_{ус}$, которое покажет, насколько отличается нестационарный расход от установившегося при одинаковых граничных условиях

$$q_ф = \varkappa q_{ус} \quad \text{при} \quad \varkappa = \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\,(\lambda)}. \tag{10.13}$$

Воспользуемся понятиями времени стабилизации процесса фильтрации τ [1]

$$\tau = x^2/a \ [\text{сут}] \tag{10.14}$$

и относительного времени стабилизации

$$f_0 = at/x^2 = t/\tau. \tag{10.15}$$

Последнее, как видно из уравнения (10.15), показывает, как быстро для точки, находящейся на расстоянии x от источника «возмущения» (граница $x = 0$ с граничным условием $\Delta H^0 = \text{const}$), нестационарный процесс переходит в стационарный при заданных параметрах пласта. Величина f_0 — безразмерный показатель, в теории фильтрации она известна как малый параметр Фурье. Выразим в формуле (10.13) показатель $\varkappa$ через f_0

$$\varkappa = \frac{1}{\sqrt{\pi f_0}\,\mathrm{erf}\,(1/2\sqrt{f_0})}$$

и по таблице из приложения установим значение f_0 и, следовательно, момент времени $t_р$, начиная с которого с погрешностью в расходах $\varkappa \leqslant 5$ % нестационарный расход потока будет отличаться от стационарного

$$f_0 \geqslant 1{,}6 \quad \text{или} \quad t_р \geqslant 1{,}6x^2/a, \tag{10.16}$$

при этом скорости фильтрации различаются менее чем на 10 %. Размер зоны с квазистационарным режимом в этот момент времени согласно уравнению (10.16) равен

$$R_{кв} \leqslant 0{,}8\sqrt{at}. \tag{10.16а}$$

Если принять $\varkappa = 3$ %, то $f_0 = 2{,}5$ и размер зоны с квазистационарной фильтрацией определяется формулой $R_{кв} \leqslant 0{,}63\sqrt{at}$, что отвечает аналогичным характеристикам радиальной и планово-радиальной фильтрации (см. ч. III). С помощью показателей $t_р$ и $R_{кв}$ оценивают сферу взаимодействия границы $x = 0$ с геологической средой (см. главы 1,5).

При линейном изменении уровня на границе $x = 0$ граничное условие имеет вид (см. рис. 10.3, *б*)

$$\Delta H^0 = vt = \frac{\Delta H^0}{t_р}\,t,$$

а решение для этого случая записывается следующим образом (см. рис. 10.1, *г*, схема 2):

$$\Delta H_{x,t} = vtR^v(\lambda), \qquad (10.17)$$

где функция $R^v(\lambda)$ определяется по таблице из приложения и кривой *2* на рис. 10.1, *а*.

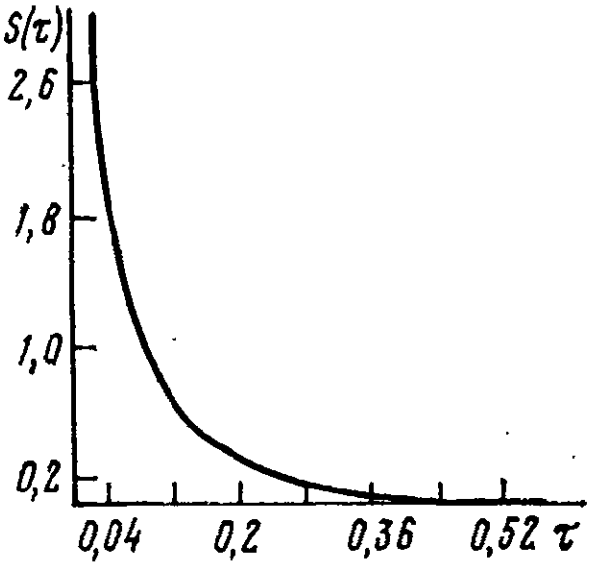


Рис. 10.5. График изменения функции $S_q(F_0)$

На рис. 10.1, *а*, *б* показаны безразмерные диагностические графики зависимости $\Delta H = \Delta H_{x,t}/\Delta H^0$ от λ и $\Delta\bar{H}$ от f^0 при мгновенном и линейном изменениях уровня на границе пласта. Анализ графиков показывает, что в первом случае подъем идет скорее, чем во втором, а соотношение этих подъемов по длине потока не постоянно. Расход потока в сечении $x = 0$ определяется согласно уравнению (4.6) дифференцированием (10.7) по x:

$$q_\Phi^v = \frac{2T\Delta H^0 t}{t_p\sqrt{\pi a t}}, \qquad (10.18)$$

где t_p — время, за которое уровень $\Delta H_{0,t}$ в сечении $x = 0$ достигает значения ΔH^0; t — текущее время, $t < t_p$. Сравнение расхода q_Φ^v, полученного по формуле (10.18) на момент $t = t_p$, с расходом q_Φ, вычисленным по формуле (10.6), показывает, что в этот момент $q_\Phi^v = 2q_\Phi$. Объем воды, затраченной на насыщение пород при формировании депрессионной кривой, определяется интегрированием уравнения (10.18) в пределах от 0 до t_p:

$$V_\Phi^v = \frac{4}{3}\frac{\Delta H^0 T}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{t_p} \qquad (10.19)$$

и составляет 2/3 от $V_{ср}$ (при мгновенном подъеме уровня на границе), что видно из сопоставления формул (10.19) и (10.8) при условии, что $q_e = 0$. Наличие естественного расхода q_e потока учитывается методом сложения течений.

Ограниченные потоки. Для ограниченного потока длиной L (см. рис. 10.2, *а*, схема *1*) с условием на левой границе мгновенного изменения уровня $x = 0$, $\Delta H^0 = \text{const}$, при постоянном уровне на правой $x = L$, $\Delta H_L^0 = 0$ и при начальном условии $t = 0$, $\Delta H_{x,0}^0 = 0$ фундаментальное решение уравнения (6.56) имеет вид

$$\Delta H_{x,t} = \Delta H^0 R(\bar{x}, F_0), \qquad (10.20)$$

где $R(\bar{x}, F_0) = [1 - \bar{x} - S(\bar{x}, F_0)]$ — функция, табулированная Н. Н. Веригиным [30], график ее представлен на рис. 10.2, *а* (сплош-

ная кривая); $\bar{x}$ и F_0 — безразмерные координаты расстояния и времени

$$\bar{x} = \frac{x}{L}; \qquad F_0 = \frac{at}{L^2} = \frac{t}{\tau_0}, \qquad \tau_0 = \frac{L^2}{a}, \tag{10.20а}$$

где F_0 — большой параметр Фурье, или относительное время стабилизации всего потока L; τ_0 — время стабилизации потока.

Как видно из анализа графика функции $R(\bar{x}, F_0)$, при значениях $F_0 \geqslant 0{,}3$ нестационарная фильтрация переходит с точностью 3–4 % в стационарную (из уравнения (10.20) видно, что $\Delta\bar{H} = \frac{\Delta H_{x,t}}{\Delta H^0} = R(\bar{x}, F_0)$). Расход потока определяется следующим выражением:

$$q_\Phi = \frac{T\Delta H^0}{2L}[1 + S_q(F_0)], \tag{10.21}$$

где $S_q(F_0)$ — функция, вычисляемая по графику, приведенному на рис. 10.5. При $F_0 \geqslant 0{,}3$ с точностью 3—4 % ее значение равно нулю, и нестационарный расход становится стационарным.

Зависимости для исследования нестационарного подпора грунтовых вод в других условиях приведены в работах [1, 30, 40].

З а д а ч а. Пользуясь методом суперпозиции, записать уравнения (10.20) и (10.21) с учетом естественного потока.

10.3. ИНФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ

Наиболее проста с х е м а н е о г р а н и ч е н н о г о п л а с т а, в пределах которого наблюдается питание с постоянной интенсивностью w. В этом случае в выражении (10.1) первый член равен нулю и фильтрация описывается уравнением

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial t} = \frac{w}{\mu},$$

которое после разделения переменных и интегрирования в пределах от 0 до H и от 0 до t принимает вид

$$\Delta H_{x,t} = \frac{wt}{\mu} \tag{10.22}$$

и характеризует непрерывный равномерный подъем уровня на всей площади водоносного пласта.

Наиболее распространена с х е м а п о л у о г р а н и ч е н н о г о п л а с т а, на границе которого $x = 0$ уровень считается неизменным ($\Delta H^0 = 0$), а питание на всей площади — равномерным w (рис. 10.1, *г*, кривая *3*). Начальные условия прежние: $t = 0$, $\Delta H_{x,0} = 0$. Фильтрация в таких условиях описывается уравнением (10.1). Введем [1] новую переменную $U_{x,t}$, связанную с $\Delta H_{x,t}$ соотношением

$$U_{x,t} = \Delta H_{x,t} - \frac{wt}{\mu}. \tag{10.23}$$

Тогда справедливо равенство $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x^2}$, а $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \Delta H}{\partial t} - \frac{w}{\mu}$, и можно, сделав соответствующую замену, преобразовать дифференциальное уравнение (10.1) к виду (6.56), где вместо ΔH будут стоять U. Аналогичным образом преобразуем начальные и граничные условия:

$$t=0; \qquad U_{x,0}=0; \qquad x=0, \qquad U_{0,t} = -\frac{wt}{\mu} = v^w t. \tag{10.24}$$

Полученная система из уравнений (6.56) и (10.24) тождественна уже рассмотренной задаче о формировании уровня грунтовых вод в полубесконечном потоке при отсутствии питания под влиянием равномерного повышения уровня со скоростью v на границе $x = 0$. Следовательно, решение для переменной U будет согласно уравнению (10.17) иметь вид

$$U_{x,t} = v^w t R^w(\lambda) = -\frac{wt}{\mu} R^w(\lambda).$$

Принимая во внимание зависимость (10.23), окончательно получаем

$$\Delta H_{x,t} = \frac{wt}{\mu}[1 - R^w(\lambda)], \tag{10.25}$$

где $R^w(\lambda) = R^v(\lambda)$ определяется по таблице в приложении и по кривой *2* на рис. 10.1, *а*, кривая *3* отвечает функции $1 - R^w(\lambda)$. Более сложные решения приведены в работах [1, 30].

10.4. УЧЕТ СЛОЖНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Изменение граничных условий, интенсивности и характера инфильтрационного питания по площади и во времени учитывается с помощью метода сложения течений, согласно которому влияние каждого нового изменения уровня или инфильтрации на поток рассматривается как самостоятельный процесс длительностью $t - t_i$ (где t_i — начало граничного изменения). Так, при ступенчатом изменении уровня на границе (см. рис. 10.3, *а*) расчетное значение уровня в сечении x на момент времени $t_{n-1} \leqslant t \leqslant t_n$ от n ступеней для полубесконечного потока с учетом зависимостей (10.2) в (10.3а) равно

$$\Delta H_{x,t} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \Delta H_i^0 \operatorname{erfc}(\lambda_i); \tag{10.26}$$

$$\lambda_i = \frac{x}{2\sqrt{a(t-t_i)}}, \tag{10.26а}$$

а для ограниченного потока с учетом зависимостей (10.20) и (10.20а)

$$\Delta H_{x,t} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \Delta H_i^0 R(\bar{x}, F_{0,t}); \tag{10.27}$$

$$F_{0,t} = \frac{a(t-t_i)}{L^2}. \tag{10.27а}$$

При ломаном графике (см. рис. 10.3, *б*) для полубесконечного потока имеем:

$$\Delta H_{x,t} = \sum_{i=0}^{i=n-1} (v - v_i)(t - t_i) R^v(\lambda_i).$$

Для ограниченного потока с изменяющимся ступенчатым графиком на обеих границах следует подсчитать по формулам (10.27) и (10.27а) подпор, вызванный изменением уровня воды на каждой границе в отдельности, и сложить полученные выражения. При этом надо иметь в виду, что при расчете подпора от границы $x = L$ следует вместо $\bar{x}$ использовать $1 - \bar{x}$.

Аналогично учитывается изменение питания по ступенчатому графику. Так, если в течение времени t_1 интенсивность инфильтрации была w, а затем она с момента t_1 мгновенно изменилась до w_1, то при $t > t_1$ имеем:

$$\Delta H_{x,t} = \frac{wt}{\mu}[1 - R^w(\lambda)] + \frac{(w_1 - w)(t - t_1)}{\mu}[1 - R^w(\lambda_1)], \qquad (10.28)$$

где λ_1 определяется по формуле (10.26а) при $i = 1$.

Если подпор формируется под влиянием изменения уровней на границах и инфильтрации, то следует подсчитать его величину, связанную с действием каждого фактора в отдельности, а затем алгебраически сложить все полученные значения.

10.5. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Анализ графиков, приведенных на рис. 10.1 и 10.2, показывает, что на динамику уровня грунтовых вод, их расход и величину потерь влияют не столько абсолютные величины уровней и питания на границах, сколько закономерности их изменения во времени. На рис. 10.6 показаны виды гидродинамической связи изменения уровней и расходов в начальном сечении потока. В тех случаях, когда рост граничного уровня ΔH^0 опережает подъем уровня грунтовых вод $\Delta H_{x,t}$, наблюдается увеличение расходов в сечении $x = 0$, а обратное соотношение этих величин обусловливает уменьшение расходов. При этом наибольшая величина q_Φ не соответствует наиболее высокому уровню в водотоке. Так, q_{max} для гармонических колебаний (см. рис. 10.6, схема *б*) отмечается при 0,75 ΔH^0, а для подъема, происходящего по закону показательной функции (там же, схема *г*),— при 0,6 ΔH^0; при дальнейшем повышении ΔH^0 расход q_Φ будет падать.

Рассмотрим влияние начального положения уровня и направления движения грунтовых вод на формирование депрессионных кривых и фильтрационного расхода потока (см. рис. 10.4). Из анализа графиков можно сделать такие выводы: а) в полубесконечных потоках зона развития нестационарной фильтрации $R_{вл}$ максимальна, а предельные значения приращения уровня во всех сечениях потока равны граничному $\Delta H_{x,\infty}$; появление второй границы $x = L$ существенно уменьшает величину подпора $\Delta H_{x,t}$ по сравнению с аналогичной для

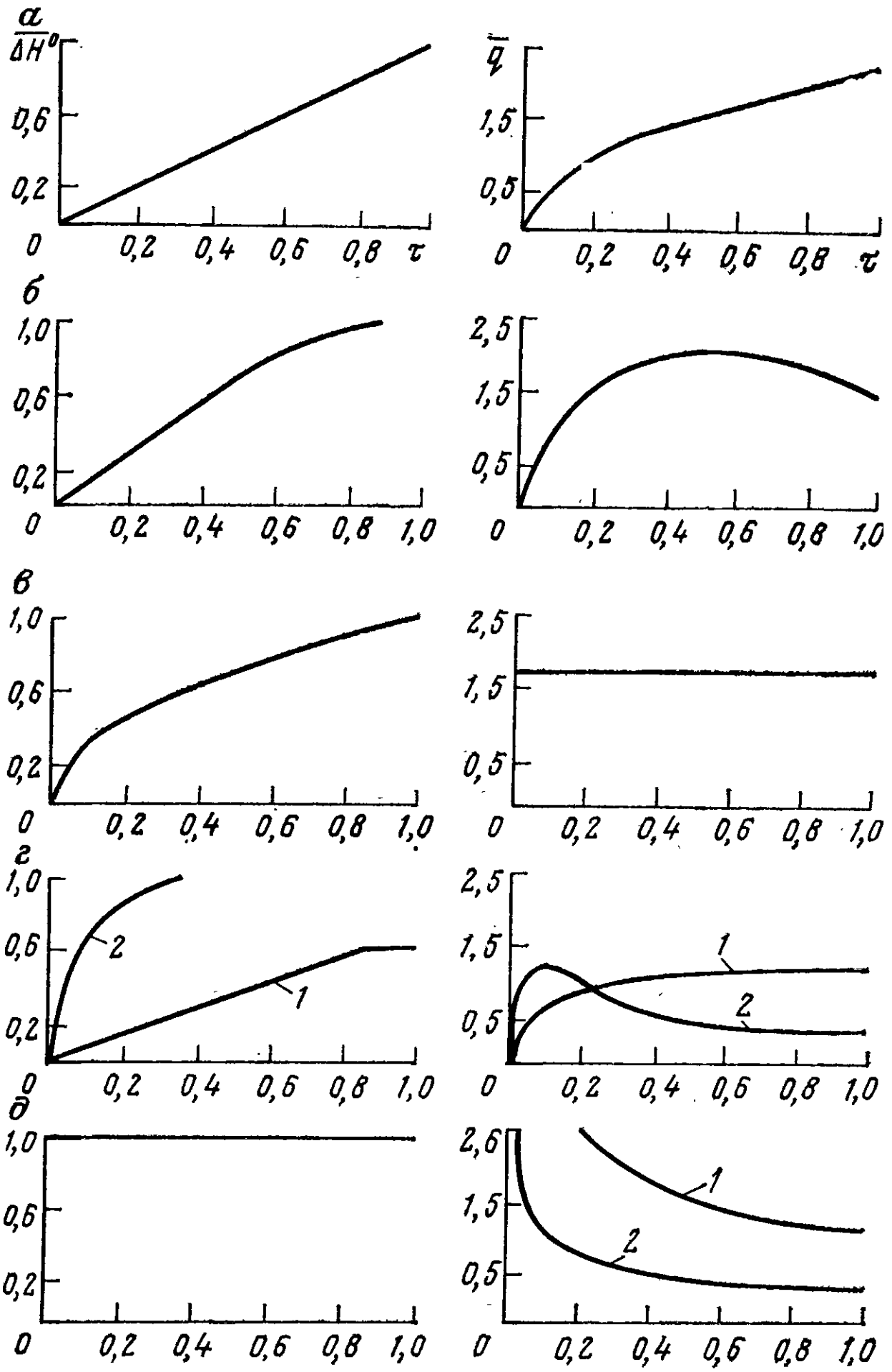


Рис. 10.6. График изменения $\Delta\bar{H}$ и $\bar{q}$ от $\bar{t}$ для различных гидрогеологических условий (по С. Ф. Аверьянову).

Схемы изменеиия в сеченин $x = 0$ относнтельных уровня ΔH^0 и расхода $\bar{q}_{x=0}$: *а* — линейный подъем уровня, $\Delta\bar{H} = \frac{\Delta H^0 t}{\tau}$ и $\bar{q} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} q_0 \sqrt{t/\tau}$; *б* — синусондальный подъем уровня, $\Delta\bar{H} = \Delta H^0 \sin\frac{\pi t}{2\tau}$ и $\bar{q} = q_0 2\sqrt{\pi}\,\eta_1$; *в* — параболнческий подъем уровня, $\Delta\bar{H} = \Delta H^0\sqrt{\frac{t}{\tau}}$ и $\bar{q} = \sqrt{\pi}\,q_0 = \text{const}$; *г* — экспоненциальный подъем уровня, $\Delta\bar{H} = \Delta H^0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ и $\bar{q} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} q_0\eta_2$; *д* — мгиовенный подъем, $\Delta\bar{H} = \Delta H^0 = \text{const}$, $\bar{q} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\bar{q}_0\sqrt{\frac{\tau}{t}}$; *1* — $0 < \tau < 1$; *2* — $1 < \tau L 0$, $\tau = L/a$, $q_0 = 1$

полубесконечного потока, при этом $\Delta H_{x,\infty} < \Delta H^0$; б) значение $q_{об}$ потока (в сечении $x = 0$) быстро уменьшается во времени, его абсолютная величина и направление определяются соотношением составляющих расходов $q_ф$ и $q_е$, которые, в свою очередь, зависят от соотношения уровней на основных границах потока; в) многие особенности естественного и нарушенного режимов подземных вод могут быть установлены заранее до проведения полевых работ путем анализа математических зависимостей тех расчетных схем, которыми могут быть предварительно аппроксимированы гидрогеологические условия исследуемого участка.

10.6. ПРИНЦИПЫ ДИАГНОСТИКИ РЕЖИМА ГРУНТОВЫХ ВОД

Одна из задач м о н и т о р и н г а, т. е. целенаправленного контроля за режимом подземных вод,— это выявление главных режимообразующих факторов и установление правильности принятой расчетной схемы, которой были аппроксимированы гидрогеологические условия исследуемого потока при прогнозировании изменений его режима под влиянием естественных и техногенных факторов. Без этого нельзя решать задачи рационального регулирования режима подземных вод. При решении таких задач много значат опыт и интуиция исследователя, но большую помощь может оказать и так называемый д и а г н о с т и ч е с к и й к о н т р о л ь. Суть его в том, что режим всех процессов, которые описываются тождественной замкнутой системой дифференциальных уравнений, имеет одинаковые закономерности. Они свойственны данной типовой расчетной схеме и прослеживаются на графиках изменения уровней и расходов потока, построенных в безразмерных координатах (см. разд. 6.9) и называемых э т а л о н н ы м и. Имея эталонные графики для разных типовых схем и представив данные режимных наблюдений в безразмерных координатах, можно сопоставить натурные графики с эталонными и найти такой, для которого совпадение будет наиболее полным. Таким образом можно выявить действующую расчетную схему и главные режимообразующие факторы. Под д и а г н о с т и к о й р е ж и м а п о д з е м н ы х в о д будем понимать процесс сопоставления данных режимных наблюдений с той расчетной схемой, которая наилучшим образом отвечает установленным его закономерностям, а под д и а г н о с т и ч е с к и м с в о й с т в о м э т а л о н н о г о г р а ф и к а — те его особенности, которыми он отличается от других эталонных графиков. Для сравнения натурные и эталонные графики изменения уровней и расхода потока представляют в безразмерном, или инвариантном, виде. Для этого выбирают для уровня, расхода, линейных размеров и времени характерные показатели и используют их в качестве масштабов для измерения текущих значений указанных переменных. Обычно все линейные размеры x измеряются в долях от длины L ограниченного потока, а приращения уровней $\Delta H_{x,t}$ и расходов $q_{x,t}$ — в долях от их предельных значений, отвечающих стационарным или граничным условиям ΔH^0 и q_0. Для времени t используют характерное время τ: для полуограниченного потока $\tau =$

$= x^2/a$, для ограниченного $\tau_0 = L^2/a$. Тогда безразмерные показатели принимают следующий вид: 1) для полуограниченных потоков: $\lambda = x/2\sqrt{at}$, $\bar{t} = f_0 = t/\tau$, $\Delta\bar{H} = \Delta H_{x,t}/\Delta H^0$ (без питания), $\Delta H = \Delta H_{x,t}\mu/(\omega t)$ (с питанием), $\bar{q} = q_{x,t}/T\Delta H$; 2) для ограниченных потоков: $\bar{x} = x/L$; $\bar{t} = t/\tau = F_0$. Построенные в этих координатах графики выражают общие, т. е. главные, закономерности, свойственные данной типовой схеме (гидрогеологическим условиям).

В таких координатах эталонные графики для рассмотренных типовых расчетных схем представлены на рис. 10.1, 10.2, 10.6. При анализе графиков установлены следующие их свойства.

1. Для полубесконечных потоков (см. рис. 10.1), независимо от величины приращения уровня на границе и значений показателей фильтрационных и емкостных свойств пласта, характер изменения относительного уровня $\Delta\bar{H}$ с относительным расстоянием λ и временем $f_0 = at/x^2$ определяется единой кривой, имеющей определенную форму (кривая *1*).

2. Для ограниченных потоков в тех же условиях изменение $\Delta\bar{H}$ характеризуется семейством относительных депрессионных кривых, которые строятся в координатах $\Delta\bar{H}$ от $\bar{x} = x/L$ для различных значений F_0 (см. рис. 10.2, *а*) или в координатах ΔH от λ или F_0 для различных относительных расстояний $\bar{x} = x/L$ (рис. 10.2, *б*, *в*).

3. Диагностические свойства типовых схем, связанные с характером граничных условий, проявляются достаточно заметно. Так, для ограниченных и полуограниченных потоков с мгновенным и линейным изменением уровня на границе $x = 0$ наблюдается хорошо устанавливаемое различие в скорости изменения уровня $\Delta\bar{H}$ в ограниченном пласте для интервала значений $\bar{x}$ от 0,1 до 0,8, а в полубесконечном для λ от 0,1 до 1,1. Однако при $\bar{x} < 0{,}1$ и $\bar{x} < 0{,}8$; $\lambda < 0{,}1$ и $\lambda > 1{,}1$ различия в изменении ΔH для этих расчетных схем малы, и наблюдательные точки, заложенные на таких расстояниях от границы, не дадут содержательной информации по выявлению типа режима.

4. Менее четко проявляются диагностические свойства графиков, связанных с числом действующих границ и их геологическим содержанием, что хорошо видно из анализа рис. 10.2, *б*: различия в характере колебаний уровня $\Delta\bar{H}$ для схем ограниченного $\bar{x} \geqslant 0$ и полуограниченного $\bar{x} = 0$ пласта начинают проявляться только с $\lambda < 0{,}7$, что отвечает большим значениям F_0. Для схем с условиями на границе $x = L$, $\Delta H_L^0 = \text{const}$ и $q_L = 0$ различие в динамике практически невелико для всех значений λ.

Таким образом, хорошее знание диагностических особенностей инвариантных графиков позволяет: 1) выявить главные режимообразующие факторы и «действующую» расчетную схему. Для этого следует конкретные данные режимных наблюдений представить в безразмерном виде, построить инвариантные графики в указанных координатах и сравнить их с аналогичными эталонными графиками. Их совпадение по значительному числу точек позволяет считать, что данные

наблюдений отвечают принятой расчетной схеме, а определяющие свойственную ей динамику факторы являются режимообразующими; 2) обоснованно планировать число и схему размещения наблюдательных точек, частоту и длительность наблюдений, так как появляется возможность имитационным моделированием на основе инвариантных графиков проанализировать эффективность работы будущей наблюдательной сети. В настоящее время такая оценка эффективности наблюдательной сети отсутствует.

10.7. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Принципы составления и решения уравнения в конечных разностях изложены в разд. 7.3. Дополним эти принципы. При построении депрессионных кривых можно определить на каждый момент времени Δt величину расхода $q_{\Delta t}$ в любом сечении потока и величину потерь $\Delta V_{\Delta t}$

$$q_{\Delta t} = \frac{\Delta V_{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\sum_{1}^{n} F_{\text{нас } t} \mu_t}{\Delta t}, \qquad (10.29)$$

где n — число участков вдоль профиля с разными значениями μ_t; $F_{\text{нас. } t}\,\mu_t$ — объем воды, затраченный за время Δt на насыщение (или осушение) участка пласта площадью $F_{\text{нас. } t}$, которая определяется по графику $\Delta H_{x,\,t} = f(x)$ как площадь между кривыми на начало и конец интервала Δt.

Суммарный объем потерь равен $V_{\text{об}} = \sum_{1}^{m} V_{\Delta t,\,j}$, где m — число интервалов Δt, $m = t_{\text{р}}/\Delta t$; $j = 1, 2, 3, \ldots, m$. По значениям $q_{\Delta t,\,j}$ и $V_{\Delta t,\,j}$ строят графики изменения расхода и потерь во времени для любого сечения, чаще всего для $x = 0$. При применении аналоговых вычислительных машин технология расчета сохраняется, использование ЭЦВМ позволяет всю обработку информации автоматизировать.

10.8. ЕДИНАЯ МОДЕЛЬ «ЗОНА АЭРАЦИИ — ГРУНТОВЫЕ ВОДЫ»

Рассмотрим некоторые подходы к постановке задачи, в которой подземные и поверхностные воды, ландшафт и климат являются элементами единой гидрогеологической системы и связаны между собой прямыми и обратными связями. Такого типа модель за рубежом рассмотрена в работах Дж. Рубина, Б. Верруйтаи, А. Фриза [60], а в нашей стране — в работах И. С. Пашковского [56], В. В. Бадова и А. А. Киселева, А. Б. Борисова, Л. М. Рекса и А. Б. Ситникова [46]. Она описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{\text{в}}\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_{\text{в}}\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{\text{в}}\frac{\partial H}{\partial z}\right)+\varepsilon = C\frac{\partial H}{\partial t}, \qquad (10.30)$$

в котором при $H < z\,k_{\text{в}}$, C являются функциями H, при $H \geqslant z\,k_{\text{в}} = k$, $C = \mu^*$; ε — интенсивность действия корневой системы растительно-

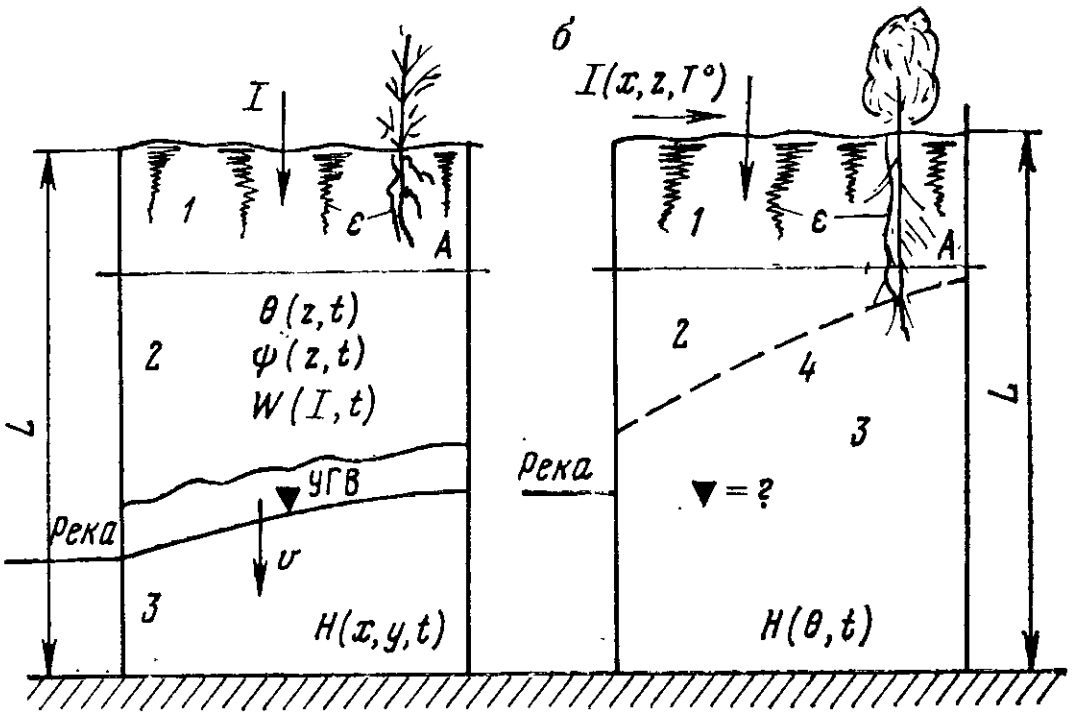


Рис. 10.7. Принципиальные схемы постановок задачи модели «зона аэрации — подземные воды»:

а — регнональный прогноз вертнкального влагопереноса в зоне аэрацнн и плановой фнльтрацин грунтовых вод; *б* — единаи модель. *1* — активный (почвенный) слой *А*; *2* — зона аэрации: *3* — зона насыщения; *4* — нскомый уровень грунтовых вод

сти. На поверхности земли задаются условия первого — третьего родов, характеризующие поступление или уход воды из зоны аэрации и связывающие интенсивность питания со средними многолетними осадками, испаряемостью (температурой) и поверхностным стоком. В результате решения этой задачи находят положение свободной поверхности грунтовых вод и распределение влаги в зоне аэрации (рис. 10.7, *б*).

При глубоком начальном положении уровня грунтовых вод для составления прогнозов на несколько лет используется такой подход. На первом этапе решается одномерная задача влагопереноса и определяется интенсивность питания и динамики изменения μ. Величина питания исследуется для типовых схем строения зоны аэрации с учетом особенностей климата, стока, режима орошения и водности года. Так как интенсивность нисходящего инфильтрационного потока зависит главным образом от водного баланса корнеобитаемого слоя, этот слой выделяется как активный и для него получают расчетные характеристики v_z, которые используют на втором этапе в качестве известного граничного условия при рассмотрении плановой задачи о подъеме уровня грунтовых вод, задавая на модели v_z в определенные точки на каждый интервал расчета Δt. При этом на первом этапе в активном слое можно создать оптимальный режим влажности, обеспечивающий наилучшие условия развития сельскохозяйственных культур, а следовательно, и высокую их урожайность.

В региональных долгосрочных прогнозах влагоперенос в зоне аэрации не учитывается, решается уравнение для H с усредненными за много лет значениями питания и емкости.

З а д а ч а. Для усвоения приемов исследования нестационарной фильтрации численным и аналитическими методами предлагается выполнить для произвольно принятых гидрогеологических условий следующие расчеты:

а) используя уравнение (7.10), построить депрессионные кривые на различные моменты времени, принимая постепенный и мгновенный подъемы уровня в сечении $x = 0$ и считая $w = 0$. Определить на эти моменты величину расхода и потерь по зависимости (10.29), выявить различие в динамике потока для разных граничных условий;

б) выполнить расчеты с использованием аналитических решений (10.2), (10.7), (10.8), (10.17) — (10.19), сопоставить результаты с данными, получен.

ными при решении задачи, предложенной в пункте «а», и выявить погрешность конечно-разностного метода решения задачи (погрешности дискретизации по пространству Δx и времени Δt);

в) принять поток ограниченным и рассчитать по формулам (10.20) и (10.21) гидродинамические характеристики потока для случая мгновенного изменения уровня на границе $x = 0$;

г) принять схему кусочно-однородного строения пласта и построить кривые депрессий на моменты времени, принятые в пункте «а», сравнить полученные в обеих задачах результаты, сделать вывод о влиянии усреднения фильтрационных свойств пласта на величины $\Delta H_{x,\,t}$, $q_ф$ и $V_ф$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите особенности потока, которые позволяют свести пространственную фильтрацию к плоскопараллельной по координате x.
2. В чем особенность математической постановки задачи для потока с наличием инфильтрационного питания?
3. Что такое типовая расчетная схема и фундаментальное решение?
4. Что такое диагностический анализ и для решения каких задач можно его применить?
5. Как получена формула $R_{пр}=1{,}5\sqrt{at}$?
6. Какими критериями определяется наступление квазистационарного режима?
7. Что такое время стабилизации и относительное время стабилизации?
8. Как построить инвариантный график? Для решения каких задач он может быть использован?
9. Какими особенностями различаются диагностические графики для полуограниченных и ограниченных потоков? В каких случаях различий в дииамике этих потоков практически нет?
10. Такие практические задачи можно решать на основе уравнений стационарной и нестационарной одномерной фильтрацин?
11. Составьте расчетную зависимость для определения в полубесконечном потоке приращения уровня $\Delta H_{x,\,t}$ в сечении на расстоянии x от границы для таких условий: в момент времени $t = 0$ уровень на границе мгновенно повысился на величину ΔH^0, через время t_1 мгновенно снизился на величину ΔH^{00}, а затем через t_2 поднялся на величину ΔH^{00}. Как изменится расчетная зависимость, если поток будет ограниченным?
12. Как получены формулы (10.22) и (10.25)? В чем их различие?

Глава 11

ИЗУЧЕНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ ПОТОКОВ ПОДЗЕМНЫХ ВОД В ЗОНЕ ВЛИЯНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

11.1. ПОНЯТИЕ О ГИДРОДИНАМИКЕ ПОТОКОВ В ЗОНЕ ВЛИЯНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Гидродинамику потоков в сфере взаимодействия с инженерным сооружением изучают для выявления тех изменений, которые связаны с работой этих сооружений. Чаще всего задача ставится как прямая, п р о г н о з н а я, т. е. расчетным путем устанавливаются величины и скорости подъема или снижения депрессионных кривых и изменения в величине фильтрационного расхода потока, которые возникнут под влиянием эксплуатации проектируемого инженерного сооружения. Задача может ставиться как э п и г н о з н о - п р о г н о з н а я,

т. е. как сочетание обратной и прямой. Цель — получение на основе данных наблюдений за режимом подземных вод в течение предшествующего (эпигнозного) периода наиболее достоверной структуры модели изучаемого объекта и решение на этой модели (расчетной схеме) прогнозной задачи. Реже задача ставится как диагностическая (контрольная), цель которой — определение по наблюдениям за режимом подземных вод, сформировавшимся за время эксплуатации сооружения, правильности принятой «прогнозной» модели (расчетной схемы), т. е. выявление с методических позиций несоответствия ее природным условиям и корректировка методики и самих гидродинамических прогнозных расчетов. Такую постановку можно назвать задачей оценки оправдываемости принятых прогнозов.

В зоне действия инженерных сооружений возникает пространственная фильтрация. Однако ее гидродинамические особенности, связанные с конструкцией и режимом работы сооружения, во многих случаях позволяют схематизировать фильтрацию не только к плановой, но и к одномерной в плане или разрезе. В зоне влияния сооружений формируются следующие процессы: а) *подпор* грунтовых вод — подъем их уровня под влиянием изменения уровня воды в канале или водохранилище, при орошении, утечках из водопроводной сети городов и промышленных предприятий, поливе улиц и т. п.; б) *фильтрация* воды через дно и борта водохранилища или каналов, под плотинами, за границы массива орошения и т. п.; в) *дренирование* водоносного горизонта при снижении уровня воды в нем вследствие работы горизонтальных дрен, галерей и т. п.

Каналы, водохранилища и дрены рассматриваются как основные источники возмущений, границы потоков, на которых закон изменения уровня или расхода потока определяется условиями эксплуатации сооружений. При этом решают такие задачи: 1) прогноз изменения уровня подземных вод; 2) прогноз величины фильтрационных потерь; 3) определение дренажного стока; 4) оценка влияния различных факторов на формирование гидродинамики потока; 5) определение гидрогеологических параметров по наблюдениям за нарушенным режимом подземных вод.

С математических позиций процессы подпора и осушения могут изучаться с использованием одних и тех же формул с учетом смены знаков.

11.2. ОСОБЕННОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ ВОДЫ ИЗ ВОДОХРАНИЛИЩ И КАНАЛОВ

Сходство фильтрации из водохранилища и канала определяется наличием прямолинейных контуров сооружения и значительной их длиной в плане при небольшой ширине по урезу, что обусловливает формирование плоскопараллельной фильтрации и возможность выделения лент тока для перехода к одномерной горизонтально- или вертикально-линейной фильтрации (см. разд. 10.1).

Различия в фильтрации из водохранилищ и каналов определяются следующими факторами. Значительные фильтрационные потери воды из водохранилища приводят к быстрому прохождению стадии свободной и наступлению стадии подпертой фильтрации.

Изучается главным образом развитие подпора грунтовых вод; фильтрационные потери обычно возмещаются речным стоком и определяются для водохранилищ с сезонном режимом работы. Наиболее распространенным граничным условием для крупных водохранилищ является постоянный уровень воды, при этом зоной деформации потока вблизи уреза водохранилища часто пренебрегают. Для оросительных каналов характерны периодический режим работы, глубокое начальное положение уровня грунтовых вод, существование всех стадий фильтрации и необходимость учета двухмерности потока вблизи канала. Изучают подпор и фильтрацию воды из канала, при этом нередко решают задачу как двухмерную в разрезе. Каналы сооружаются главным образом в полуаридных и аридных районах, в связи с этим расчетные схемы содержат величину инфильтрационного питания, связанного с орошением или испарением с поверхности грунтовых вод.

11.3. ИССЛЕДОВАНИЯ ПОДПОРА И ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОТЕРЬ В ЗОНЕ ВОДОХРАНИЛИЩ

Прогноз подпора подземных вод заключается в теоретическом построении серии депрессионных кривых и карт гидроизогипс, характеризующих развитие подпора во времени с завершающей стадией стационарного положения, отвечающего принятому граничному условию, с оценкой времени и площади возможного подтопления территории, когда расчетная глубина $z_р$ до уровня воды становится равной критической $z_{кр}$ или меньше ее, при этом $z_{кр}$ различно в зависимости от инженерной или экологической направленности расчетов.

Стационарный подпор грунтовых вод. При изучении стационарного подпора используют два подхода. *Первый* предполагает получение расчетных уровней с инженерным запасом. В этом случае рассматривается полубесконечный поток, в котором область подпора x существенно меньше области питания и развития водоносного пласта L, т. е. $L \gg x$. В результате можно пренебречь изменением питания потока, считая, что его расходы до подпора и после него равны. Такая постановка задачи приводит к условию, что подпор формируется независимо от строения пласта и наличия или отсутствия инфильтрационного питания, так как при приравнивании расходов соответствующие члены в исходных уравнениях сокращаются. Подпор в любом сечении ΔY_x численно равен подпору на границе ΔY^0, и кривая депрессии перемещается параллельно самой себе (рис. 11.1, *а*). Исключение представляет схема много- или двухслойного строения, в которой всегда наблюдается изменение расхода потока после подпора (объясните почему?).

Второй подход учитывает изменение условий питания, так как область подпора x соизмерима с длиной потока L, и, следовательно,

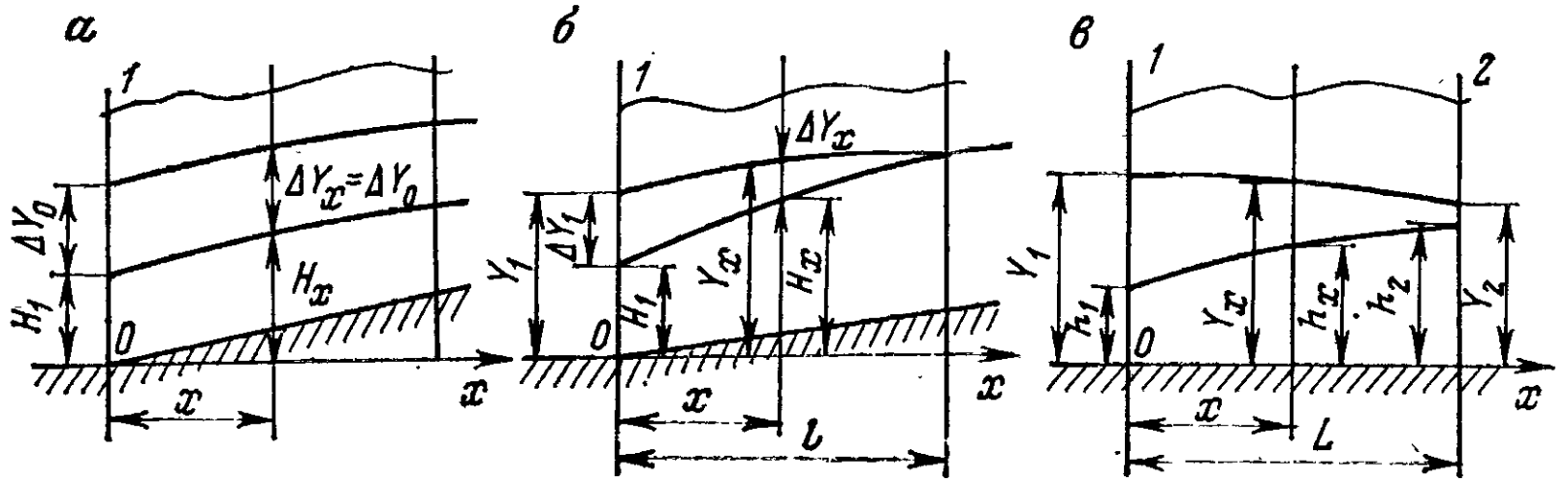


Рис. 11.1. Расчетные схемы оценки стационарного подпора:
а — для полубесконечного потока при $x \ll L$; *б* — для полубесконечного потока при $x \approx L$; *в* — для ограниченного потока

расходы потока до и после подпора различны. Такая постановка задачи справедлива для полубесконечного и ограниченного потоков и приводит к интересным гидрогеологическим выводам. Получим расчетные зависимости.

Примем поток полубесконечным (см. рис. 11.1, *б*), на границе $x = 0$ уровень изменения с H_1 до Y_1, а на расстоянии l от границы он неизменный $Y_2 = H_2$. Тогда, при $\omega = 0$, выразив по уравнению (9.9) отметку уровня воды в сечении x до подпора $H_x = H_1 - \frac{H_1 - H_2}{l} x$ и после него $Y_x = Y_1 - \frac{Y_1 - H_2}{l} x$

и вычитая из второго уравнения первое, получим

$$Y_x = H_x + (Y_1 - H_1)\frac{l - x}{l}. \qquad (11.1)$$

Рассмотрим ограниченный поток с равномерным инфильтрационным питанием и найдем зависимость для определения мощности y_x потока в любом сечении x при изменении граничных значений для $x = 0$ с h_1 до y_1, для $x = L$, с h_2 до y_2 (см. рис. 11.1, *в*). Поступая аналогичным образом и записывая согласно уравнению (9.24) выражение для h_x^2 и y_x^2, получим известное уравнение Каменского [19]

$$y_x^2 = h_x^2 - (y_1^2 - h_1^2)\frac{L - x}{L} + (y_2^2 - h_2^2)\frac{x}{L}. \qquad (11.2)$$

Если поток имеет неоднородное строение, например линейное изменение водопроводимости T_x по закону (5.1), то, принимая $\omega = 0$ и определяя H_x и Y_x по выражению (9.39а), после вычитания уравнений и преобразований получим [9]

$$Y_x = H_x + (Y_1 - H_1)\left(1 - \frac{x}{L}\frac{T_{ср}^{1-2}}{T_{ср}^{1-x}} + \frac{T_{ср}^{1-2}}{T_{сп}^{1-x}}\right) + \frac{T_{ср}^{1-2}}{T_{ср}^{1-x}}(Y_2 - H_2)\frac{x}{L}, \qquad (11.3)$$

где $T_{ср}^{1-2}$ и $T_{ср}^{1-x}$ определяют по формуле (9.18).

З а д а ч а. Проведите аналогичное исследование, рассмотрев формирование стационарного подпора для схем, показанных на рис. 9.1—9.3, затем исследуйте схемы слоистого и кусочно-однородного строения при $w = 0$ и $w > 0$, и далее, приняв некоторый диапазон изменения для T и w, выясните, при каких значениях параметров их влияние на приращение подпора $\Delta y_x = y_x - h_x$ мало, и расчет подпора можно вести по формулам для однородных потоков.

Анализируя формулы (11.1) — (11.3), можно сделать следующие выводы: 1) фильтрационное строение пласта оказывает влияние на величину стационарного подпора; 2) инфильтрационное питание в однородных пластах не влияет на характер стационарного подпора, а в неоднородных пластах это влияние существенно; 3) наличие дренирующих границ ($x = L$) ведет к локализации зоны развития подпора и заметному снижению его величины; 4) наиболее сложна с инженерных позиций схема двухслойного пласта; 5) расход потока при стационарном подпоре определяется по уравнениям, приведенным в гл. 9, с заменой в них значений h и H на y и Y.

З а д а ч а. Исследуйте влияние положения водораздела подземных вод на формирование стационарного подпора Y, q, приняв разные соотношения уровней на границах потока y_1/h_1 и y_2/h_2 и различные величины w. Используйте материал разд. 9.6.

Нестационарный подпор грунтовых вод. Исследование такого подпора включает выявление стадий его формирования, определение скорости развития и величины подъема уровня вод, времени развития подпора и достижения практически стационарного состояния, а также оценку зоны влияния подпора. В качестве расчетных зависимостей используют основные фундаментальные решения, приведенные в гл. 10 и в работах [1, 30, 40, 54]. В них вместо граничных приращений уровня $\Delta H^0_{0,t}$ и $\Delta H^0_{L,t}$ принимают $\Delta Y^0_{0,t}$ и $\Delta Y^0_{L,t}$, отвечающие проектному режиму заполнения водохранилища, а величину $\Delta H_{x,t}$ рассматривают как искомое значение подпора $\Delta Y_{x,t}$ в заданном сечении. В этом случае под $R_{пр}$ понимают размер зоны влияния подпора грунтовых вод и определяют его по формуле (10.4), с помощью $q_ф$ и $q_{об}$ характеризуют изменение расхода потока в процессе развития подпора, а с помощью $V_ф$ — объем фильтрационных потерь, затраченных на насыщение пород в зоне влияния подпора, что одновременно дает возможность определить одну из важнейших составляющих водного баланса водохранилища.

Рассмотрим одну из схем гидродинамического анализа развития подпора грунтовых вод. Исследуем стадии формирования подпора в зависимости от начального уровня h_0 и соотношения уровней на границах потока при $x = 0$, y_0 и при $x = L$, h_L. Как видно из уравнений (10.2), (10.7), (10.20) и (10.21) и рис. 10.4, возможны три варианта развития подпора. *Первый* возникает при $h_0 < h_L$, но $y_0 < h_L$ и характеризуется наличием двух стадий формирования подпора, различающихся генетическими составляющими водного баланса потока. В начальный период при $t < t_ф$ подпор развивается под влиянием $q_ф$ и q_e, затем при $t = t_ф$, как видно из формулы (10.7), $q_ф = q_e$ и при $t > t_ф$ наступает вторая стадия, в течение которой главным фактором является q_e. *Второй* вариант наблюдается при $h_0 < h_L$, но

$y_0 > h_L$ (см. рис. 10.4, *г*) и тоже характеризуется наличием двух стадий формирования подпора, причем начальная аналогична первому варианту, но время ее существования иное и определяется из выражения (10.4) как момент, в которой влияние нестационарного подпора достигло второй границы $R_{пр} = L$. С этого времени подпор развивается только под влиянием потерь из водохранилища $q_ф$. *Третий* вариант отвечает соотношениям $h_0 > h_L$ и $y_0 > h_L$ и имеет одну стадию формирования подпора под влиянием $q_ф$ (см. рис. 10.4, *е*). О степени «управляемости» режимом потока можно судить по времени стабилизации $\tau = L^2/a$ и $\tau = x^2/a$; чем меньше τ, тем скорее завершается процесс подпора.

Анализ диагностических кривых по уравнениям (10.2), (10.7), (10.20) и (10.25) позволяет подробно исследовать особенности формирования подпора. Так, для полубесконечного потока при «мгновенном» заполнении водохранилища, как видно из рис. 10.1, 50 % стационарного подпора формируется за относительное время $f_0 = 1$. Это соответствует тому, что в зоне радиусом 100 м в грунтовых водах, приуроченных к пескам с $k = 10$ м/сут, $\mu = 0{,}1$, $h_{ср} = 10$ м при $a = 10^3$ м^2/сут, 50 % стационарного подпора будет достигнуто через 10 сут; в водоносных суглинках с $\mu = 0{,}05$, $k = 1$ м/сут при $a = 200$ м^2/сут та же величина подпора сформируется за 50 сут, а если зона увеличится до 1000 м, то соответственно время формирования такого подпора составит в песках три года, а в суглинках — 14 лет.

З а д а ч а. Установите, чем будет отличаться развитие подпора в этих же водоносных горизонтах, но при равномерном заполнении водохранилища.

11.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ВОДЫ ИЗ КАНАЛОВ

Режим фильтрации исследуют в двух постановках — при *глубоком* и *неглубоком* начальном залегании уровня грунтовых вод, что определяет существование разных стадий фильтрации и требует применения различных методов расчета. Теоретические основы таких расчетов изложены в работах [1, 14, 30, 40]. Развитие подпора оценивается по формулам, полученным для водохранилищ. Однако в данном случае в расчетах необходимо учесть влияние гидродинамического несовершенства канала введением в расчетную длину потока величины $\Delta L_{нд}$. Исследуя процесс фильтрации воды из канала, С. Ф. Аверьянов [1] выделил три стадии фильтрации (рис. 11.2): а) *свободную, или стадию впитывания*; б) *капиллярно-грунтовый поток*; в) *подпертую фильтрацию*. Г. Н. Каменский [19] разделил свободную фильтрацию на *нормальную инфильтрацию* и *свободное просачивание*, т. е. «подземный дождь» (см. разд. 9.1).

Свободная фильтрация по схеме впитывания. Такое движение возникает при однородном строении зоны аэрации под каналом или при двухслойном (наличие закальматированного дна), когда соблюдается критерий (9.5а) или при $v_z^0 \geqslant v_z$ (где v_z и v_z^0 определяются по формулам (9.5) и (9.7)). Впитывание воды идет при сохранении гидравлической сплошности инфильтрующегося потока (см. рис. 11.2, *а*). Исследование процесса впитывания относится к теории влагопереноса (см.

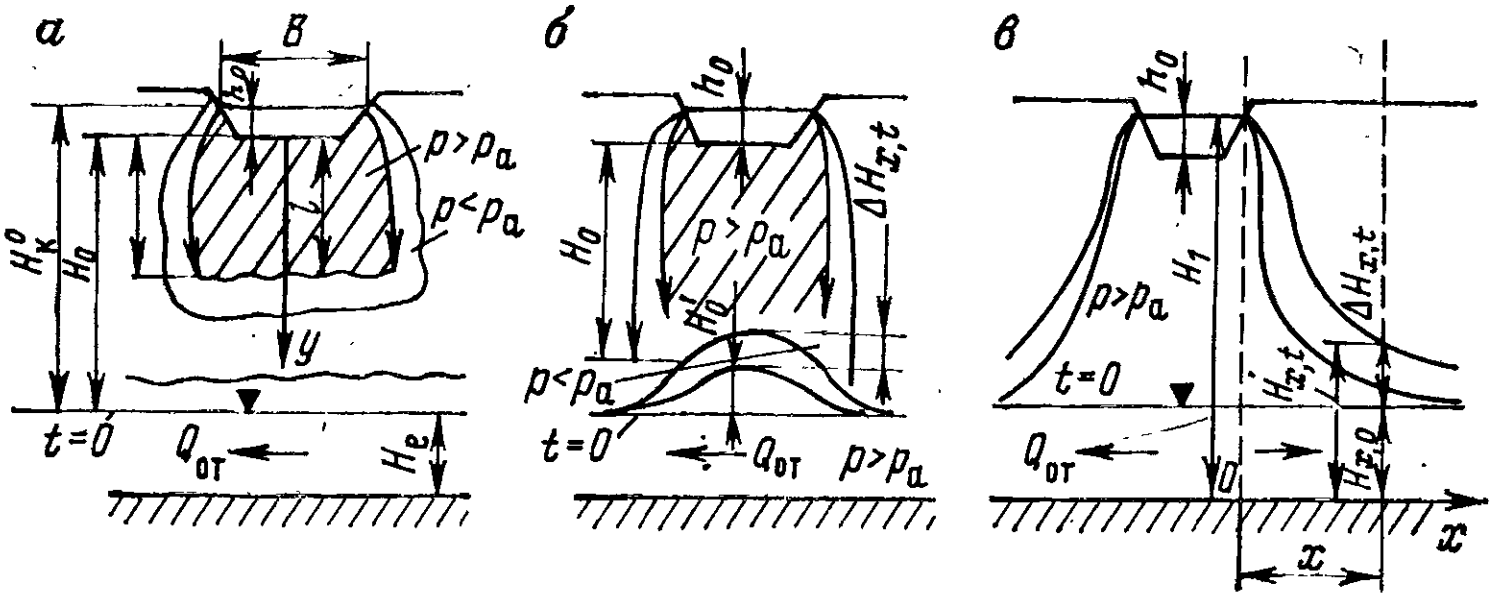


Рис. 11.2. Стадии фильтрации воды из канала при глубоком начальном положении уровня грунтовых вод (по С. Ф. Аверьянову):
а — свободное впитывание; *б* — капиллярно-грунтовый поток; *в* — подпертый поток

гл. 8). Однако в приближенной постановке, С. Ф. Аверьянов [1] предложил скорость впитывания ориентировочно рассчитывать по формуле

$$v_в = k_в\left(1 + \frac{b}{\sqrt{t}}\right), \tag{11.4}$$

где $k_в$ определяется по формуле (3.16); b — коэффициент впитывания, характеризующий действие сорбционных и капиллярных сил при процессе смачивания. Если $\theta = \theta_n$, то b определяется следующим образом:

$$b \approx 0{,}6\sqrt{\frac{\theta_n H_к + 1{,}4h_0}{k_в}}\ \left(\text{сут}^{\frac{1}{2}}\right), \tag{11.5}$$

а фильтрационный расход

$$Q_t = \bar{Q}_ф\left(1 + \frac{b}{\sqrt{t}}\right), \tag{11.6}$$

где $\bar{Q}_ф$ — расход на «бесконечность», который вычисляют по формуле (9.38) при ширине опускающегося потока $B_0 = [1 + 0{,}5\,(H_к/B)\times \times(B+2h_0)$. $V_в$ получают интегрированием выражения (11.6) по t

$$V_в = (0{,}5k_в b\sqrt{t} + k_в t)\,B_0. \tag{11.7}$$

Вначале, когда преобладают сорбционные и капиллярные силы, вторым членом в формуле (11.7) можно пренебречь и при $B_0 = 1$ м с учетом, что в (11.4) $v_в = k_в b/\sqrt{t}$, имеем: $V_в = 2\,v_в t$.

Продолжительность стадии впитывания при больших периодах времени определяется из условия, что объем насыщения $V_в = H_0\mu$, а в выражении (11.7) можно пренебречь первым членом, и при $B_0 = 1$ м имеем:

$$t_1 = H_0\mu/k_в, \tag{11.8}$$

где H_0 — начальная глубина до уровня грунтовых вод от дна канала $\mu = \theta_п - \theta_e$, θ_e — начальная влажность пород под дном канала, $\theta_п$ — полная влажность пород.

При $h_0 = \text{const}$ впитывание можно рассмотреть как одномерную вертикальную фильтрацию (см. рис. 11.2, *а*). Тогда v_z может быть представлена, с одной стороны, по Дарси (9.5), а с другой — как

$$v_z = \mu \frac{dh}{dt}, \tag{11.9}$$

где h — глубина, на которую опустился инфильтрующийся поток, измеряемая от дна канала, где находится начало координат. Приравняв выражения (11.9) и (9.5), разделив переменные, проинтегрировав соответственно в пределах от 0 до h и от 0 до t, получим

$$t = \frac{\mu}{k_в}\left[h - (h_0 + h_к)\ln\frac{h_0 + h_к + h}{h_0 + h_к}\right]. \tag{11.10}$$

Время смыкания t_1 инфильтрующегося потока с грунтовыми водами можно определить по формуле (11.10), если заменить t на t_1, а h на H_0. Аналогичные зависимости для расчетной схемы двухслойного строения даны в работе [40], другие схемы рассмотрены в работе [30]. Если h_0, $h_к \to 0$, а $h = H_0$, то зависимость (11.10) переходит в (11.8). Объем профильтровавшейся воды на 1 м длины канала в плане за t_1 определяется выражением

$$V_ф = B_0 H_0 \mu. \tag{11.11}$$

Свободная фильтрация по схеме «подземный дождь». Эта схема отвечает режиму свободного просачивания и возникает, если дно канала закольматировано или врезано в слой суглинков мощностью m_0. На нижней его границе формируется расход интенсивностью $w_ф$, определяемый по уравнению (9.7) при соблюдении критерия (9.6а). При глубоком залегании уровня грунтовых вод на их поверхности под дном канала будет формироваться «бугор» под влиянием «подземного дождя» интенсивностью $w_ф$ (рис. 11.3). Такая схема движения наблюдается при однородном k строении зоны аэрации и условии $w_ф < k$.

Схема «подземного дождя», или «инфильтрационного питания», характерна для орошаемых территорий, каналов с периодическим действием в условиях глубокого залегания грунтовых вод, инфильтрационных бассейнов, используемых как накопители для восполнения запасов подземных вод (формирующаяся на дне бассейна илистая пленка при достижении определенной мощности обусловливает разрыв гидравлической сплошности потока и возникновение «инфильтрации»).

Такое движение исследуется на основе аналитических решений (см. гл. 9) и методом конечных разностей.

Рассмотрим второй подход (расчетная схема показана на рис. 11.3). Представим интенсивность фильтрационного расхода из канала $w_ф$ как инфильтрационное питание, которое действует на полосе шириной B (где B — половина ширины канала по урезу при симметричной фильтрации) и определяется по формуле (9.7). При постоянной величине T и негоризонтальном водоупоре уравнение в конечных разностях имеет вид (7.10) для зоны в пределах $B \geqslant x \geqslant 0$ и вид (7.13) для остальной части потока, где $w_ф = 0$ и естественного питания нет ($w_e = 0$). Алгоритм решения задачи приведен в разд. 7.3. Дополни-

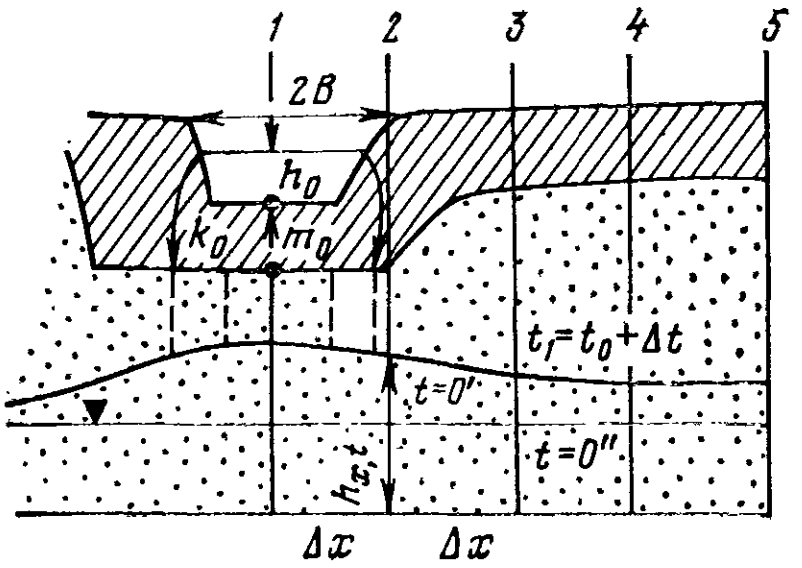


Рис. 11.3. Схема к оценке стадии свободной фильтрации из канала методом конечных разностей

тельные условия следующие: а) при выборе шага Δx сетки назначается не менее четырех шагов на зоне B и начало координат на оси канала, если поток симметричный, в противном случае рассматривается вся ширина $2B$, а начало координат располагается на одной из внешних боковых границ потока; б) расчет выполняют для приращений уровня $\Delta H_{x,t}$, принимая $\Delta H_{x,0} = 0$, что означает последовательное увеличение во времени числа расчетных сечений по мере продвижения зоны влияния нестационарной фильтрации к внешним границам потока; в) момент времени, отвечающий условию $\Delta H_{x,t} = (H_0 - m_0)$, характеризует смыкание «бугра» грунтовых вод с фильтрующимся из канала потоком и окончание первой стадии фильтрации длительностью $t_1 = \sum_1^n \Delta t_1$ (где n — число интервалов расчета от начального момента до названного); г) объем потерь определяется по формуле $V_{t_1} = B w_{op} t_1$.

Стадия капиллярно-грунтового потока. Такой поток возникает при смыкании капиллярных зон опускающегося и грунтового (рис. 11.2, *б*) потоков. Образуется внутренняя область вакуума, где $p < p_a$, которая постепенно исчезает в результате подъема уровня грунтовых вод непосредственно под дном канала при отсутствии бокового растекания грунтового потока, что возможно, если расход $Q_ф$ вертикального потока равен величине оттока $Q_{от}$ грунтовых вод или меньше нее. Стадия характеризуется слабой связью фильтрующегося потока с грунтовыми водами, что объясняется наличием зоны вакуума. По мере исчезновения вакуума при $p > p_a$ капиллярно-грунтовый поток переходит в подпертую фильтрацию (рис. 11.2, *б*). Фильтрующаяся из канала вода идет на повышение уровня грунтовых вод, подземный отток и испарение.

Теоретически стадия изучена слабо. В основу ее математического описания положено следующее [1]. Вакуум в зоне сомкнувшихся капиллярных зон обусловливает значительную гидравлическую разобщенность потоков, что дает право пренебречь влиянием грунтовых вод на величину расхода $Q_ф$ и оценивать ее по-прежнему по формуле (11.6) при условии (11.5). Тогда величину подъема уровня грунтовых вод под каналом можно представить по принципу сложения течений состоящей из двух частей: одна связана с влиянием первого

члена уравнения (11.6), другая — с влиянием второго. Из анализа схемы *b* на рис. 10.6 видно, что, если в поток поступает постоянный расход, то уровень (обозначим его $\Delta H'_{x,t}$) повышается по параболическому закону как функция $\sqrt{t}$. Если расход изменяется по закону $\sqrt{t}$ (см. рис. 10.6, схема *д*), то уровень грунтовых вод мгновенно изменяется на некоторую величину, которую С. Ф. Аверьянов назвал критическим подъемом и обозначил как H'_0. Общее приращение уровня грунтовых вод под дном канала равно $\Delta H_{x,t} = H'_0 + \Delta H'_{x,t}$ и находится из решения уравнения (6.56) при граничном условии второго рода по (11.6). В этом случае считается, что расход поступает в грунтовый поток не сверху, а латерально, через вертикальную линию, принимаемую за боковую границу потока, которая проходит по оси канала, где $x = 0$.

Подъем уровня грунтовых вод под дном канала определяется следующим образом:

$$\Delta H_{x,t} = H'_0 + \frac{0{,}6\bar{Q}_\Phi}{\sqrt{T\mu}}\sqrt{t}; \tag{11.12}$$

$$H'_0 = \frac{1{,}8\bar{Q}_\Phi b}{\sqrt{T\mu}}. \tag{11.12а}$$

Исследования, проведенные автором на оросительных системах Северного Кавказа, подтверждают наличие такой стадии. При весеннем заполнении канала на 1—2 м амплитуда подъема уровня грунтовых вод под его дном всегда значительно (в 2—3 раза) превышала глубину заполнения, а сам подъем осуществлялся очень быстро.

Длительность этой стадии t_2 определяется по формуле (11.12) с учетом условий (11.12а) и (9.38) при $\Delta H_{x,t} = H'_0$:

$$t_2 = 9b^2\left(\frac{H_0}{H'_0} - 1\right)^2. \tag{11.13}$$

Суммарные фильтрационные потери на стадиях впитывания (11.8) и капиллярно-грунтового потока (11.13) определяются интегрированием выражения (11.6) при $t_{1-2} = t_1 + t_2$

$$V_{t_2} = \int_0^{t_{1-2}} Q dt = \bar{Q}_\Phi\left(2b\sqrt{t_{1-2}} + t_{1-2}\right) \tag{11.14}$$

или по формулам (11.7) или (11.4) и (11.11).

Стадия подпертой фильтрации. Эта стадия характеризуется наличием тесной гидравлической связи вод канала и грунтового потока (см. рис. 11.2, *в*), что отвечает рассмотренной выше схеме развития подпора грунтовых вод. Для канала зона деформации потока вследствие его гидродинамического несовершенства велика, и поэтому необходимо учитывать это влияние, используя показатель $\Delta L_{нд}$ (см. гл. 9), или решать задачу как двухмерную в разрезе, применяя моделирование.

Таблица 11.1

Стадии	Соотношение	
	расходов	уровней
Первая (а) или первая (а) и вторая (б)	$\bar{Q}_ф < Q_{от}$	$H_0 < H_0'$
Третья (в)	$\bar{Q}_ф > Q_{от}$	$H_0 < H_0'$
Последовательная смена трех стадий (а, б, в)	$\bar{Q}_ф > Q_{от}$	$H_0 > H_0'$

Примечание. Здесь $\bar{Q}_ф$ определяется по формуле (9.38), $Q_{от}$ оценивается по формулам стационарной фильтрации (см. гл. 9) как естественный расход грунтового потока при замене q на $Q_{от}$, H_0' вычисляется по формуле (11.12а).

Критерии выделения стадий фильтрации. Установление стадий фильтрации важно при инженерной оценке благоприятности гидрогеологических условий для строительства и эксплуатации канала, так как фильтрационные потери на стадии свободной фильтрации в несколько (иногда в десятки) раз превышают потери на стадии подпертой фильтрации.

При выделении стадий фильтрации по С. Ф. Аверьянову пользуются критериями [1], которые приведены в табл. 11.1.

11.5. ОСОБЕННОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД В ЗОНЕ ПЛОТИН

Исследованию фильтрации воды в зоне плотин посвящены работы Н. Н. Павловского, В. И. Аравина и С. Н. Нумерова, Н. Н. Веригина, П. Я. Полубариновой-Кочиной, Г. Н. Каменского и др. В гидрогеологических расчетах используются гидравлические методы, математическое моделирование и метод недеформируемых лент тока.

В зоне гидротехнических сооружений фильтрация является пространственной, но гидродинамические особенности позволяют свести ее к плановой или двухмерной в разрезе (профильной). На рис. 11.4, *а* показана в плане структурная схема главных особенностей фильтрации. По конфигурации потоков выделяются четыре гидродинамические зоны. Первая характеризует фильтрацию под плотиной. В плане поток плоскопараллельный, что позволяет исследовать его в разрезе как двухмерный (см. рис. 11.4, *б*, *в*). Фильтрация определяется величиной напора на плотине H_0, определяемой как разность отметок верхнего H_1 и нижнего H_2 бьефов, строением естественного основания плотины и конфигурацией ее подземного контура. В верхнем и нижнем бьефах существуют раздельные точки D и D', в которых вследствие разнонаправленности движения скорость фильтрации равна нулю. Положение этих точек определяет размеры первой области. Обычно в расчетах напор H_0 принимают постоянным, а фильтрацию считают стационарной.

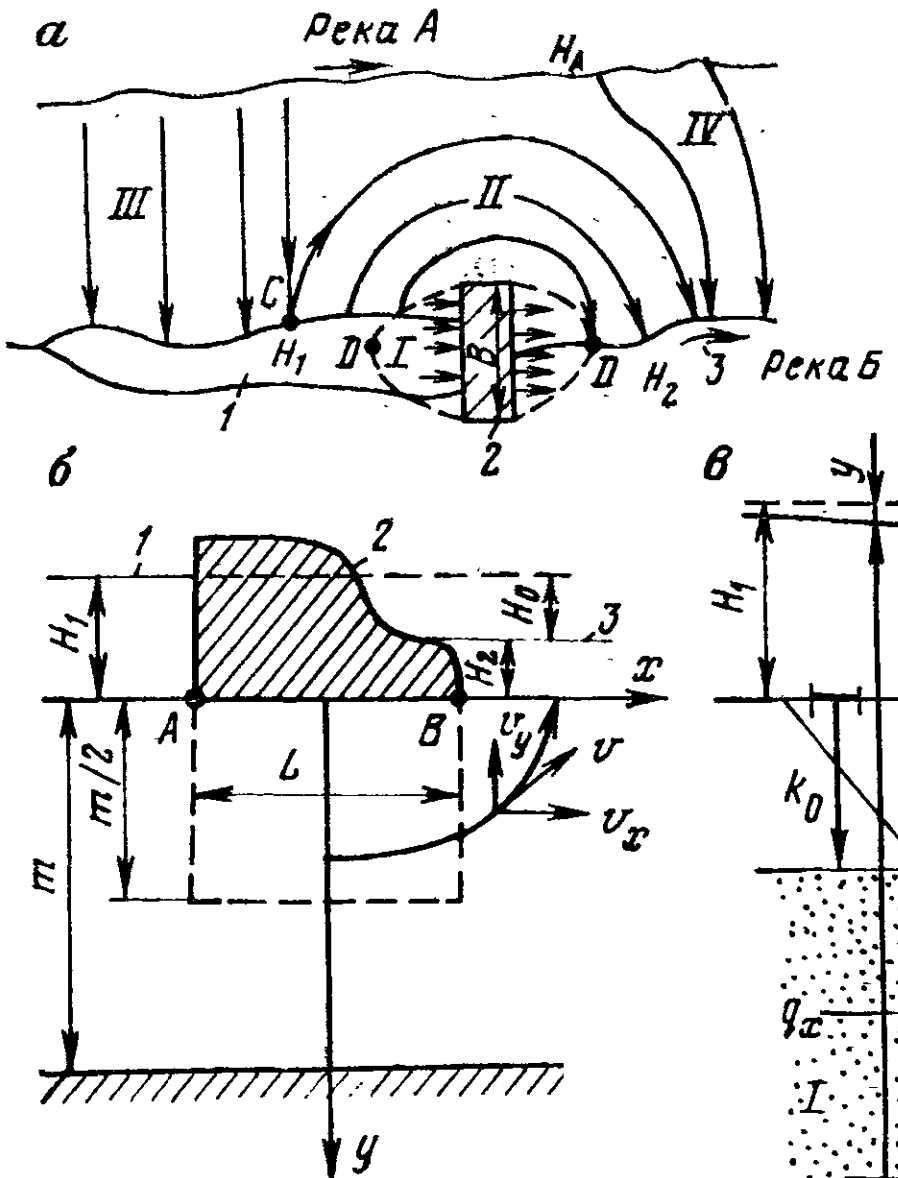


Рис. 11.4. Схема фильтрации воды в зоне плотины в плане (*а*) и в разрезе на однородном (*б*) и двухслойном (*в*) основании:

1 — водохранилище (верхний бьеф); *2* — плотина; *3* — нижний бьеф. Зоны фильтрации: I — под плотиной; II — в обход примыканий; III — из водохранилища; IV — деформируемого потока в нижнем бьефе. *C*, *D* — раздельные точки области фильтрации; H_1, H_2, H_A — соответственно отметки уровня воды в верхнем, нижнем бьефах, в соседней долине. Стрелки показывают направление фильтрации. I—III — фрагменты

Во второй зоне (обходная фильтрация) движение идет в обход примыканий плотины. Размеры этой зоны значительно больше мощности потока, и фильтрация сводится к плановой. Она определяется величиной H_0, гидрогеологическим строением бортов речной долины и конфигурацией примыкания. Такая фильтрация рассматривается как стационарная или нестационарная. Эта зона отделяется от третьей положением раздельной точки *C*.

Третья зона характеризует рассмотренную выше фильтрацию из водохранилища. Четвертая зона находится за пределами нижнего бьефа; здесь наблюдается значительная деформация естественного потока и фильтрация рассматривается как плановая.

В сфере взаимодействия плотины определяют следующие показатели: 1) величину расхода потока, идущего под плотиной и в обход ее примыканий; 2) изменение пьезометрического уровня в пределах активной области фильтрации; 3) изменение скорости и градиента фильтрации в местах, наиболее опасных с точки зрения возникновения фильтрационных деформаций (выпора грунта, развития механической и химической суффозии и т. п.). В нижнем бьефе наблюдается

восходящая фильтрация; гидродинамическое давление взвешивает породы, уменьшает их вес и при повышении критических значений градиентов потока $I \geqslant I_{кр}$ возникает выпор пород. Если борта долины в нижнем бьефе сложены суглинками, создается обстановка, благоприятная для развития оползней, оплывов и т. п. (гидродинамическая роль суглинков исследована в гл. 9). Кроме того, в нижнем бьефе на склонах долины и откосах насыпной плотины формируется участок высачивания, где наблюдается разрыв гидравлической сплошности потока. Гидродинамика этого участка изучена В. М. Шестаковым [54]. Для исследования фильтрации под плотиной и в обход нее строят гидродинамическую сетку потока (см. гл. 4).

11.6. ФИЛЬТРАЦИЯ ПОД ПЛОТИНОЙ

Некоторые типы расчетных схем представлены на рис. 11.4, *б*, *в* и 11.5, *а—г* и выделены по типу подземного контура, условиям залегания первого водоупора, строению пласта под основанием плотины и типу плотины. При простой конфигурации области фильтрации (см. рис. 11.4, *б* и 11.5, *а*, *б*) исследование проводят на основе *гидромеханических* решений, дающих аналитические уравнения для линий токов и линий напоров, на основе которых строят гидродинамическую сетку движения. Эти решения даны в справочниках для единичного потока, в котором $k_0' = 1$ м/сут и $H_0' = 1$ м. Если эти решения обозначить индексом r, то расчетные уравнения имеют вид

$$Q_ф = q_r k H_0; \qquad v = v_r k; \qquad H = h_r H_0 + H_2, \tag{11.15}$$

где q_r, v_r и h_r — единичные гидромеханические решения; k и H_0 значения, отвечающие исходным данным конкретной задачи.

Ознакомиться с гидрогеомеханическим методом можно в работах [3, 19, 20, 34].

Гидравлическое решение получено Г. Н. Каменским для схемы, приведенной на рис. 11.4, *б*. Представляя для однородного пласта средний путь фильтрации линией тока длиной $L + m$, фильтрационный расход по закону Дарси можно определить следующим образом:

$$Q_ф = km \frac{H_0}{L + m}, \tag{11.16}$$

где $H_0/(L + m)$ — средний градиент фильтрации для всей области. Для получения общего расхода следует $Q_ф$ умножить на длину B плотины в плане.

С гидрогеологической точки зрения наиболее интересна схема двухслойного строения пласта, показанная на рис. 11.4, *в*. Гидравлическое решение этой задачи получено Г. Н. Каменским [19] с использованием предпосылки о движении воды в хорошо проницаемом слое только в горизонтальном направлении, а в слабопроницаемом только в вертикальном при соблюдении критерия (4.32). Стационарный поток разделим на три участка. На втором участке фильтрация отвечает схеме Дарси и расход потока q_{II} между сечениями 3 и 4 равен $q_{II} = k(H_3 - H_4)/L$. На первом и третьем участках вдоль верхнего и ниж-

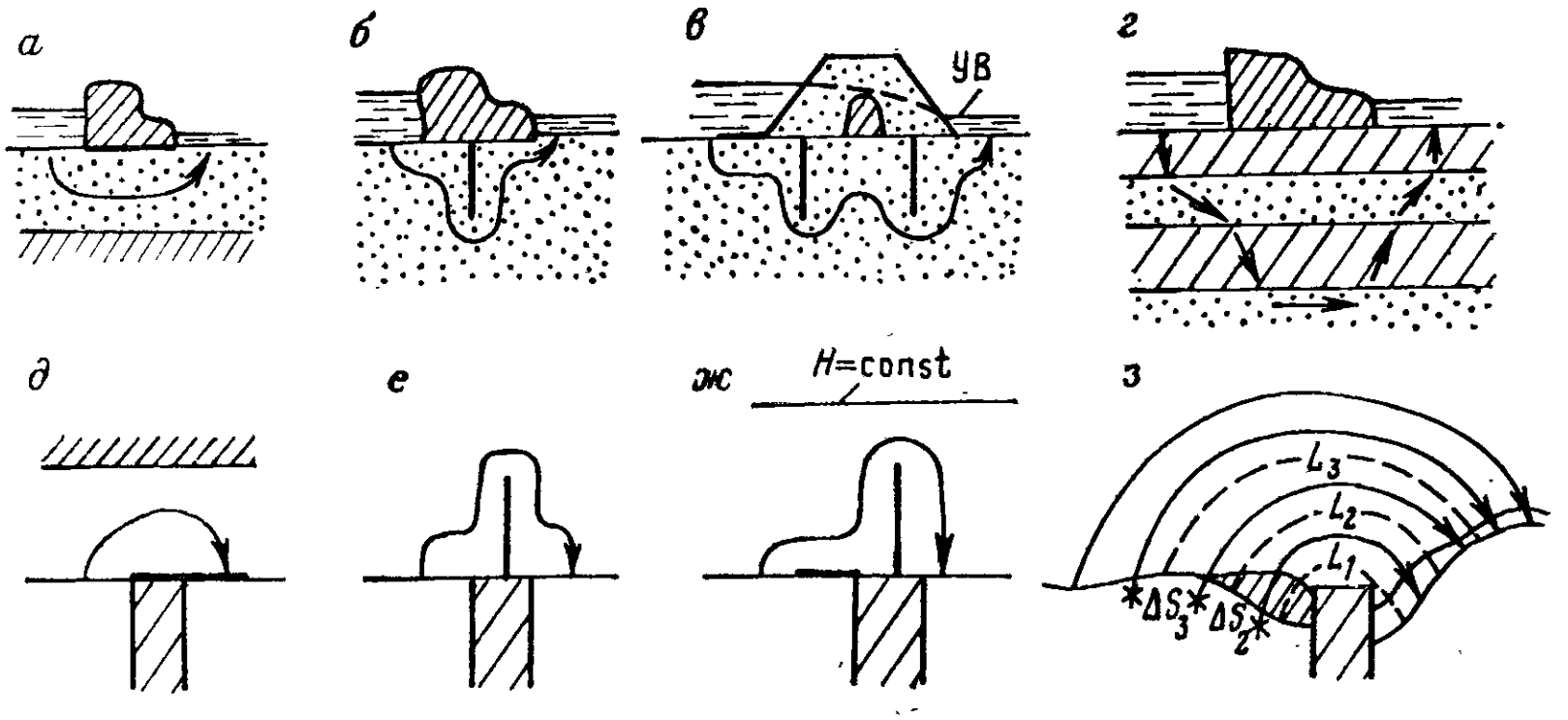


Рис. 11.5. Некоторые типы расчетных схем прифильтрации под плотиной (*а—г*) и в обход ее примыканий (*д—з*):

а — однородный пласт, плоский флютбет; *б* — ограниченный пласт, флютбет со шпунтом; *в* — неограниченный пласт, насыпная плотина с ядром и участком высачивания, сложный подземный контур; *г* — слоистый анизотропный пласт; *д* — плоское примыкание, ограниченный пласт с граничным условием $Q = 0$; *е* — поперечная завеса, однородный бесконечный пласт; *ж* — сложный контур, ограниченный пласт с граничным условием первого рода; *з* — неоднородный пласт со сложными контурами урезов бьефов и плечевого примыкания

него бьефов (см. рис. 11.4, *в*) наблюдается изменение потерь напора в результате фильтрации воды через слабопроницаемый пласт. В верхнем бьефе по мере приближения к плотине потери напора Y увеличиваются и достигают максимального значения $y_0 = H_1 — H_3$ в сечении 3; наоборот, в нижнем бьефе по мере удаления от сечения 4 наблюдается уменьшение потерь от $y_0 = H_4 — H_2$ до нуля на весьма значительном расстоянии. Примем для простоты, что m_0 и k_0 для верхнего слоя одинаковы на участках I и III. Начало координат находится в точке 3, а ось x направлена влево. Выделим на расстоянии x от начала координат бесконечно малый участок dx, через который в вертикальном направлении в слабопроницаемом слое наблюдается расход dq_1. Тогда согласно уравнению Дарси

$$dq_1 = —k_0 dx \frac{y}{m_0}. \tag{11.17}$$

Расход потока, идущего в том же сечении x, но в хорошо проницаемом слое, найдем по формуле

$$q_1 = km \frac{dH}{dx}, \tag{11.18}$$

где $H = H_1 — y$ и, следовательно, справедливо выражение $dH = — dy$. Подставив его в уравнение (11.18) и продифференцировав полученное выражение по x, получим

$$dq_1 = —km \frac{d^2y}{dx^2} dx. \tag{11.19}$$

Приравнивая выражения (11.19) и (11.17), после преобразований имеем:

$$yr^2 = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{11.20}$$

при

$$r^2 = \frac{k_0}{m_0 k m} = \frac{k_0}{m_0 T}. \tag{11.20а}$$

Решая уравнение (11.20) относительно y, получим формулу для определения потерь напора в направлении оси x в верхнем бьефе

$$y = y_0 e^{-2x}. \tag{11.21}$$

Подставим зависимость (11.21) в (11.17) и, разделив переменные, проинтегрируем от 0 до q_I и по x от ∞ до 0, имея в виду, что r определяется по формуле (11.20а); в результате получим

$$q_I = y_{0,I}\sqrt{\frac{k_0 T}{m_0}}. \tag{11.22}$$

По условию задачи $q_I = q_{III}$, а $y_{0,I} = H_1 - H_3$ и $y_{0,III} = H_4 - H_2$. Тогда из условия неразрывности потока в сечениях 3 и 4 можно записать: $q_I = q_{II} = q_{III} = q$.

Выразив для участка II $H_3 - H_4 = qL/T$, для участка I $H_1 - H_3 = \frac{q}{\sqrt{k_0 T/m_0}}$, для участка III $H_4 - H_2 = \frac{q}{\sqrt{k_0 T/m_0}}$ и, исключая H_3 и H_4, окончательно получим

$$q = \frac{H_1 - H_2}{\frac{L}{T} + 2\sqrt{m_0/k_0 T}}. \tag{11.23}$$

Принимая для верхнего слабопроницаемого слоя $I_0 = y_0/m_0$ и находя y_0 по формуле (11.22), имеем:

$$y_0 = \frac{H_1 - H_2}{2 + L\sqrt{k_0/(m_0 T)}}; \tag{11.24}$$

$$I_0 = \frac{H_1 - H_2}{2m_0 + L\sqrt{k_0 m_0/T}}. \tag{11.25}$$

Если в нижнем бьефе верхний слабопроницаемый слой будет иметь иные значения коэффициента фильтрации и мощности, то в знаменателе формулы (10.23) вместо второго члена записываются два корня с соответствующими характеристиками пласта, аналогично изменяются и зависимости (11.24) и (11.25).

Анализ полученных уравнений позволяет сделать важные для постановки гидрогеологических исследований выводы о роли слабопроницаемого слоя. Из уравнения (11.25) видно, что ухудшение фильтрационных свойств или уменьшение мощности этого слоя ведут к резкому увеличению градиента напора в нем, что ухудшает инженерно-геологические условия участка основания плотины, так как увеличивается опасность выпора грунта в нижнем бьефе. Следовательно.

необходимо обращать серьезное внимание на выявление слабопроницаемых слоев в основании плотины и детально изучать характер изменения их мощности и фильтрационных свойств.

11.7. ОБХОДНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Расчетные схемы, приведенные на рис. 11.5, *д*—*з*, выделены по форме примыкания плотины, строению пласта, конфигурации урезов верхнего и нижнего бьефов, а также по условиям на верхней границе потока. При сравнении приведенных на рис. 11.5 схем *д* и *е* со схемами *а* и *б* устанавливается их полная аналогия (при повороте на 180° схем *д* и *е*). Это означает, что гидромеханические решения, полученные для схем *а* и *б*, можно использовать при исследовании обходной фильтрации по схемам *д* и *е*, принимая форму и длину контура примыкания соответственно за форму и длину основания плотины.

Рассмотрим гидравлический метод. Примем следующие допущения: поток стационарный, напорный, $I = \text{const}$, урезы в верхнем и нижнем бьефах прямолинейны, примыкание плотины имеет форму полуокружности радиусом r_0, исходная пьезометрическая поверхность горизонтальна, $I_б = 0$. Начало координат примем на оси плотины, ось направим влево по плоскости нижнего бьефа H_2. Схематизированный поток характеризуется одномерной равномерной радиальной фильтрацией, созданной напором H_0, и может быть изучен на основе уравнения Дарси. Длина потока — это длина полуокружности (рис. 11.6, *а*), поэтому скорость фильтрации в точке A, находящейся на расстоянии радиуса-вектора r от начала координат, равна

$$v_A = k\frac{H_0}{\pi r}, \tag{11.26}$$

где πr — длина полуокружности. Полагая, по закону Дарси, что

$$v_A = -k\frac{dH}{dS} = -k\frac{dH}{rd\alpha}, \tag{11.27}$$

где $d\alpha$ — приращение центрального угла по длине S, приравнивая выражения (11.26) и (11.27) и сокращая, получим

$$-dH = \frac{H_0}{\pi}\,d\alpha.$$

Интегрирование этого выражения в пределах от 0 до α и, соответственно, от H_0 до H'_A дает

$$H'_A = H_0\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right). \tag{11.28}$$

Выразим α через тангенс, определяя положение точки A в декартовой системе координатами x; y (см. рис. 11.6, *а*): $\operatorname{tg}\alpha = y/x$, а обратная ему функция равна

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \tag{11.29}$$

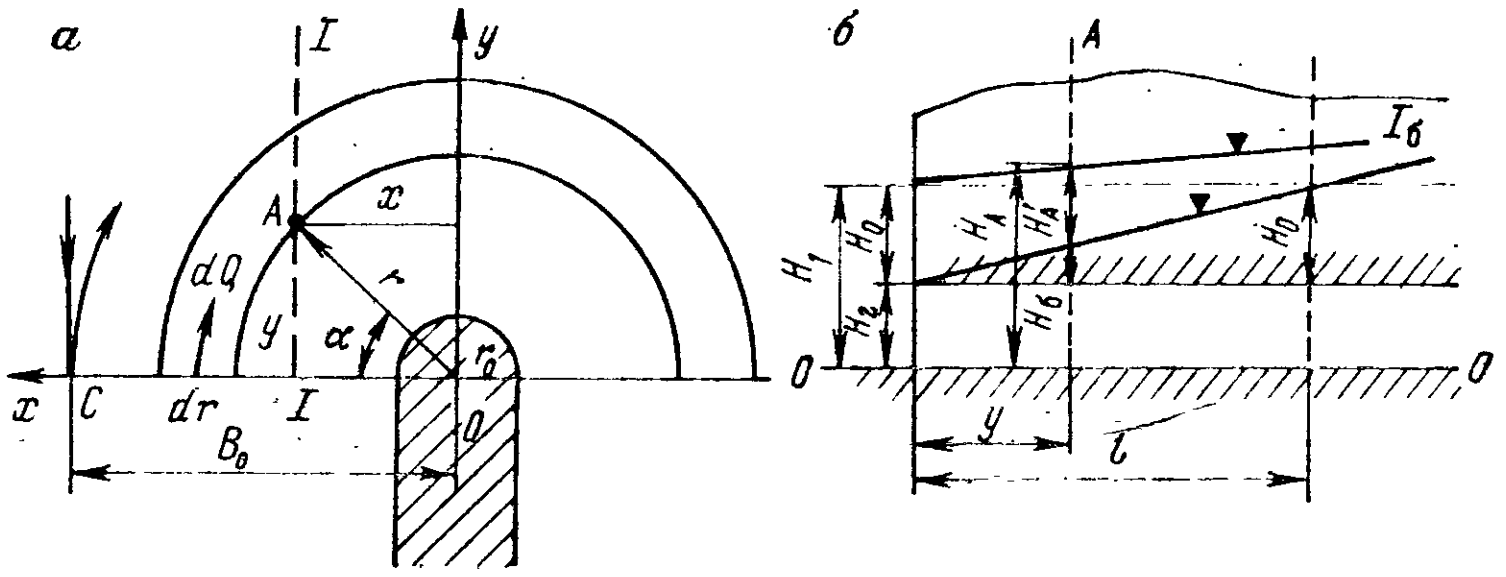


Рис. 11.6. Расчетная схема обходной фильтрации при гидравлическом методе решений:
а — плаи; *б* — разрез

Подставляя выражение (11.29) в (11.28), получаем

$$H' = H_0\left(1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right). \qquad (11.30)$$

Для нижнего бьефа следует иметь в виду, что ось x направлена вправо и в формуле (11.30) не будет единицы.

Учтем наличие естественного (бытового) потока в бортах долины с градиентом $I_б$. Для этого воспользуемся рис. 11.6, из которого видно, что приращение уровня этого потока относительно принятой плоскости сравнения равно

$$H_б = H_0\frac{y}{l}. \qquad (11.31)$$

Тогда по принципу сложения течений полный пьезометрический уровень можно определить следующим образом:

$$H = H_0\left(1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{y}{l}\right) + H_б. \qquad (11.32)$$

Имея в виду связь напорного потока с грунтовым по напорной функции $U = Hm = h^2/2$, получаем

$$h^2 = (h_1^2 - h_2^2)\left(1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{y}{l}\right) + h^2,$$

где h_1 и h_2 — мощность грунтовых вод соответственно в верхнем и нижнем бьефах.

Ширину зоны обходной фильтрации B_0 найдем из условия, что в раздельной точке C по линии верхнего бьефа (см. рис. 11.6) скорость фильтрации $v_y = -k\left.\frac{dH}{dy}\right|_{\substack{y=0\\x=B_0}} = 0$, тогда, подставляя в выражение для v_y напор по (11.32) с учетом (11.31), после дифференцирования и преобразований получим

$$B_0 = \frac{l}{\pi} = \frac{H_0}{\pi I_б}. \qquad (11.33)$$

Определим величину фильтрационного расхода потока. Вначале рассмотрим задачу при $I_б = 0$. Выделим на линии верхнего бьефа участок dr, через который идет расход dQ (см. рис. 11.6):

$$dQ = kmdr\frac{H_0}{\pi r}. \tag{11.34}$$

Интегрируя уравнение (11.34) в пределах от 0 до $Q_ф$ и от r_0 до B_0, получим

$$Q_ф = \frac{TH_0}{\pi}\ln\frac{B_0}{r_0} = \frac{TH_0}{\pi}\ln\frac{H_0}{\pi I_б r_0}. \tag{11.35}$$

Добавляя в выражение (11.35) естественный расход ($I_б > 0$) по принципу сложения течений, имеем:

$$Q_{об.ф} = Q_ф \pm Q_б = \frac{TH_0}{\pi}\ln\frac{B_0}{r_0} \pm TI_б(B_0 - r_0). \tag{11.36}$$

Принимая $r_0 \ll B_0$ с учетом (11.33), из выражения (11.36) получим

$$Q_{об.ф} = \frac{TH_0}{\pi}\left(1 - \ln\frac{H_0}{\pi I_б r_0}\right).$$

З а д а ч а. Используя напорную функцию (6.57), переписать полученные уравнения для грунтового потока.

Рассмотрим *метод недеформируемых лент тока*, который позволяет учесть сложное строение пласта, наличие инфильтрационного питания и сложные контуры урезов верхнего и нижнего бьефов. Решим задачу графически построением гидродинамической сетки (см. разд. 4.4). На схему наносим контуры примыкания плотины и урезов верхнего и нижнего бьефов; разбивая линию верхнего бьефа на равные по длине участки ΔS_i, строим линии токов, соединяя верхний и нижний бьефы (см. рис. 11.5, схема *з*). Выделяем группы лент, в которых поток имеет одинаковое гидрогеологическое строение, и для каждой типовой ленты делаем развертку, которую представляем профильной расчетной схемой. Находим для них расчетные уравнения и определяем Δq_i. Из схемы *з* на рис. 11.5 видно, что две первые ленты в развертке представляют схему кусочно-однородного пласта (см. рис. 9.2, *г*) длиной L_i с тремя зонами: две (заштрихованные) отвечают делювиальным суглинкам (l_1, k_1 и l_2, k_2), а третья — коренным породам (l_3, k_3). Расчетная формула принимает вид

$$q_i = \Delta S_i \frac{h_1^2 - h_2^2}{2\left(\frac{l_1}{k_1} + \frac{l_2}{k_2} + \frac{l_3}{k_3}\right)}. \tag{11.37}$$

Для третьей ленты тока в уравнении (11.37) не будет члена l_1/k_1, для следующей ленты справедлива схема Дюпюи и т. п. Общий расход $Q_{об}$ находим по формуле

$$Q_{об} = \sum_1^n q_i,$$

где n — число лент тока. Суммирование заканчиваем при условии $q_n \leqslant 0{,}1\ q_1$. Ширину зоны обходной фильтрации вычисляем по формуле

$$B_0 = \sum_1^n \Delta S_i.$$

Затем находим в каждой ленте отметки уровней в выбранных точках и, перенеся их на план, интерполяцией строим карту гидро- или пьезоизогипс, характеризуя подпор в зоне обходной фильтрации.

11.8. ОСОБЕННОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ НА МАССИВАХ ОРОШЕНИЯ

Фильтрация на массивах орошения носит пространственный характер вследствие действия комплекса факторов — поливов, фильтрации воды из магистральных каналов, дренирования коллекторно-дренажной сетью, подпора от водохранилищ. Используя принцип сложения течений, результирующий подпор представляют как сумму подъемов, вызванных влиянием каждого фактора в отдельности, считая, что движение описывается линеаризованными уравнениями (6.56) или (10.1). При использовании в качестве источника орошения подземных вод число факторов уменьшается, так как водозаборные скважины одновременно работают как дренирующие, исключаются подпор от водохранилища и магистральных каналов, дренирование коллекторно-дренажной сетью.

Фильтрация от поливов схематизируется к плановой в виде полуограниченного потока или пласта-полосы со сплошным или полосовым инфильтрационным питанием, что позволяет, выделив ленту тока, перейти к одномерной линейной фильтрации. Отдельные массивы орошения достаточно долгий срок могут рассматриваться как гидродинамически изолированные согласно критерию (5.8) и исследоваться каждый самостоятельно. Орошаемая область представляется квадратом, прямоугольником или полосой и исследуется аналитически как плановая или одномерная.

Режим орошения — ведущий фактор прогноза; он определяется характером изменения проектного гидромодуля. При краткосрочных прогнозах учитывается внутригодовое изменение гидромодуля, при средне- (до 25 лет) и долгосрочных (более 25 лет) прогнозах величина гидромодуля принимается постоянной и равной средней годовой. В первом случае питание существенно меняется по сезонам и месяцам года, во втором — оно постоянно в течение многих лет. При составлении краткосрочных прогнозов гидродинамику потока можно изучать на основе теории влагопереноса, связывая режим грунтовых вод с режимом изменения влаги в зоне аэрации (см. разд. 10.12).

Изучение гидродинамики потока включает: 1) прогнозирование измерения уровня грунтовых вод и скорости его подъема по площади, что дает возможность определить начало подтопления орошаемой территории и развитие его во времени; 2) прогнозирование изменения величины фильтрационного расхода и потерь, формирующих подпор грунтовых вод внутри орошаемой площади; 3) изучение динамики

оттока грунтовых вод за пределы массива орошения, что дает возможность решать вопросы охраны окружающей среды, в том числе исследовать влияние орошения на режим грунтовых вод богарных (неорошаемых) земель, оценивать возможное изменение речного (дренажного) стока за счет поступления оросительных вод; 4) выявление главных режимообразующих факторов диагностическим анализом и контроль формирования эксплуатационного режима (уровня и расхода).

Исследованию гидродинамики потока на массиве орошения аналитическими методами посвящены работы С. Ф. Аверьянова [1], П. Я. Полубариновой-Кочиной [40], Н. Н. Веригина [30], В. К. Рудакова, исследованию численными методами — работы Г. Н. Каменского, И. К. Гавич [14], В. М. Шестакова [54, 56], Ф. А. Абуталиева и др.

11.9. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОТОКА ПРИ ПОЛОСОВОМ ОРОШЕНИИ

Рассмотрим формирование режима грунтовых вод для типовых условий — бесконечного однородного пласта при орошаемой полосе шириной $2L$ (рис. 11.7). Фильтрация описывается дифференциальным уравнением (10.1) при начальном условии: $t = 0$, $\Delta H_{x,0} = 0$ и граничном $t > 0$, $-L \leqslant x \leqslant L$, $w_{op} > 0$ и $L < |x| < \infty$, $w_{op} = 0$. Решение для любых значений x приведено в работах [1, 30, 40]. Для $x = 0$ (под центром орошаемого массива) оно имеет вид

$$\Delta H_{0,t} = \frac{w_{op} t}{\mu} [1 - R(\lambda_0)] \qquad (11.38)$$

при

$$\lambda_0 = \frac{L}{2\sqrt{at}} = \frac{1}{2\sqrt{F_0}} \quad \text{и} \quad F_0 = \frac{at}{L^2},$$

где $R(\lambda)$ — функция, характеризующая подпор грунтовых вод при равномерном подъеме уровня воды в сечении $x = 0$ [см. формулу (10.17)].

На рис. 11.7 (кривая *1*) приведен диагностический график, характеризующий зависимость относительного уровня $\Delta\bar{H}_{0,t} = \frac{\Delta H_{0,t}\mu}{w_{op} t} = [1 - R(\lambda_0)]$ от λ под влиянием инфильтрационного питания $q^{w} = 2w_{op}L$. В начале орошения до $F_0 \leqslant 0{,}25$ или $\lambda_0 \geqslant 1$, что отвечает времени $t_p \leqslant 0{,}25\, L^2/a$, фильтрующиеся воды идут на повышение уровня грунтовых вод и весьма мало растекаются в стороны, на что указывает равенство коэффициента $[1 - R(\lambda_0)]$ единице (с точностью до 5 % в изменении $\Delta\bar{H}_{0,t}$). Как видно из уравнения (11.38), подъем практически идет за счет заполнения естественной емкости μ.

Расход потока грунтовых вод на границе массива орошения $x = L$ определяется следующим выражением:

$$q_{x=L} = -2T \left.\frac{\partial \Delta H_{x,t}}{\partial x}\right|_{x=L} = 2w_{op}L\,[1 - \mathrm{erf}\,(2\lambda_0)].$$

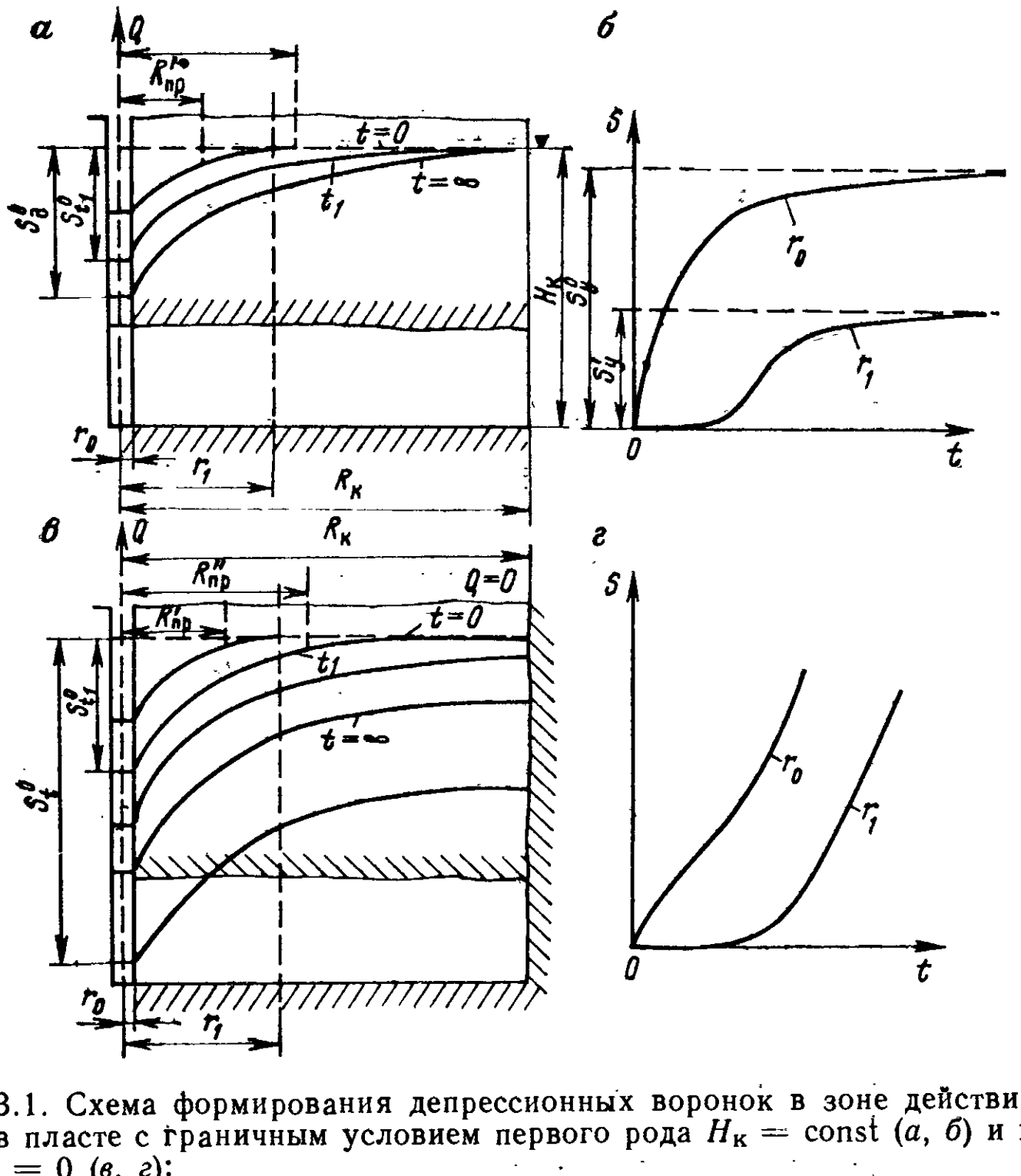


Рис. 13.1. Схема формирования депрессионных воронок в зоне действия скважины в пласте с граничным условием первого рода $H_к = \text{const}$ (*а*, *б*) и второго рода $Q = 0$ (*в*, *г*):

а, *в* — схемы развития воронок депрессий в разрезе (без влияния внешней границы пласта, $t < t_1$, с активным влиянием внешней границы, $\infty \geqslant t > t_1$; t_1 — время достижения внешней границы, $R'_{пр}$ и $R''_{пр}$ — зоны квазистационарной фильтрации); *б*, *г* — графики изменения величины понижения во времени (r_0 — в опытной скважине, r_1 — в наблюдательной скважине; $t = \infty$ — время стабилизации уровня, $S^0_{t_1}$ и S_y — соответственно понижения в скважине в момент времени t_1 и при установившейся фильтрации); $H \to \infty$ — время осушения пласта, $S^0_{t_1}$, S^0_t — соответственно нестационарные понижения в скважине

развитие воронки по площади и уменьшение скорости снижения уровня воды в пласте. При $H_{скв} = \text{const}$ формируется близкая ситуация, однако характер динамики уровня иной, так как на стенке скважины градиент потока уменьшается во времени, что обусловливает снижение величины расхода скважины.

Фильтрация изучена главным образом в однородных и условно однородных толщах, к которым приводятся пласты с хаотической неоднородностью. Решения получены при отсутствии инфильтрационного питания и не учитывают наличия естественного (бытового) потока подземных вод (уклон естественного потока $I_б = 0$, что отвечает схеме «бассейна»). Такой подход упрощает математическую постановку задачи, так как позволяет искать решение для понижения уровня $S_{r,t}$

За то же время за пределы орошаемого массива будет отведен объем оросительной воды

$$V_L = q^{\infty} \int_0^{t_n} \psi dt = V_{об} R(\lambda_0') = V_{об}\gamma; \qquad (11.41)$$

при $\lambda_0' = \frac{L}{\sqrt{at}} = \frac{1}{\sqrt{F_0}}$,

где $R(\lambda_0')$ — функция линейного подъема уровня. Обозначим ее в (11.41) через коэффициент γ, который показывает ту долю суммарного объема питания $V_{об}$ грунтовых вод, которая отводится потоком за пределы массива орошения (см. рис. 11.7, кривая *3*). Тогда $(1-\gamma)$ покажет ту часть объема питания, которая расходуется на повышение уровня грунтовых вод. Так, из графиков, приведенных на рис. 11.7, видно, что при $F_0 = 1$ подъем уровня грунтовых вод составляет 72 % от предельного, наблюдается заметное затухание подъема, на формирование бугра грунтовых вод расходуется 84 % от суммарного питания за счет орошения и только 16 % этого питания отводится за пределы массива.

Найдем связь подъема грунтовых вод в точке под центром массива $\Delta H_{0,t}$ с объемом воды V, идущим на это повышение уровня в зоне $-L < x < L$. Учитывая, что $\Delta H_{0,t}$ определяется по формуле (11.38), и заменяя в ней $\omega_{ор}$ по (11.40) и (11.41) из зависимости $V = V_{об} - V_L$, получим

$$\Delta H_{0,t} = \frac{V}{2L\mu} \frac{1 - R(\lambda_0)}{1 - R(\lambda_0')} = \frac{V}{2L\mu}\sigma. \qquad (11.42)$$

Из формулы (11.42) следует, что всегда $\sigma < 1$. В практике гидрогеологических исследований при малых уклонах естественного потока подъем уровня под массивом орошения определяют как частное от деления суммарного питания на площадь и дефицит влажности, считая, что все питание пошло на подъем уровня, т. е. принимая $\sigma = 1$. Это всегда вносит погрешность, так для $F_0 = 1$, $\sigma = 0{,}76$. С 5 % -ной точностью принимать $\sigma = 1$ можно при $F_0 \leqslant 0{,}25$; время F_0, отвечающее другим погрешностям, можно найти из графиков, приведенных на рис. 11.7.

Диагностические кривые могут быть использованы для оценки влияния гидрогеологических условий на режим грунтовых вод. Так, из рис. 11.7 видно: а) чем меньше время стабилизации процесса $\tau = L^2/a$, тем скорее будут достигнуты затухание подъема грунтовых вод и увеличение их оттока за пределы массива, что характерно для пластов с высокой водопроводимостью; б) при постоянной интенсивности питания $\omega_{ор}$ сокращение площади L орошения резко замедляет подъем грунтовых вод и ускоряет их отток. Рассмотренная расчетная схема пригодна для исследования фильтрации воды из канала при граничном условии второго рода и глубоком залегании уровня грунтовых вод под дном канала, если представить, что $2L = 2B$. Рассмот-

ренный в разд. 11.4 численный метод исследования фильтрации из канала пригоден для изучения формирования режима грунтовых вод под влиянием полосового орошения.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Перечислите основные задачи, которые можно решать, используя уравнения стационарной и нестационарной фильтрации.

2. В чем различие и сходство фильтрации воды из водохранилищ и каналов?

3. Какие два режима движения характерны для стадии свободной фильтрации, чем они различаются и какими критериями можно установить их иаличие?

4. Каковы особенности стадии капиллярно-грунтового потока? По каким принципам построены математические зависимости для оценки подпора и фильтрации на этой стадии?

5. Подпертая фильтрация из водохранилища и канала аппроксимирована одиой расчетной схемой, определены положение депрессионной кривой и величина фильтрационного расхода на урезе при $x = 0$ для стационарных и нестационарных условий. Будут ли одинаковыми погрешности расчета?

6. Можно ли уравнения, полученные для оценкн стационарного и нестационарного подпоров, применять для изучения фильтрации в зоне действия горизонтальных дрен?

7. В чем отличие и сходство математической постановки задач фильтрации под плотиной и в обход ее примыканий?

8. Какие допущения приняты при гидравлическом методе решений задачи обходной фильтрации?

9. Какие достоинства имеет метод недеформируемых лент тока?

10. Как изменяются ширина зоны обходной фильтрации и фильтрационный расход в расчетных схемах: $I_б = 0$, $I > 0$ и $I_б \gg 0$?

11. Какая из трех расчетных схем для оценки гидродинамических условий сооружения плотины наименее благоприятна, если основаннем плотины служат: а) пески; б) суглинки ($m = 10$ м, $k_0 = 10^{-1}$ м/сут), подстилаемые песками; в) тот же разрез, но $m_0 = 1$ м, $k_0 = 10^{-1}$ м/сут?

12. Что такое диагностические графики и каково их назначение в гидродинамических исследованиях фильтрации на массивах орошения?

13. Какими особенностями характеризуется режим грунтовых вод, формирующийся под влиянием полосовой инфнльтрации?

14. Составьте для расчетной схемы разд. 11.9 разностную явную схему, применив метод конечных разностей. Приняв конкретные чнсловые значения, проведите сопоставительные расчеты аналнтическнм и численным методами. Сравните результаты решений.

15. Можно лн решения, полученные для исследований фильтрации на массивах орошения, применнть для изучения условий подтопления городских и промышленных территорий?

16. Используя диагностические графики главы 11, выявите для однотипных расчетных схем различия в формировании днамики потока грунтовых вод, приуроченного к суглинкам и пескам (числовые исходные данные примите произвольно).

17. Для этих же двух потоков укажнте, на каких расстояниях от границ $x = 0$ и $x = L$ следует расположить наблюдательные скважины режимной сети, чтобы данные натурных наблюдений показали однотипность формнрования гидродинамики этих потоков. В какой форме должны быть представлены данные иаблюдений?

18. Поток грунтовых вод имеет характеристикн: $T = 100$ м²/сут, $\mu = 0{,}1$; длина междуречья $2L = 2$ км; $w_{ор} = 10^{-3}$ м/сут. Определите, пользуясь графиками на рнс. 11.7, через какое время $\Delta H_{0,t}$ и $q_д$ составят 50 % предельных значений? Как изменится это время, если в сечении $x = 0$ будет сооружен канал с $\overline{Q}_ф = 200$ м³/сут? Как изменится гидрогеологическая обстановка, если $T = 10$ м²/сут и $\mu = 0{,}05$?

Глава 12

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ РЕЖИМА И БАЛАНСА ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Под гидродинамическими основами изучения режима и баланса подземных вод будем понимать количественные методы, выявляющие связь режимообразующих факторов (РОФ) с параметрами режима, а также с элементами баланса подземных вод и позволяющие прогнозировать поведение ГГС. Режим и баланс подземных вод формируются в результате вероятностного и детерминированного взаимодействия многих геолого-гидрогеологических и физико-географических факторов. В формировании естественного режима главная роль принадлежит стохастическим факторам, поэтому для установления количественной связи этих факторов с режимом уровня подземных вод используют различные вероятностные методы, применение которых для решения разных задач изложено в работах [22, 23, 38]. В формировании нарушенного режима ведущую роль играют техногенные воздействия, часто имеющие детерминированную природу (водоотбор и т. п.), поэтому нарушенный режим изучается в основном с применением аналитических уравнений и численных методов (см. главы 9—11 и работы [11, 14, 54]).

Уравнение в конечных разностях используется для определения гидрогеологических параметров по данным режимно-балансовых наблюдений. Определение параметров μ, a, μ^*, ω и $L_{нд}$ представляет собой решение обратных задач, особенности которых изложены в разд. 6.11. Исходной информацией являются данные наблюдений за режимом подземных вод на режимно-балансовых участках по специальной сети скважин. Наблюдательные точки располагаются по створу, ориентированному по направлению движения потока. При этом должно соблюдаться условие одномерности потока, поэтому створ должен находиться за зоной влияния гидродинамического несовершенства границ. При расположении наблюдательных точек по конверту (четыре по углам балансового участка, одна в центре) или другим схемам пользуются уравнениями планового потока. Исходная информация представляется графиками колебания уровня грунтовых вод и серией карт гидроизогипс, построенных на разные моменты времени. Гидрогеологические параметры вычисляются через другие переменные, поэтому наличие погрешностей измерения и интерполяции, неполнота исходной информации и многое другое усложняет решение обратных задач и приводит к неоднозначному определению параметров [11, 35].

Полученные значения параметров всегда будут эффективными, т. е. будут удовлетворять своими значениями математическое описание того процесса, по данным наблюдений за которым они были найдены. Чем длительнее период наблюдений и разнообразнее обстановка, в которой проявляется этот процесс, тем надежнее значения искомых параметров [11].

12.1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ РЕЖИМА И БАЛАНСА ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Гидродинамическую связь режима и баланса грунтовых вод впервые выявил и детально исследовал Г. Н. Каменский [20].

Для выявления этой связи получим конечно-разностное уравнение в балансовой форме. Примем простые гидрогеологические условия (см. рис. 7.1). Тогда уравнение (7.1) для элемента потока длиной Δx за время Δt может быть представлено в таком балансовом виде:

$$\pm (q_{\text{пр}} - q_{\text{от}})\,\Delta t \pm \omega \Delta x \Delta t = \pm \mu \Delta x \Delta H_t, \qquad (12.1)$$

где $(q_{\text{пр}} - q_{\text{от}})\,\Delta t = \Delta q \Delta t$ отражает изменение объема воды за счет подземного стока; $\omega \Delta x \Delta t$ — накопление (+) или расходование (—) объема воды за счет вертикального водообмена с атмосферой и зоной аэрации; $\mu \Delta x \Delta H_t$ — результирующая водного баланса, характеризующая накопление (+) или убыль (—) запасов воды в выделенном элементе потока за время Δt при $\Delta x = (\Delta x_{1-2} + \Delta x_{2-3})/2$. Величина ΔH_t представляет собой среднюю амплитуду колебаний уровня грунтовых вод

$$\Delta H_t = H_{2,\,t+\Delta t} - H_{2,\,t}, \qquad (12.2$$

где $H_{2,t}$ и $H_{2,\,t+\Delta t}$ — отметки уровня грунтовых вод соответственно на начало и конец периода Δt в средней из трех (1, 2, 3) скважин, к которой относится результирующий баланс. Полную связь баланса и режима уровня можно «увидеть», если выразить элементы баланса в уравнении (12.1) через уровни грунтовых вод, записав уравнение в конечных разностях в развернутой форме. Для принятой расчетной схемы

$$q_{\text{пр}} = T\,\frac{H_1 - H_2}{\Delta x_{1-2}}; \qquad q_{\text{от}} = T\,\frac{H_2 - H_3}{\Delta x_{2-3}}, \qquad (12.3)$$

где значения уровней воды в скважинах 1—3 отвечают разным моментам времени на начало $q^S = f(H^S)$, конец $q^{S+1} = f(H^{S+1})$ и середину $q^{S+0,5} = f(H^{S+0,5})$ интервала Δt. При анализе режима и баланса используют последнюю форму представления расхода. Тогда уравнение (12.1) с учетом (12.2) и (12.3) примет вид

$$\frac{H_2^{S+1} - H^S}{\Delta t} = \frac{T}{\mu \Delta x}\left(\frac{H_1^{S+0,5} - H_2^{S+0,5}}{\Delta x_{1-2}} - \frac{H_2^{S+0,5} - H_3^{S+0,5}}{\Delta x_{2-3}}\right) + \frac{\omega}{\mu}. \qquad (12.4)$$

Из уравнений (12.4) и (12.1) следует, что колебания уровня грунтовых вод есть результат взаимодействия элементов водного баланса потока.

12.2. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМА И БАЛАНСА ГРУНТОВЫХ ВОД ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ

Задача изучения режима и баланса включает: а) определение основных элементов баланса; б) выделение главных РОФ; в) установление закономерностей формирования режима грунтовых вод (основных тенденций в его изменении).

Рассмотрим балансовый участок, где расположено три скважины (рис. 12.1, *а*). Исследуем изменение водного баланса за год. Для этого надо иметь данные наблюдений за режимом уровней грунтовых вод по трем скважинам как минимум за год, представленные в виде графиков колебаний (см. рис. 10.1, *б*). Вначале по следующему алгоритму определяют результирующее инфильтрационное питание: 1) составляют расчетную схему балансового участка и записывают исходное конечно-разностное уравнение (12.4); 2) анализом графика колебаний уровня грунтовых вод в средней скважине (с учетом соседних) выделяют расчетные интервалы Δt, которые характеризуются постоянной величиной инфильтрационного водообмена и, следовательно, равномерным монотонным изменением уровня; 3) для каждого Δt по уравнению (12.4) определяют w и $w\Delta t$ и с соответствующими знаками за

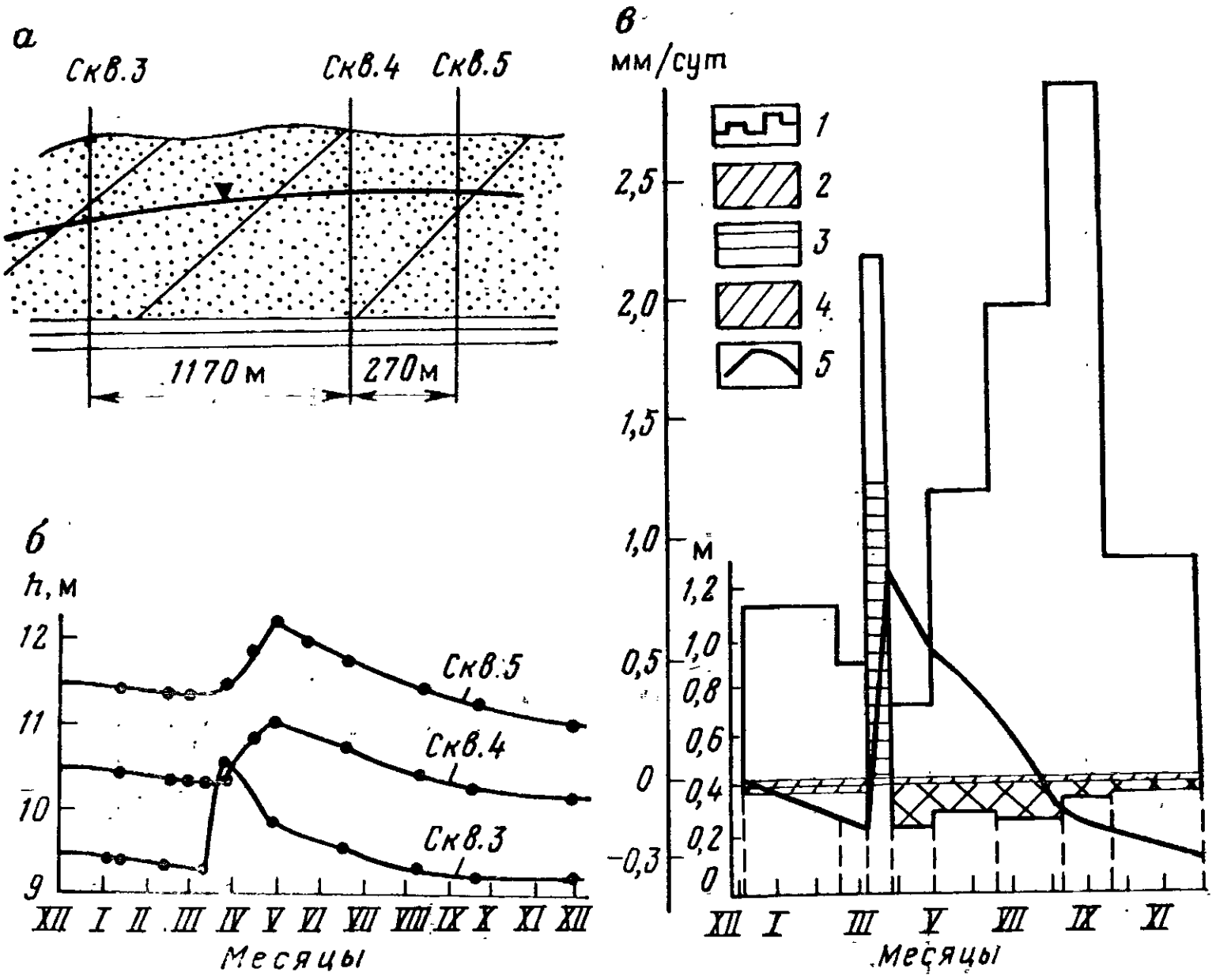


Рис. 12.1. Схематический гидрогеологический разрез с наблюдательными скважинами (*а*) и графики колебаний уровня грунтовых вод (*б*) и изменения элементов их водного баланса (*в*):

1 — осадки; *2* — подземный сток; *3* — инфильтрация; *4* — (косая сетка) испарение; *5* — колебания уровня грунтовых вод

писывают в табл. 12.1. Сумма положительных объемов определяет годовое инфильтрационное питание, отрицательных — испарение, результирующее значение свидетельствует о годовой направленности вертикального водообмена; 4) затем оценивают элементы баланса в целом. Для этого по уравнению (12.3) определяют $\Delta q = (q_{пр} - q_{от})$, полученные значения заносят в табл. 12.2. Туда же из табл. 12.1 записывают соответствующие значения для w. Затем находят правую часть уравнения (12.1), вычисляя для средней скважины ΔH_t по формуле (12.2) для каждого Δt. Содержание табл. 12.2 характеризует годовой водный баланс выделенного участка потока:

$$\pm \sum_{1}^{n} \frac{\Delta q \Delta t}{\Delta x} \pm \sum_{1}^{n} w \Delta t = \pm \sum_{1}^{n} \mu \Delta H_t, \qquad (12.5)$$

где n — число выделенных интервалов Δt. По данным, приведенным в табл. 12.2, строят график изменения элементов баланса за год, как показано на рис. 12.1, *в*. Полученные площади на рисунке характеризуют соотношение действующих режимообразующих факторов. Принимая за 100 % каждую из сумм положительных и отрицательных статей баланса, определяют его ведущие элементы (те, которые состав-

Таблица 12.1. **Расчет инфильтрации за гидрологический год при $\mu = 0{,}02$ и $k = 0{,}3$ м/сут**

Дата	Δt, сут	Скв. 5	Скв. 4	Скв. 3	Скв. 4	w, мм/сут	$w\Delta t$, мм
		h_{n-1}, м	h_n, м	h_{n+1}, м	Δh_t, м		
1.XII		11,46	10,44	9,41			
	77	11,40	10,38	9,35	—0,14	—0,024	—1,85
16.II		11,34	10,30	9,28			
	22	11,32	10,28	9,27	—0,04	+0,02	—0,04
10.III		11,31	10,26	9,26			
	17	11,36	10,51	9,88	+1,03	+1,20	+20,47
27.III		11,40	11,29	10,50			
	35	11,88	11,03	10,10	—0,30	—0,17	—5,95
1.V		12,17	10,99	9,83			
	50	11,96	10,85	9,68	—0,28	—0,10	—5,50
20.VI		11,75	10,71	9,53			
	51	11,55	10,62	9,40	—0,39	—0,14	—7,14
10.VIII		11,41	10,32	9,27			
	41	11,32	10,27	9,24	—0,10	—0,04	—1,64
20.IX		11,24	10,22	9,21			
	72	11,12	10,18	9,19	—0,08	—0,011	—0,79
1.XII		11,00	10,14	9,18			

Примечание. $-w\Delta t = -23{,}31$ мм; $+w\Delta t = +20{,}47$ мм; $\Sigma(w\Delta t) = -1{,}84$ мм.

Таблица 12.2 **Баланс грунтовых вод для участка со скважинами 5, 4, 3**

$$\left(\Delta x = \frac{1170 + 270}{2} = 720 \text{ м}\right)$$

Дата	Δt, сут	Приток q_1, м³/сут	Отток q_2, м³/сут	Сток $\Delta q = q_1 - q_2$, м³/сут	Интенсивность, мм/сут		Элементы баланса за Δt, мм				Изменение запасов грунтовых вод, мм $\mu \Delta H_t$
					стока $\frac{\Delta q}{\Delta x} \cdot 1000$	инфильтрации w	боковой приток $+\frac{\Delta q}{\Delta x}\Delta t$	инфильтрация $+w\Delta t$	боковой отток $-\frac{\Delta q}{\Delta x}\Delta t$	испарение $w\Delta t$	
1.XII—16.II	77	0,0029	0,0113	—0,0084	—0,012	—0,024	—	—	0,92	1,85	—2,77
16.II—10.III	22	0,0029	0,0109	—0,0080	—0,011	—0,025	—	—	0,24	0,44	—0,68
10.III—27.III	17	0,0024	0,0107	—0,0083	—0,011	+1,20	—	20,47	0,19	—	+20,28
27.III—1.V	35	0,0025	0,0109	—0,0084	—0,012	—0,17	—	—	0,42	5,95	—6,37
1.V—20.VI	50	0,0033	0,0133	—0,0100	—0,014	—0,10	—	—	0,70	5,50	—6,20
20.VI—10.VIII	51	0,0027	0,0135	—0,0108	—0,015	—0,14	—	—	0,77	7,14	—7,91
10.VIII—20.IX	41	0,0029	0,0111	—0,0082	—0,011	—0,04	—	—	0,45	1,64	—2,09
20.IX—1.XII	72	0,0025	0,0107	—0,0082	—0,011	—0,011	—	—	0,79	0,79	—1,58
				Итого (за год):			0	+20,47	—4,48	—23,31	—7,32

Примечание. В графе «Изменение запасов грунтовых вод» дано среднее значение μ.

ляют более 25 %). Гидродинамический анализ связи баланса и режима подземных вод выполняют, сопоставляя по сезонам года изменения элементов баланса с соответствующей величиной ΔH_t. Для этого на график наносят по табл. 12.1 величину изменения ΔH_t по средней скважине за каждый интервал времени Δt. По результатам анализа выделяют главные РОФ, и по их соотношению проводят классификацию режима подземных вод.

Пользуясь уравнением (12.5), можно вести гидродинамический анализ многолетних изменений режима и баланса грунтовых вод как в естественных, так и в нарушенных хозяйственной деятельностью условиях. В последние годы сочетают детерминированные и стохастические методы количественной оценки режима и баланса.

З а д а ч а. Пользуясь данными табл. 12.1, 12.2 и рис. 12.1, установить: а) ведущие элементы баланса; б) основные РОФ и тип режима; в) роль осадков в формировании питания грунтовых вод (определить долю инфильтрационного питания); г) можно ли по данным режимных наблюдений, используя уравнение в конечных разностях (12.4), определить параметры μ, a?

12.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПО АНАЛИТИЧЕСКИМ ЗАВИСИМОСТЯМ

Наиболее просто определить коэффициент уровнепроводности a в период паводка или наполнения водохранилища, канала, когда изменение уровня воды на границе или в ближайшей к урезу реки или каналу скважине может быть принято по линейному закону. Тогда при условии отсутствия инфильтрационного питания используют зависимость (10.17), которую представляют в виде

$$\Delta H_{x,t}/\Delta H^0 = R(\lambda). \qquad (12.6)$$

Зная из графиков наблюдений за режимом грунтовых вод за расчетный срок наблюдений $t_р$ амплитуды подъема уровня воды в скважине $\Delta H_{x,t_р}$ и граничном пьезометре или на границе потока $\Delta H^0 = vt_р$, по отношению амплитуд из (12.6) определяют значение функции $R(\lambda)$, затем по таблице находят отвечающий этой величине аргумент λ, а по (10.3а) вычисляют

$$a = x^2/4\lambda^2 t_р^2.$$

Для других гидрогеологических условий ход решения задачи сохраняется, а используемое уравнение определяется расчетной схемой.

При известном a можно определить параметр $\Delta L_{нд}$. В этом случае следует в формуле (10.3) x заменить на $x + \Delta L_{нд}$ и, решая задачу в указанной выше последовательности, найти искомый параметр

$$L_{нд} = 2\lambda\sqrt{at} - x, \qquad (12.7)$$

где x — расстояние, на котором находится наблюдательная скважина от границы (уреза реки, канала и т.п.). Как видно из уравнения (12.7), это расстояние должно удовлетворять условию $x \leqslant 2\sqrt{at}$, что следует иметь в виду при обосновании режимной сети.

12.4. РАСЧЕТ ПО УРАВНЕНИЮ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

Наиболее распространено определение параметра емкости μ по створу из трех скважин, расположенных на расстояниях Δx_{1-2} и Δx_{2-3} друг от друга. При этом пренебрегают величиной инфильтрационного питания (часто это зимний период), и тогда, если водоупор негоризонтальный (см. рис. 7.1), то расчетное уравнение (7.6) принимает вид

$$\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta H_{2,\,\Delta t}} \left(k_{1-2} h_{1-2} \frac{H_1^S - H_2^S}{\Delta x_{1-2}} - k_{2-3} h_{2-3} \frac{H_2^S - H_3^S}{\Delta x_{2-3}} \right), \qquad (12.8)$$

где $\Delta H_{2,\,\Delta t}$ определяется по формуле (12.2); H_1^S, H_2^S, H_3^S — отметки уровней воды в наблюдательных скважинах 1, 2, 3 на начало интервала Δt.

Период Δt выбирается анализом графика колебаний уровня грунтовых вод по скв. 2, на котором выделяют участки с равномерным его снижением при условии, что $w = 0$. В этом случае снижение определяется только способностью пласта отдавать воду под действием сил гравитации. Если положение водоупора неясно, то в уравнении (12.8) используют величину $T = kh$.

Решая уравнение (12.8), можно определить коэффициент уровнепроводности

$$a = \frac{\Delta x \Delta H_{2,\,t}}{\Delta t \left(\dfrac{H_1^S - H_2^S}{\Delta x_{1-2}} - \dfrac{H_2^S - H_3^S}{\Delta x_{2-3}} \right)}. \qquad (12.9)$$

Из выражений (12.8) и (12.9) видно, что погрешности расчета μ и a возрастают с уменьшением амплитуды колебаний $\Delta H_{2,\,t}$ и зависят от точности определения градиентов потока между наблюдательными скважинами за период Δt. Другие схемы приводятся в работах [11, 14, 54].

12.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

Рассмотрим определение параметров a и w. Перепишем уравнение (12.4) в ином виде

$$\frac{\Delta H_{2,\,t}}{\Delta t} = a \frac{\Delta^2 H}{\Delta x^2} + \frac{w}{\mu}, \qquad (12.10)$$

где

$$\frac{\Delta H_{2,\,t}}{\Delta t} = \frac{H_2^{S+1} - H_2^S}{\Delta t}; \qquad (12.10а)$$

$$\frac{\Delta^2 H}{\Delta x^2} = \frac{\dfrac{H_1^{S+0,5} - H_2^{S+0,5}}{\Delta x_{1-2}} - \dfrac{H_2^{S+0,5} - H_3^{S+0,5}}{\Delta x_{2-3}}}{\Delta x}. \qquad (12.10б)$$

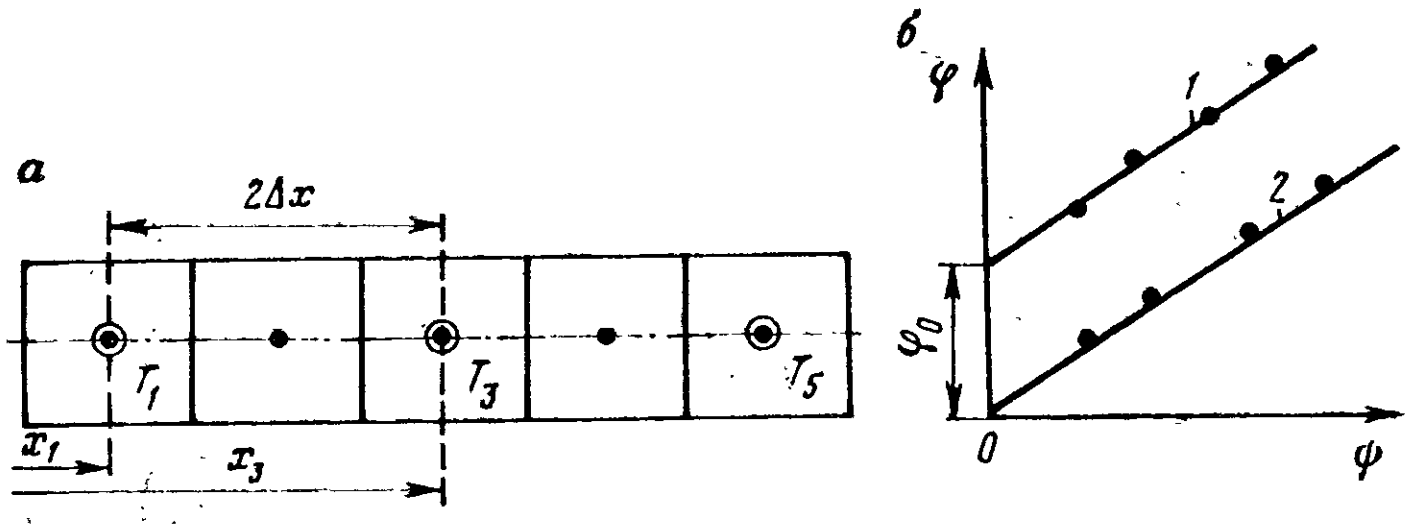


Рис. 12.2. Определение гидрогеологических параметров пласта по данным режимных наблюдений (*а*) и графоаналитическим методом на основе уравнения в конечных разностях (*б*).

Графики: *1* — при наличии инфильтрационного питания; *2* — при его отсутствии

Обозначим

$$\frac{\Delta H_{2,t}}{\Delta t} = \varphi; \qquad \frac{\Delta^2 H}{\Delta x^2} = \psi, \tag{12.10в}$$

и тогда выражение (12.10) можно представить уравнением прямой в координатах φ и ψ (рис. 12.2, б):

$$\varphi = \varphi_0 + C\psi, \tag{12.11}$$

где φ_0 — отрезок, отсекаемый на оси ординат φ и определяемый

$$\varphi_0 = \omega/\mu, \tag{12.11а}$$

а C — тангенс угла наклона прямой к оси ψ

$$C = a = T/\mu, \tag{12.11б}$$

определяемый с графика как

$$C = (\varphi_2 - \varphi_1)/(\psi_2 - \psi_1). \tag{12.12}$$

При отсутствии вертикального водообмена ($\omega = 0$) в выражении (12.11) $\varphi_0 = 0$ и прямая проходит через начало координат. Вычисляя по данным наблюдений за режимом уровня грунтовых вод в трех скважинах численные значения производных по (12.10а), строят экспериментальный график (см. рис. 12.2, *б*). Параметр a определяется из формулы (12.11б) по значению C, которое вычисляется с помощью графика по (12.12). Если известно μ, то из (12.11а) определяют ω по значению φ_0.

Достоинство метода состоит в том, что достоверность определения параметров a и ω/μ подтверждается использованием значительного числа расчетных точек для построения прямой, т. е. полнее используется вся исходная информация наблюдений. Имея достаточно длинный створ из наблюдательных точек, определяют параметры для значительной площади пласта, выявляя тем самым и изменчивость их по площади. Аналогичное решение для планового потока дано В. М. Шестаковым [54].

12.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МЕТОДОМ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Рассмотрим определение гидрогеологических параметров T, ω, b_0 и k_0 методом интегрирования дифференциального уравнения по искомым параметрам при численном представлении производных по данным наблюдений за режимом подземных вод [11]. Примем фильтрацию стационарной, одномерной, линейной. Она описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)=0, \tag{12.13}$$

Переведем (12.13) в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно искомого параметра T, для этого выполним дифференцирование по x

$$\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}+T\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=0. \tag{12.14}$$

Введем обозначения первой и второй производных соответственно

$$i^x=\frac{\partial H}{\partial x};\qquad \varepsilon^x=\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \tag{12.15}$$

и перепишем уравнение (12.14) в таком виде:

$$\frac{\partial T}{\partial x}i^x=-T\varepsilon^x.$$

Разделим переменные и будем интегрировать

$$\int_{T_1}^{T_3}\frac{\partial T}{T}=-\int_{x_1}^{x_3}\frac{\varepsilon^x}{i^x}\,\partial x. \tag{12.16}$$

Интегрирование уравнения (12.16) можно выполнить, если известны значения i^x и ε^x. Их конкретные значения можно получить, если производные представить конечно-разностными выражениями (см. разд. 7.1) и вычислить их значения по данным наблюдений за режимом подземных вод. Для этого надо как минимум иметь участок с тремя наблюдательными скважинами, находящимися по направлению потока на расстоянии Δx друг от друга. Примем участок (x_1, x_3) за трехточечный шаблон (1, 2, 3) разностной сетки с равномерным шагом Δx и длиной $2\Delta x = x_3 - x_1$ (см. рис. 12.2, *а*). Тогда можно первую и вторую производные [см. зависимость (12.15)] представить в конечно-разностном виде

$$i^x\approx\bar{i}^x=\frac{H_3-H_1}{2\Delta x};\qquad \varepsilon^x\approx\bar{\varepsilon}^x=\frac{2H_2-H_1-H_3}{\Delta x^2}. \tag{12.17}$$

Примем на участке длиной $2\Delta x$ изменение водопроводимости T постепенным, $T = f(x)$ и, интегрируя уравнение (12.16) в пределах от T_1 до T_3 и по x от x_1 до x_3 с учетом (12.17), получим

$$\ln \frac{T_3}{T_1} = \frac{\bar{\varepsilon}^x}{\bar{i}^x}(x_3 - x_1) \tag{12.18}$$

или

$$T_3 = T_1 e^{\alpha_1} \tag{12.19}$$

при

$$\alpha_1 = \frac{4(2H_2 - H_1 - H_3)}{H_3 - H_1}, \tag{12.19а}$$

где H_1, H_2, H_3 — полученные при наблюдениях за режимом подземных вод значения пьезометрического уровня (или его приращения) в узловых точках 1, 2, 3 принятой разностной схемы; T_1 и T_3 — водопроводимости в узлах сетки 1 и 3. При известном значении T_1 по формулам (12.19) и (12.19а) можно определить T_3, T_5, . . . , T_m в узлах 3, 5, . . . , m принятой разностной сетки. В этом случае рассматривается лента тока, имеющая кусочное строение из n участков; в пределах каждой тройки водопроводимость постепенно изменяется от $T_{\gamma-2}$ до T_γ. Расчет ведут последовательно, перебирая группы точек 1, 2, 3; 3, 4, 5; 5, 6, 7 и т. д.

В общем виде формулу для определения T_γ в узловых точках $\gamma = 3, 5, 7, 9, \ldots$ можно записать в виде

$$T_\gamma = T_{\gamma-2} e^{\alpha_\gamma} \tag{12.20}$$

при

$$\alpha_\gamma = \frac{4(2H_{\gamma-1} - H_{\gamma-2} - H_\gamma)}{H_\gamma - H_{\gamma-2}}. \tag{12.20а}$$

При расчете по формулам (12.20) и (12.20а) предполагаются известными отметки уровней воды в точках (скважинах) 1, 2, 3, 4, 5, 6 и т. д. (все скважины расположены на одинаковом расстоянии). Если в ленте тока расстояния между скважинами γ—2, γ—1, γ не одинаковы, то каждый расчетный участок имеет длину $\Delta x_{\gamma-2,\,\gamma-1} + \Delta x_{\gamma-1,\,\gamma}$ и вычисление удобно вести непосредственно по уравнению (12.18), которое в общем случае для любой из точек $\gamma = 3, 5, 7, \ldots$ принимает вид при заданной величине T_1

$$\ln T_\gamma = \ln T_{\gamma-2} + \frac{\bar{\varepsilon}^x}{\bar{i}^x}(\Delta x_{\gamma-2,\,\gamma-1} + \Delta x_{\gamma-1,\,\gamma}) \tag{12.21}$$

при

$$\bar{i}^x = \frac{H_\gamma - H_{\gamma-2}}{\Delta x_{\gamma-2,\,\gamma-1} + \Delta x_{\gamma-1,\,\gamma}}; \qquad \bar{\varepsilon}^x = \frac{H_{\gamma-2} - H_{\gamma-1}}{\Delta x_{\gamma-2,\,\gamma-1}} + \frac{H_\gamma - H_{\gamma-1}}{\Delta x_{\gamma-1,\,\gamma}}, \tag{12.21а}$$

где $\bar{i}^x$, $\bar{\varepsilon}^x$ — значения производных, найденные по формуле (12.21а) численным методом по данным наблюдений за режимом подземных

вод; $H_{\gamma-2}$, $H_{\gamma-1}$, H_{γ} — отметки уровней в скважинах-точках $\gamma-2$, $\gamma-1$, γ, находящихся соответственно на расстояниях друг от друга $\Delta x_{\gamma-2,\,\gamma-1}$ и $\Delta x_{\gamma-1,\,\gamma}$.

Можно расчет водопроводимости по ленте тока упростить, воспользовавшись конечно-разностной аппроксимацией градиента потока, приняв для трехточечного участка кусочно-однородное строение в виде двух зон с водопроводимостью $T_{\gamma-2}$ на участке длиной $\Delta x_{\gamma-2,\,\gamma-1}$ и T_{γ} — на $\Delta x_{\gamma-1,\,\gamma}$.

Тогда вместо уравнений (12.21) и (12.21а) имеем при заданной величине T_1:

$$T_{\gamma} = T_1 \frac{I_{1-2}}{I_{2-3}} \frac{I_{3-4}}{I_{4-5}} \frac{I_{5-6}}{I_{6-7}} \cdot \cdot \cdot \frac{I_{\gamma-2,\,\gamma-1}}{I_{\gamma-1,\,\gamma}} \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad (12.22)$$

При выполнении критерия (4.36) погрешности расчета по формуле (12.22) не превышают 10 %.

При наличии инфильтрационного питания постоянной интенсивности w исходное дифференциальное уравнение для плоскопараллельной фильтрации имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial H}{\partial x}\right) + w = 0. \qquad (12.23)$$

Выполняя известные уже преобразования и используя прежние обозначения i^x, ε^x по (12.15), можно уравнение (12.23) представить в виде

$$\frac{\partial T}{\partial x} i^x + T\varepsilon^x + w = 0. \qquad (12.24)$$

Интегрируя (12.24) на участке длиной $x_3 - x_1 = 2\Delta x$

$$\int_{T_1}^{T_3} \frac{\partial T}{T} = -\int_{x_1}^{x_3} \frac{\varepsilon^x + \dfrac{w}{T}}{i^x} \partial x$$

и принимая в правой части T за некоторое среднее арифметическое значение T_0, а для первой и второй производных их конечно-разностные выражения как $\bar{i}^x$ и $\bar{\varepsilon}^x$ по (12.17), получим

$$\ln T_3 = \ln T_1 + 2 \frac{\bar{\varepsilon}^x + \dfrac{w}{T^0}}{\bar{i}^x} \Delta x. \qquad (12.25)$$

Если на участке длиной $2\Delta x$ известны T_1, w и T^0, а по данным режимно-балансовых наблюдений (РБН) определить значения уровней воды H_1, H_2, H_3 и конечно-разностные величины производных $\bar{i}^x$, $\bar{\varepsilon}^x$ по уравнению (12.17), то из выражения (12.25) можно определить водопроводимость в узле 3. Уточнив принятое значение T^0, можно повторным приближением уточнить и расчетную величину T_3.

Если принять на этом участке пласт однородным с известной величиной T, то по формуле (12.25), используя данные замеров уровней

воды H_1, H_2, H_3 в точках 1, 2, 3 можно определить среднее инфильтрационное питание

$$w = T\frac{2H_2 - H_1 - H_3}{\Delta x^2} \tag{12.26}$$

в условиях стационарного или квазистационарного режима грунтовых вод.

Рассмотрим фильтрацию в двухпластовой системе при наличии перетекания. Исходное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right) + b_0\Delta H^0 = 0, \tag{12.27}$$

где b_0 — параметр перетекания, $b_0 = k_0/m_0$; ΔH^0 — средняя разность уровней на участке длиной $2\Delta x$ между основным пластом с водопроводимостью T и питающим, где уровень неизменен и равен ΔH^0 ($\Delta H^0 = H - H^0$).

Переведя уравнение (12.27) в обыкновенное дифференциальное относительно параметра T, описанным выше приемом при известных значениях параметров b_0, T_1 и найденных по формуле (12.17) конечно-разностных значениях производных $\bar{i}^x$, $\bar{\varepsilon}^x$ с использованием отметок уровней воды H_1, H_2, H_3 (из РБН) получаем уравнение для определения водопроводимости в точке 3

$$\ln T_3 = \ln T_1 + \frac{2\Delta x}{\bar{i}^x}\left(\bar{\varepsilon}^x - \frac{b_0\Delta H^0}{T^0}\right). \tag{12.28}$$

Если пласт однородный ($T_3 = T_1 = T$), то из (12.28) можно получить формулу для вычисления параметра перетекания

$$b_0 = \frac{T^0}{\Delta H^0}\frac{(2H_2 - H_1 - H_3)}{(H_3 - H_1)}. \tag{12.29}$$

При одновременном определении параметров T и b_0 необходимо на участке длиной $2\Delta x$ иметь данные наблюдений для двух квазистационарных пьезометрических полей.

Рассмотрим нестационарную одномерную фильтрацию, которая описывается уравнением (6.36)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right) + w = \mu\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Переводя это уравнение в обыкновенное дифференциальное относительно параметра T, получим

$$\frac{\partial T}{\partial x}i^x + T\varepsilon^x + w - \mu\beta = 0, \tag{12.30}$$

где i^x, ε^x определяются по формуле (12.15), а $\beta = \partial H/\partial t$. Принимая для участка длиной $2\Delta x$ среднее значение T^0, получим вместо (12.30) известным уже способом зависимость

$$\ln\frac{T_3}{T_1} = \frac{2\Delta x}{T^0\bar{i}^x}(\bar{\varepsilon}^x T^0 - w - \mu\bar{\beta}), \tag{12.31}$$

где $\bar{i}^x$, $\bar{\varepsilon}^x$, $\bar{\beta}$ — конечно-разностные значения производных, полученные с использованием неявной схемы (см. гл. 7):

$$\bar{i}^x = \frac{H_{3,t} - H_{1,t}}{2\Delta x}; \qquad \bar{\varepsilon}^x = \frac{2H_{2,t} - H_{1,t} - H_{3,t}}{\Delta x^2}; \tag{12.32}$$

$$\bar{\beta} = \frac{H_{2,t-\Delta t} - H_{2,t}}{\Delta t}. \tag{12.32а}$$

Значения $H_{1,t}$, $H_{3,t}$, $H_{2,t}$, $H_{2,t-\Delta t}$ в выражениях (12.32) и (12.32а) считаются, как и прежде, известными по данным наблюдений за режимом подземных вод на начало $(t-\Delta t)$ и конец (t) периода.

Используя зависимость (12.31), можно получить расчетные уравнения для определения параметров T, μ, ω. Если все параметры, кроме T_3, известны, то, считая в точке 1 известной T_1 на любой из моментов времени, определяется T_3 непосредственно из уравнения (12.31). Для определения ω при известных значениях μ, T^0 необходимо по данным наблюдений знать отметки уровней воды в узлах сетки 1, 2, 3 на два момента времени. По значениям этих уровней из выражений (12.32) и (12.32а) определяют $\bar{i}^x$, $\bar{\varepsilon}^x$, $\bar{\beta}$, а величину ω вычисляют по формуле

$$\omega = \frac{T^0(\bar{\varepsilon}^{x''}\bar{i}^{x'} - \bar{\varepsilon}^{x'}\bar{i}^{x''}) + \mu(\bar{\beta}'\bar{i}^{x''} - \bar{\beta}''\bar{i}^{x'})}{\bar{i}^{x'} - \bar{i}^{x''}}; \tag{12.33}$$

при $\omega = 0$ величина μ рассчитывается по формуле

$$\mu = T^0 \frac{(\bar{\varepsilon}^{x''}\bar{i}^{x'} - \bar{\varepsilon}^{x'}\bar{i}^{x''})}{(\bar{\beta}''\bar{i}^{x'} - \bar{\beta}'\bar{i}^{x''})}.$$

В случае двухпластовой системы с перетеканием параметр b_0 определяется по уравнению (12.33), в котором ω следует заменить на b_0, а справа в знаменатель ввести ΔH^0.

Используя несколько моментов времени на одном и том же створе, определяют ряд значений параметров и, обработав полученную выборку статистически, находят расчетное значение с определенной вероятностью. Удобно все расчеты выполнять на ЭЦВМ.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какова роль данных наблюдений за режимом подземных вод при определенни параметров методом конечных разностей? Методом численного интегрирования?
2. Каким требованиям должен удовлетворять створ наблюдательных скважин для определения параметров пласта по РБН?
3. В чем суть метода определения параметров пласта численным интегрированием?
4. Какие погрешности влияют на определение параметров пласта численным интегрированием? Аналитическим расчетом? По уравнению в конечных разностях?

5. Что понимают под гидродинамическими основами изучения режима и баланса подземных вод? Как показать количественно гидродинамическую связь режима и баланса?

6. Какая исходная информация необходима для определения инфильтрационного питания по уравнению в конечных разностях?

7. В какой последовательности определяют по данным наблюдений за режимом подземных вод элементы их водного баланса методом конечных разностей?

8. Как определяют параметры методом графоаналитического представления уравнения в конечных разностях? Какой минимальной длительности должны быть для этого наблюдения за режимом подземных вод? В чем достоинства этого метода?

9. Восстановите самостоятельно весь ход получения зависимостей (12.28), (12.29), (12.31) и (12.33).

10. Запишите всю последовательность решения задачи по определению T, μ, w на основе уравнения (12.31).

Часть III

ИССЛЕДОВАНИЕ РАДИАЛЬНОЙ, ПЛАНОВО-РАДИАЛЬНОЙ И ПЛАНОВО-ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ГГС

Глава 13

РАДИАЛЬНАЯ И ПЛАНОВО-РАДИАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ (ВОДОПРИТОК К СОВЕРШЕННЫМ СКВАЖИНАМ)

13.1. ОСОБЕННОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Особенности фильтрации. Радиальная и планово-радиальная фильтрация формируется при движении воды к скважинам. Для совершенных по степени вскрытия пласта скважин при $B, L \gg m$ выполняется условие (4.29), и фильтрация в неограниченном по распространению пласте схематизируется в силу симметрии потока к радиальной, а при наличии границ — к планово-радиальной (см. гл. 4). Несколько работающих в пласте скважин приводят к «обобщенной» скважине, гидродинамический эффект от действия которой аналогичен одиночной скважине радиусом R_0 с дебитом, равным суммарному дебиту всех взаимодействующих скважин.

В формировании нестационарной фильтрации выделяют три стадии: а) нестационарную (нерегулярный режим); б) квазистационарную (регулярный режим); в) стационарную (стационарный режим). В процессе формирования фильтрации выделяют два периода: первый, когда поток принимается неограниченным в плане, и второй, в течение которого действие границ является ведущим, а поток считается ограниченным. На рис. 13.1 показаны схемы с открытой внешней границей, на которой задано условие $H_к = \text{const}$ (схемы *а*, *б*), и с закрытой, непроницаемой, где $Q = 0$ (схемы *в*, *г*). Вначале зона влияния откачки $R_{пр} < R_к$ — это расстояние до границы, и процесс развития депрессионной воронки идет как в неограниченном пласте. С момента, когда $R_{пр} = R_к$, начинают влиять внешние границы, но различно: граница первого рода уменьшает скорость снижения уровней, и быстро наступает стабилизация (см. рис. 13.1, *а*, *б*); граница второго рода, наоборот, ускоряет темп снижения уровней, и могут произойти сработка всего избыточного напора и частичное осушение пласта (см. рис. 13.1, *в*, *г*).

Основным граничным условием на скважине является задание ее расхода $Q_{скв}$ постоянным во времени, в сложных случаях график $Q_{скв} = f(t)$ аппроксимируется ступенчатой линией. Менее распространено граничное условие в виде постоянного уровня воды в скважине, которое не позволяет использовать метод суперпозиции. Из рис. 13.2 видно, что при условии $Q_{скв} = \text{const}$ на стенке скважины уклон пьезометрической кривой постоянен во времени, что и обеспечивает выполнение граничного условия. В этом случае наблюдаются

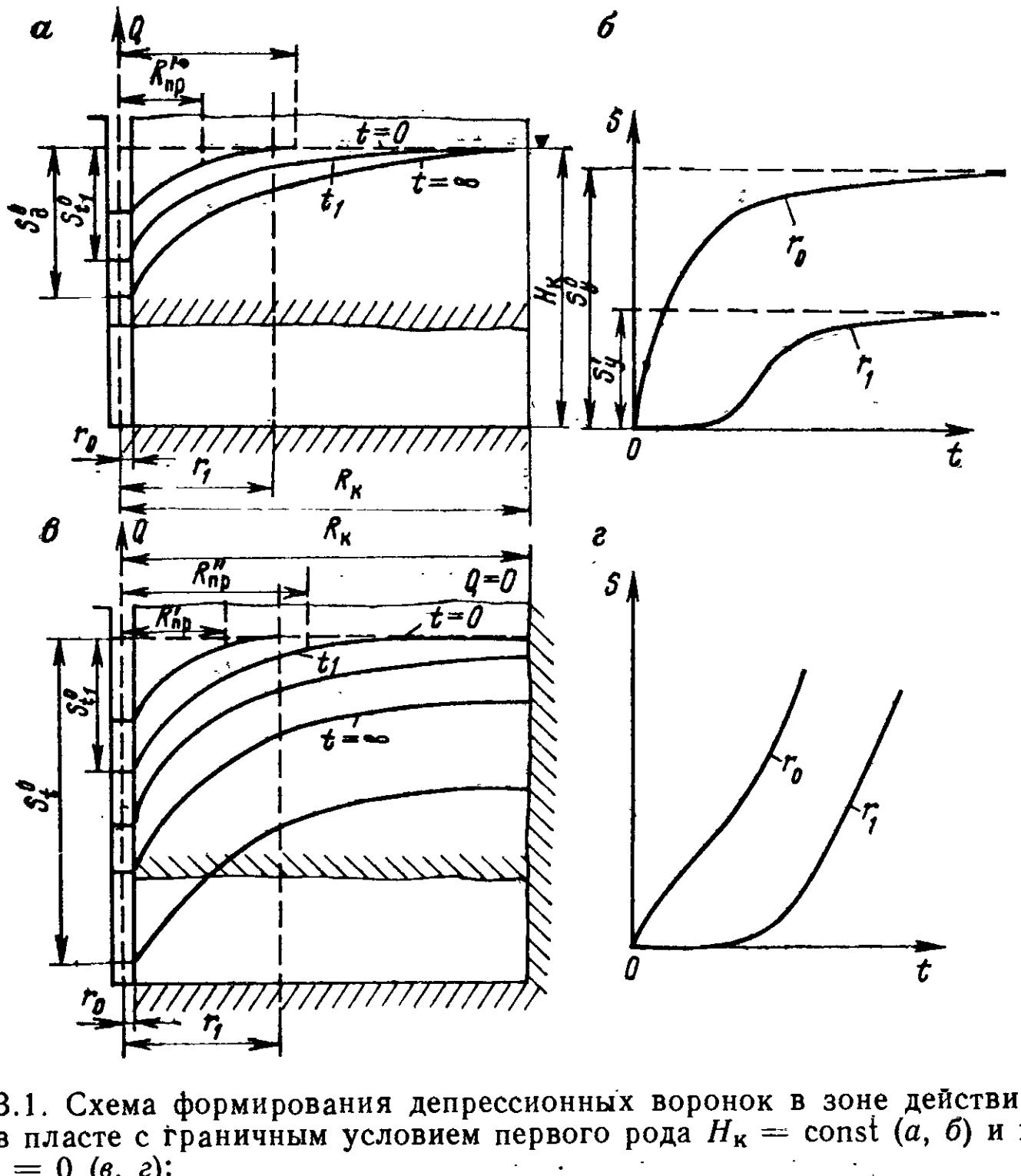


Рис. 13.1. Схема формирования депрессионных воронок в зоне действия скважины в пласте с граничным условием первого рода $H_к = \text{const}$ (*а*, *б*) и второго рода $Q = 0$ (*в*, *г*):

а, *в* — схемы развития воронок депрессий в разрезе (без влияния внешней границы пласта, $t < t_1$, с активным влиянием внешней границы, $\infty \geqslant t > t_1$; t_1 — время достижения внешней границы, $R'_{пр}$ и $R''_{пр}$ — зоны квазистационарной фильтрации); *б*, *г* — графики изменения величины понижения во времени (r_0 — в опытной скважине, r_1 — в наблюдательной скважине; $t = \infty$ — время стабилизации уровня, $S^0_{t_1}$ и S_y — соответственно понижения в скважине в момент времени t_1 и при установившейся фильтрации); $H \to \infty$ — время осушения пласта, $S^0_{t_1}$, S^0_t — соответственно нестационарные понижения в скважине

развитие воронки по площади и уменьшение скорости снижения уровня воды в пласте. При $H_{скв} = \text{const}$ формируется близкая ситуация, однако характер динамики уровня иной, так как на стенке скважины градиент потока уменьшается во времени, что обусловливает снижение величины расхода скважины.

Фильтрация изучена главным образом в однородных и условно однородных толщах, к которым приводятся пласты с хаотической неоднородностью. Решения получены при отсутствии инфильтрационного питания и не учитывают наличия естественного (бытового) потока подземных вод (уклон естественного потока $I_б = 0$, что отвечает схеме «бассейна»). Такой подход упрощает математическую постановку задачи, так как позволяет искать решение для понижения уровня $S_{r,t}$

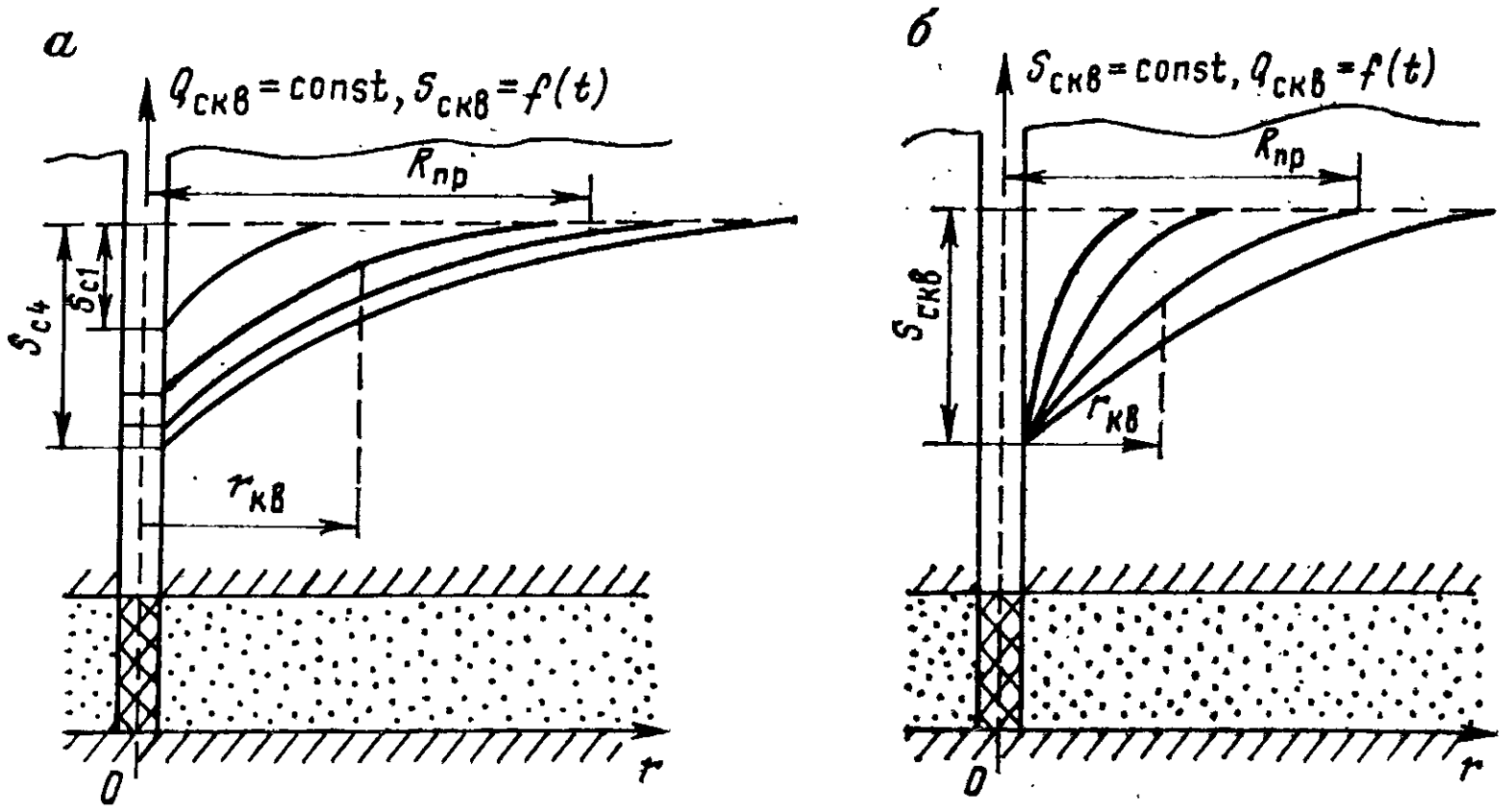


Рис. 13.2. Схема работы скважины с граничными условиями первого (*а*) и второго (*б*) родов

при простых начальных условиях ($t = 0$, $S_{r,0} = 0$), а отметку пьезометрического уровня $H_{r,t}$ находить по формуле (6.55), которая принимает вид

$$H_{r,t} = H_e - S_{r,t}, \qquad (13.1)$$

где H_e — отметка начального (естественного) уровня подземных вод в данной точке.

Принятие $I_б = 0$ несколько искажает реальную гидрогеологическую обстановку. Рассмотрим это на примере рис. 13.3. Имеется плоскопараллельный поток с градиентом $I_б > 0$, в котором работает водозаборная скважина с расходом $Q_{скв}$ и понижением $S_{r,t}$. Сопоставим две гидродинамические сетки: одна характеризует наличие естественного потока грунтовых вод (см. рис. 13.3, знаки *6—8*), другая отвечает принятой математической постановке (знаки *4*, *5*). В последнем случае линии тока представлены радиусами, линии напора — окружностями, а область питания скважины — кругом, теоретически бесконечно большого радиуса. В условиях потока при откачке возникает подземный водораздел (точка *А*), приток воды к скважине локализуется, формируется раздельная линия тока *3*, определяющая конечную область питания скважины (ширина этой области *В*). Таким образом, гидрогеологическая и математическая обстановки различны, и это должно учитываться при анализе полученных расчетом данных.

Взаимодействие скважин. Этот процесс проявляется в том, что при достаточно близком расположении скважины влияют друг на друга, вызывая увеличение понижений уровней в них при сохранении дебитов или уменьшение дебитов при сохранении в скважинах понижений (по сравнению с условиями, когда они работают как одиночные, без взаимодействия). Эффект взаимодействия показан на рис. 13.4. С ум-

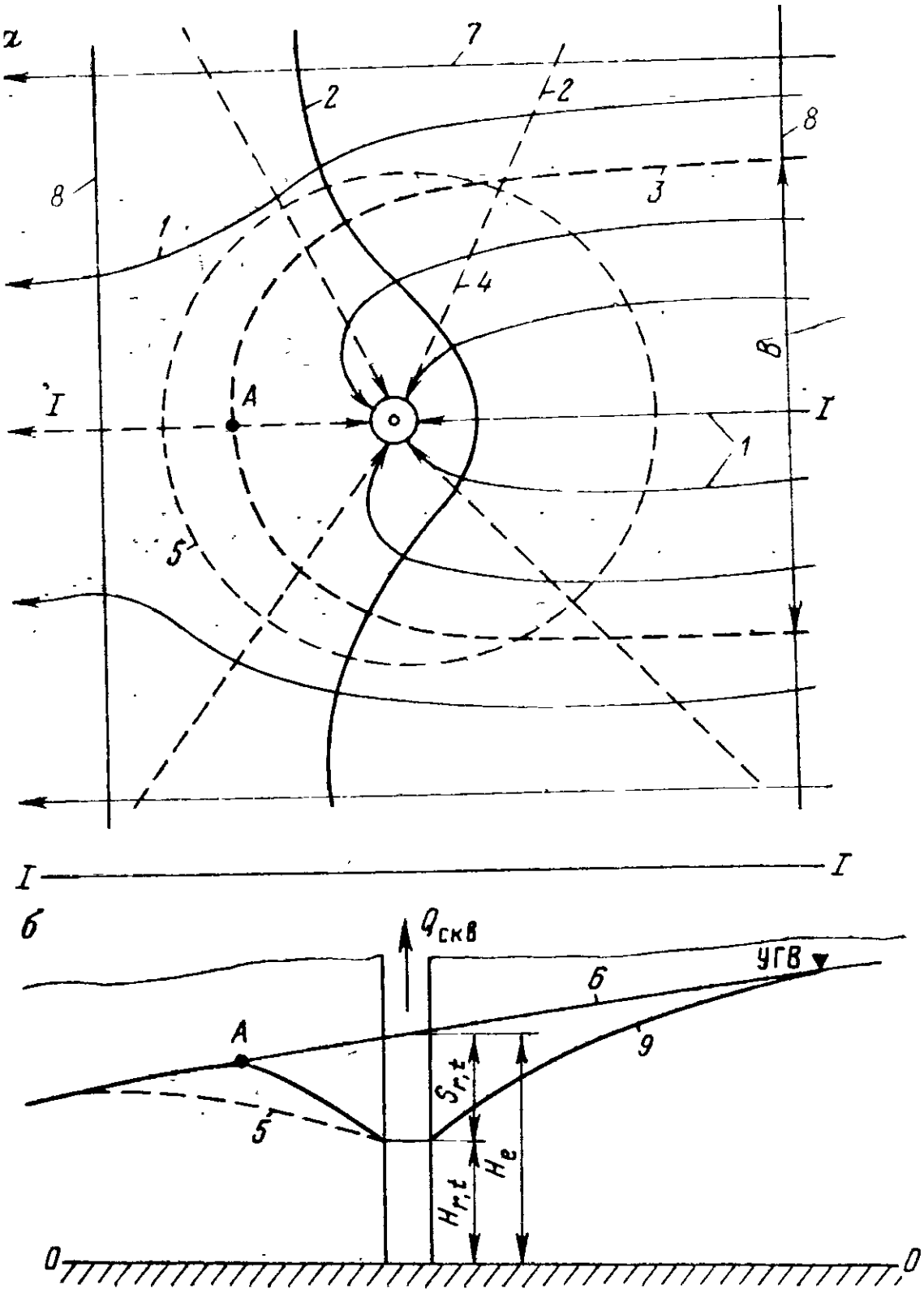


Рис. 13.3. Гидродинамическая схема формирования депрессионной воронки при откачке в условиях потока ($I_б > 0$) и бассейна ($I_б = 0$) в плане (*а*) и на разрезе (*б*)

В потоке: *1* — линия тока; *2* — линии равного напора (гидроизогипсы); *3* — раздельная линия. *В бассейне*: *4* —линия тока; *5* — линия напора. *Естественный поток*: *6* — начальное положение уровня грунтовых вод; *7* — линия тока; *8* — линия напора; *9* — депрессионная воронка в потоке (*А* — водораздельная точка; *В* — ширина области питания потока)

марное влияние всех скважин на любую точку пласта (см. рис. 13.4, точка *А*) определяется согласно уравнению (6.54) по принципу сложения фильтрационных течений:

$$S_{вл,\ A} = \sum_{1}^{n} S_i, \tag{13.2}$$

где n — общее число скважин; S_i — понижение уровня в точке A, обусловленное влиянием i-й скважины, находящейся от нее на расстоянии x_{A-i}.

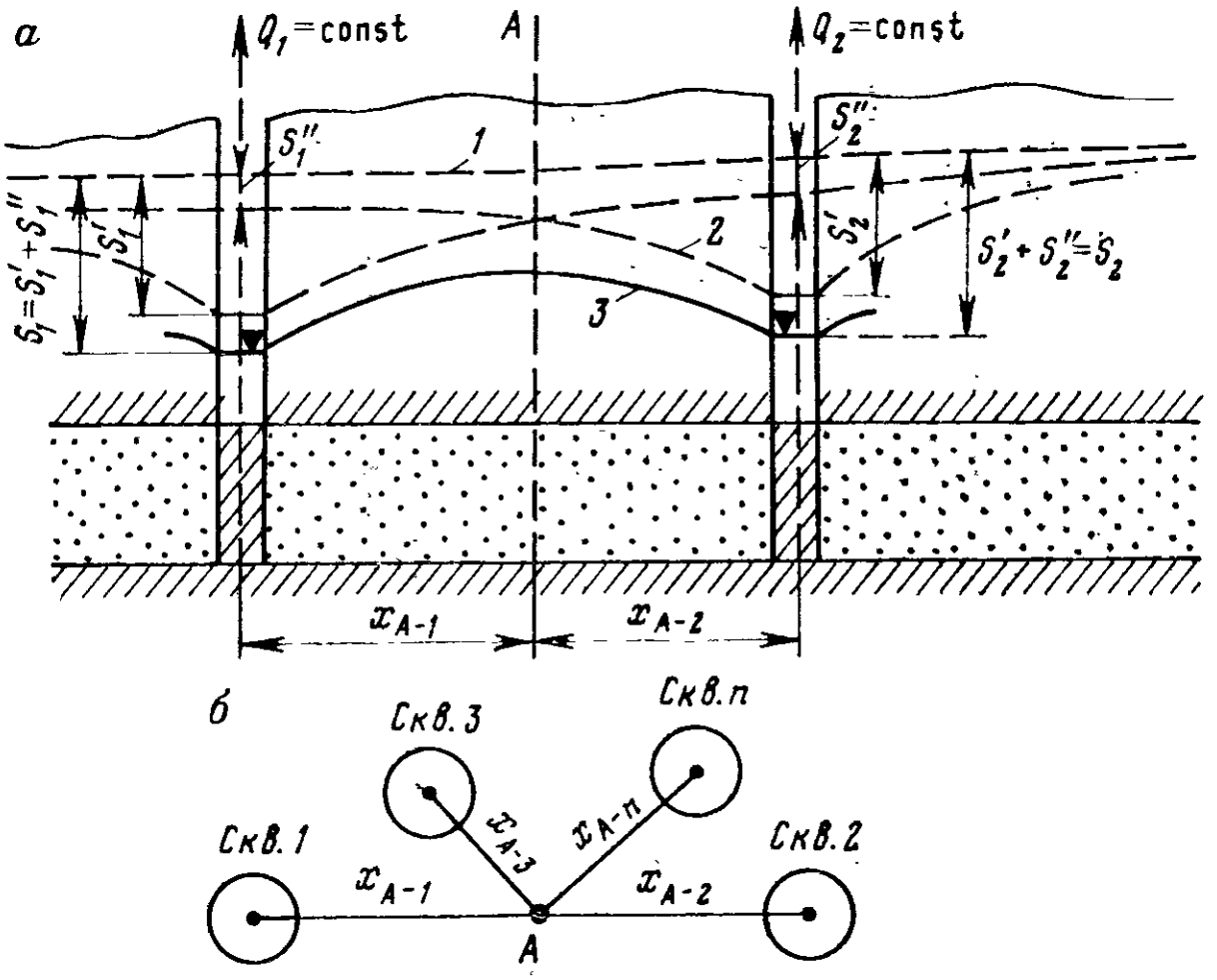


Рис. 13.4. Схема эффекта взаимодействия скважин в разрезе (*а*) и плане (*б*).

Положение пьезометрической поверхности: *1* — начальное; *2* — при работе каждой скважины как одиночной с дебитом соответственно Q_1 и Q_2; *3* — при совместной работе скважин (в условиях взаимодействия) с дебитами соответственно Q_1 и Q_2. S_1' и S_2' — понижения уровня в скважинах при работе каждой как одиночной; S_1'' и S_2'' — дополнительные понижения (срезки уровня), создающиеся соответственно в первой скважине под влиянием работы второй и во второй — под влиянием первой; S_1 и S_2 — понижения в скважинах в условиях их взаимодействия

Математическая постановка задач. Наиболее часто используются расчетные схемы, приведенные на рис. 13.5 и 13.1. Исходным дифференциальным уравнением, описывающим стационарную радиальную фильтрацию и совершенной скважине (системе совершенных скважин), является

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right)=0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}=0. \tag{13.3}$$

От (13.3) легко перейти к уравнению для S, если воспользоваться условием (13.1) и принять в нем H_e за частное решение (13.3), что дает право записать

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial S}{\partial r}\right)=0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}=0. \tag{13.4}$$

Уравнение (13.4) решается при граничном условии (4.42) на скважине (или скважинах). На внешней границе пласта граничное условие определяется по формуле (4.20).

Нестационарная фильтрация к совершенной скважине (системе скважин) описывается уравнением (6.19), которое для понижений имеет вид

$$a\left(\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}\right)=\frac{\partial S}{\partial t} \tag{13.5}$$

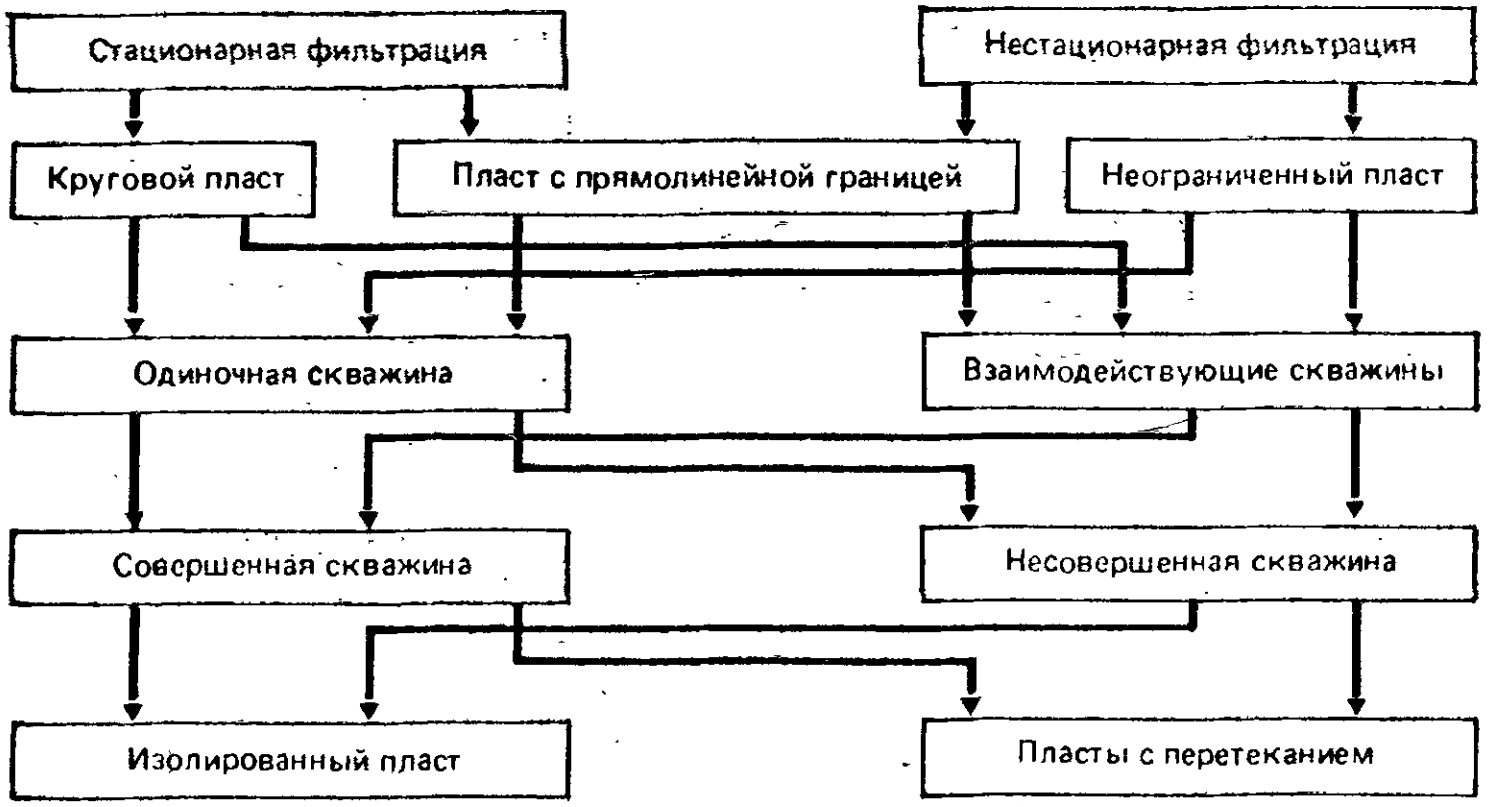


Рис. 13.5. Основные расчетные схемы водопритока к скважинам

и решается при граничных условиях на скважинах (4.42), (4.43) и (4.45), на внешних границах — (4.20), (4.41), (4.44) и др. Начальное условие имеет вид

$$t=0, \qquad S_{r,0}=0. \tag{13.6}$$

Решения для всех постановок получены для напорных вод; применительно к грунтовым они переписываются с использованием напорной функции U по (6.57):

$$mH=\frac{h_e^2-h_{r,t}}{2}=\frac{S\left(2h_e-S\right)}{2} \qquad \text{или}$$

$$S=h_e-\sqrt{h_e^2-2U}. \tag{13.7}$$

Согласно этой связи в решениях, полученных для напорных вод, $2Sm$ заменяют на $S\,(2h_e-S)$. Начало координат всегда принимается на рассматриваемой скважине, в том числе и для систем взаимодействующих скважин. Теория водопритока к скважинам получила развитие в работах Ч. Тейса, Ф. Форхгеймера, В. Н. Щелкачева, И. А. Чарного, М. Хантуша, Ч. Джейкоба, Н. Н. Веригина, Ф. М. Бочевера, В. М. Шестакова и др.

Исходные математические модели. Область влияния откачки значительно превышает радиус скважины, поэтому при построении математической модели совершенная скважина заменяется линейным источником — стоком исчезающе малого размера ($r_0 \to 0$) при конечной его длине l. Сток обладает такой же интенсивностью притока воды, как и реальная скважина

$$q=Q_{\text{скв}}/l, \tag{13.8}$$

где l — длина фильтра, равная длине стока.

Поэтому потоки в зоне действия линейного стока и реальной скважины обладают одинаковой радиальной структурой. Различие, на-

блюдаемое только в зоне, непосредственно примыкающей к стоку, объясняется тем, что радиус фильтра скважины больше нуля.

Моделирование систем скважин стоками дает возможность распределять стоки по различным контурам, геометрически соответствующим реальным схемам расположения скважин в пластах, а также использовать метод суперпозиции и производить другие действия со стоками.

Для радиального и планово-радиального потоков фундаментальными решениями дифференциальных уравнений (13.4) и (13.5) являются для стационарной фильтрации

$$S = \frac{Q_{\text{скв}}}{2\pi T} \ln r + C \tag{13.9}$$

а для нестационарной фильтрации

$$S = \frac{q}{4\pi a} \int_{\tau=0}^{\tau=t} \frac{1}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}} d\tau \qquad \text{при} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{13.10}$$

На основе этих решений получены все известные зависимости для оценки водопритока к совершенным скважинам [6, 8, 30, 31, 54].

13.2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В данном случае задача сводится к решению интегрального аналога дифференциального уравнения (13.5). При этом число независимых переменных уменьшается за счет удаления переменной, по которой ведется интегрирование (в фильтрационных расчетах скважин это обычно параметр времени).

Запишем согласно [54] дифференциальное уравнение (13.5) в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D(S), \tag{13.11}$$

где D — дифференциальный линейный оператор, содержащий производные от S только по пространственным координатам и коэффициенты, независимые от искомой функции S. Если использовать преобразование Лапласа—Карсона [24] и ввести функцию-изображение

$$\tilde{S}_{r,t} = \frac{1}{t_{\text{р}}} \int_0^{\infty} S_{r,t} e^{-\frac{t}{t_{\text{р}}}} dt, \tag{13.12}$$

(где $t_{\text{р}}$ — параметр преобразования, имеющий размерность времени), то уравнение (13.11) можно перевести в стационарное

$$\frac{\tilde{S}}{t_{\text{р}}} - \tilde{S}\Big|_{t=0} = D(\tilde{S}). \tag{13.13}$$

Принимая условие (13.6), из (13.13) получим

$$\tilde{S} - t_{\text{р}} D(\tilde{S}) = 0. \tag{13.14}$$

Граничные условия также переводятся в изображения применением к ним преобразования Лапласа—Карсона по (13.12). При этом граничные условия, постоянные во времени, сохраняют свой вид и после перехода к изображению. Решив задачу в изображениях, переход к оригиналу осуществляют по специальным таблицам обращения, приведенным, например, в справочнике по операционному исчислению, составленному В. А. Диткиным и А. П. Прудниковым, или используют численные методы [24].

В развернутом виде уравнение (13.14) имеет вид обыкновенного дифференциального

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\tilde{S}}{dr}\right)-\frac{1}{t_p}\tilde{S}=0,$$

и граничные условия (4.42) и на бесконечности в изображениях запишутся так:

$$\left(r\frac{d\tilde{S}}{dr}\right)_{r=r_c}=-\frac{Q_{скв}}{2\pi T};\qquad \tilde{S}\big|_{t\to\infty}=0.$$

Для этих условий общим решением будет уравнение [24]

$$\tilde{S}_r=\frac{Q_{скв}}{2\pi T r_c}\,\frac{K_0\left(r\sqrt{1/(at_p)}\right)}{(1/\sqrt{at_p})\,K_1\left[r_c\sqrt{1/at_p}\right]},\qquad (13.15)$$

где K_0 и K_1 — функции Бесселя второго рода нулевого и первого порядков от мнимого аргумента. При $r_c/\sqrt{at_p}<0{,}1$, функция $K_1\left(r_c\sqrt{1/(at_p)}\right)\approx(1/r_c)\sqrt{at_p}$ и формула (13.15) принимает вид

$$\tilde{S}_r=\frac{Q_{скв}}{2\pi T}K_0\left(r\sqrt{\frac{1}{at_p}}\right).\qquad (13.16)$$

С помощью таблиц обращения [24] от решения в изображениях переходим к оригиналу функции

$$S_{r,t}=\frac{Q_{скв}}{4\pi T}\int_0^t\frac{\exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right)}{t-\tau}d\tau\qquad \text{при}\qquad u=\frac{r^2}{4at}\qquad (13.17)$$

и получаем известное в теории водопритока к скважинам фундаментальное решение [6, 8, 34, 54].

13.3. УРАВНЕНИЯ РАДИАЛЬНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ (ВОДОПРИТОК К ОДИНОЧНОЙ СКВАЖИНЕ)

Вывод основных уравнений. Получим решение для напорного пласта, использовав гидравлический метод и предпосылку Дюпюи по (4.29), которая строго выполняется для напорных вод (рис. 13.6) и не строго — для грунтовых (см. рис. 4.1). Воспользуемся уравне-

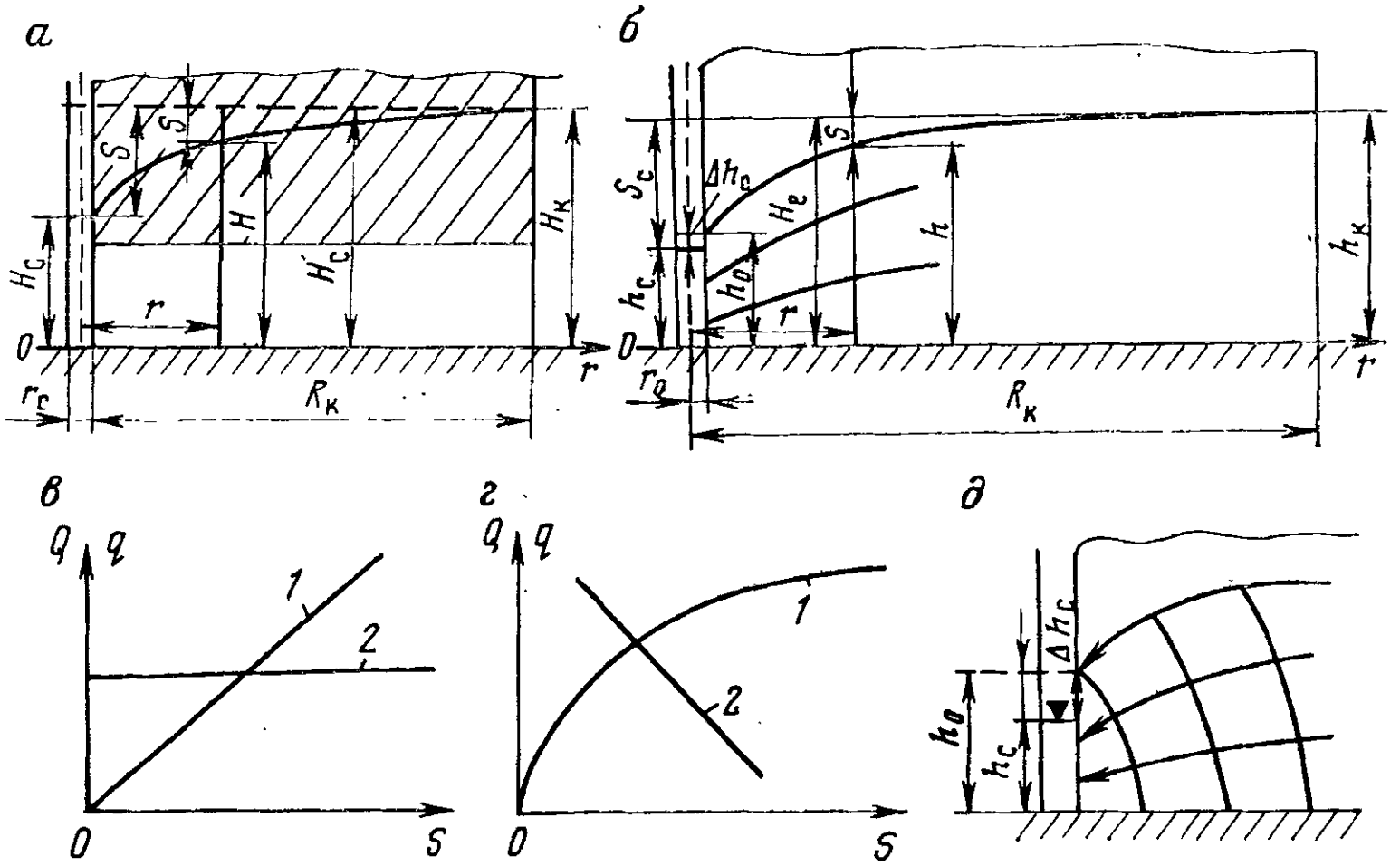


Рис. 13.6. Расчетные схемы стационарной фильтрации при откачке из совершенной скважиины в круговом напорном (*а*) и грунтовом (*б*) пластах, а также теоретические кривые (*в*, *г*) зависимостей $Q = f(S)$ (*1*) и $q = f(S)$ (*2*) и схема возникиовения гидродинамического скачка (*д*)

нием Дарси (4.8) и, заменим в нем H на S и разделив переменные, получим

$$\frac{Q_{скв}}{2\pi T}\frac{dr}{r} = -\,dS. \tag{13.18}$$

Взяв неопределенный интеграл от (13.18), получим фундаментальное решение (13.9). Для нахождения постоянной C используем граничное условие на скважине $r = r_c$, $S = S_c$ и, подставив (4.42) в (13.9), после преобразования найдем уравнение, описывающее депрессионную кривую

$$S = S_c - \frac{Q_{скв}}{2\pi T}\ln\frac{r}{r_c}. \tag{13.19}$$

Зависимость S от r показывает, что градиент потока быстро уменьшается с удалением от скважины. Это видно, если продифференцировать уравнение (13.19) по r:

$$\frac{dS}{dr} = -\frac{Q_{скв}}{2\pi T}\frac{1}{r}. \tag{13.20}$$

Для определения расхода на всей длине потока интегрируем зависимость (13.18) в пределах $r = r_c$, $S = S_c$, $r = R_к$, $S_к = 0$ и после

преобразований приходим к известной формуле, которую впервые получил Ж. Дюпюи:

$$Q_{\text{скв}} = \frac{2\pi T S_c}{\ln (R_к/r_c)} = \frac{2\pi T (H_к - H_c)}{\ln (R_к/r_c)}, \tag{13.21}$$

где $R_к$ — расстояние до контура питания, т. е. границы, где задан постоянный уровень $H_к = \text{const}$; H_c — динамический уровень воды в скважине (см. рис. 13.6, *а*).

Уравнения для грунтовых вод находим, используя напорную функцию U по формуле (13.7)

$$2m(H_к - H_c) = h_к^2 - h_c^2 \quad \text{и} \quad 2mS = S(2h_e - S),$$

и, заменяя в выражениях (13.21) и (13.19) отметку уровня H на h, получим формулы для определения водопритока к скважине

$$Q_{\text{скв}} = \frac{\pi k (2h_к - S_c) S_c}{\ln (R_к/r_c)} = \frac{\pi k (h_к^2 - h_e^2)}{\ln (R_к/r_c)} \tag{13.22}$$

и построения депрессионной кривой грунтового потока

$$h^2 = h_c^2 + \frac{Q_{\text{скв}}}{\pi k} \ln \frac{r}{r_c}. \tag{13.23}$$

В этом случае поток имеет горизонтальный водоупор (см. рис. 13.6, *б*). Если значения S в грунтовом потоке не превышают (0,2—0,3) h_e (где h_e — начальная мощность потока), то вместо зависимостей (13.22) и (13.23) в расчетах можно использовать формулы (13.21) и (13.19), полученные для напорных вод с негоризонтальным водоупором. Так можно поступать при расчетах водопритока в грунтовый поток.

З а д а ч и: 1. Сформулируйте математическую постановку решения задачи для грунтового потока гидравлическим методом с использованием уравнения Дарси (4.8) и получите формулы (13.22) и (13.23).

2. Проводится кустовая откачка из центральной скважины с дебитом $Q_{\text{скв}}$ и понижением S_c. В двух наблюдательных скважинах, находящихся соответственно на расстояниях r_1 и r_2 от центральной, измерены понижения S_1 и S_2. Получите уравнение расхода $Q_{\text{скв}}$ так, чтобы в нем использовались только значения этих понижений.

Предпосылка Дюпюи о потоянстве v_r по мощности для реального грунтового потока вблизи совершенной скважины не выполняется, поток оказывается двухмерным, появляется так называемый гидродинамический скачок Δh_c или участок высачивания, в результате чего уровень воды h_c внутри скважины оказывается меньше, чем уровень h_0 на ее внешней стенке (см. рис. 13.6, *б*, *д*). Такое явление экспериментально установил А. Козени, а теоретическое объяснение его дал Г. Н. Каменский [19], который показал, что иначе между боковой поверхностью фильтра как линией напора и ближайшей к нему линией напора в потоке возникает область, где движение отсутствует, так как обе эти линии сходятся в одной точке вверху на фильтре.

И. А. Чарный [31] доказал, что при наличии Δh_c уравнение (13.22) является точным.

Кривые зависимости дебита скважины от понижения уровня воды. Из зависимости (13.21) видно, что в напорных водах расход и пони-

жение теоретически связаны прямолинейной зависимостью (см. рис. 13.6, *в*). Удельный дебит скважины находится из выражения

$$q_{\text{скв}} = \frac{Q_{\text{скв}}}{S_{\text{скв}}} = \frac{2\pi T}{\ln (R_{\text{к}}/r_{\text{с}})} \tag{13.24}$$

и от понижения не зависит. В реальных условиях такая зависимость часто нарушается появлением дополнительных сопротивлений в скважине, и зависимость $Q_{\text{скв}}$ от $S_{\text{скв}}$ описывается кривой второго порядка, которая находится экспериментально по данным опытных откачек, выполняемых как минимум для трех ступеней понижения $S_{\text{скв}}$.

Для грунтовых вод, как видно из уравнения (13.22), расход связан с понижением квадратичной зависимостью, а удельный дебит уменьшается с увеличением понижения (см. рис. 13.6, *г*).

$$q_{\text{скв}} = \frac{\pi k (2h_{\text{к}} - S_{\text{с}})}{\ln (R_{\text{к}}/r_{\text{с}})}.$$

13.4. ВЫВОД ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ РАДИАЛЬНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Получим уравнение водопритока к совершенной скважине в неограниченном пласте (см. рис. 13.1, *а*). Возьмем фундаментальное решение (13.10), которое описывает действие линейного стока $l = m$ с постоянной интенсивностью q в интервале от $\tau = 0$ до $\tau = t$ (где t — время его работы). Введем новую переменную $u = r^2/[4a(t-\tau)]$, примем для нее пределы интегрирования при $\tau = 0$ $u = r^2/(4at)$ и при $\tau = t$ $u = \infty$ и перепишем выражение (13.10), имея в виду, что

$$d\tau = \frac{t-\tau}{a}\, du,$$

$$S_{r,t} = \frac{q}{4\pi am} \int_{r^2/(4a.\ t)}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du. \tag{13.25}$$

Полученная зависимость не пригодна для расчетов водопритока, так как в ней используется q, а не расход скважины. Найдем связь между q и $Q_{\text{скв}}$ из граничного условия (4.42). Для этого продифференцируем (13.25) и полученный результат подставим в (4.42), После преобразования получим

$$Q_{\text{скв}} = -2\pi km r \left.\frac{\partial S}{\partial r}\right|_{r=r_{\text{с}}} \cong \frac{kq}{a}. \tag{13.26}$$

Приближенность решения объясняется тем, что в силу малости $r_{\text{с}}$ принято $e^{-r^2/(4at)} \approx 1$. После подстановки (13.26) в (13.25) приходим к известному решению Тейса (13.17) в виде

$$S_{r,t} = \frac{Q_{\text{скв}}}{4\pi T} \int_{r^2/(4at)}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = \frac{Q_{\text{скв}}}{4\pi T} W(u). \tag{13.27}$$

Функция $W(u) = -E_i(-u)$ называется интегральной показательной функцией, а переменная u определяется по формуле

$$u = r^2/(4at). \tag{13.28}$$

В работах зарубежных авторов функцию $W(u)$ называют *well-function* (функция скважины) [8, 34, 50]. Она представляет собой быстро сходящийся ряд при всех значениях u, полученных по формуле (13.28), когда $0 < u < \infty$. С достаточной для практики погрешностью (в определении величины S — меньше 5 %), функция $-E_i(-u)$ может быть заменена с момента времени $t \geqslant (2{,}5)\, r^2/a$ выражением

$$-E_i(-u) \approx \ln \frac{1}{u} - 0{,}577 = \ln \frac{2{,}25at}{r^2},$$

если аргумент u функции E_i или малый параметр Фурье f_0 удовлетворяют условию

$$u = r^2/(4at) \leqslant 0{,}1; \tag{13.29}$$

$$f_0 \geqslant 2{,}5 \tag{13.29а}$$

в этом случае формула (13.27) принимает вид

$$S_{r,t} = \frac{Q_{\text{скв}}}{4\pi T} \ln \frac{2{,}25at}{r^2} \tag{13.30}$$

и становится внешне аналогичной формуле Дюпюи (13.21), если в уравнении (13.30) числитель 2,25 at заменить приведенным радиусом влияния $R_{\text{пр}}$ по зависимости

$$R_{\text{пр}} = 1{,}5\sqrt{at}: \tag{13.31}$$

$$S_{r,t} = \frac{Q_{\text{скв}}}{2\pi T} \ln \frac{R_{\text{пр}}}{r}. \tag{13.32}$$

Таким образом мы получили условия (13.29), (13.29а) и (13.31), которые используют в качестве критериев (см. гл. 5) при оценке эффективных размеров области фильтрации и сведении нестационарной фильтрации к квазистационарной. Формулу для определения расхода потока в любом сечении получим, если продифференцируем (13.27) по r и подставим полученное выражение в уравнение (4.8), заменив в нем H на S. После преобразований имеем:

$$Q_{r,t} = Q_{\text{скв}} e^{-r^2/(4at)}. \tag{13.33}$$

Как видно, расход потока быстро уменьшается во времени и стремится к расходу скважины.

Применение формул (13.27) и (13.30) требует оценки погрешности в определении $S_{\text{скв}}$ при замене стока $r_0 = 0$ на скважину $r_0 = r_c$. Как видно из формулы (13.33), такая замена справедлива по критерию [53]

$$f_0 \geqslant \frac{at}{r_c^2} \geqslant 10,$$

согласно которому при $r_c = 0{,}1$—$0{,}8$ м с первых же моментов работы таких скважин погрешность в расчетах $S_{скв}$ меньше 5 %.

Решение задач о нестационарном притоке $Q_{скв}$ подземных вод к скважине, работающей с постоянным уровнем $S_0 = \text{const}$ (см., рис. 13.1, *б*), приведено в работе [53], где показано, что при $f_0 > 100$ решение близко к зависимости (13.30)

$$Q_{скв} = 4\pi T S_0 G(f_0) \approx \frac{8\pi T S_0}{\ln 2{,}25 f_0}. \qquad (13.34)$$

13.5. КВАЗИСТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Формула (13.30) характеризует квазистационарный режим фильтрации, который наступает, если соблюдается критерий (13.29) или (13.29а), и имеет ряд особенностей, сближающих его со стационарным режимом, что видно из сопоставления формул (13.32) и (13.21), если последнюю записать относительно $S_{скв}$.

Найдем в пределах зоны квазистационарного режима скорость снижения уровня и градиент потока, для чего продифференцируем (13.30) в первом случае по t

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{Q_{скв}}{4\pi T} \frac{1}{t}, \qquad (13.35)$$

а во втором по r [см. уравнение (13.20)].

Анализ зависимостей показывает, что скорость изменения уровня не зависит от расстояния, и, следовательно, во всех точках зоны квазистационарного режима она одинакова, а градиент потока не зависит от времени так же, как для условий стационарной фильтрации. При этом разность понижений в двух точках депрессионной кривой постоянна, что видно из уравнения

$$S_1 - S_2 = \frac{Q_{скв}}{4\pi T}\left(\ln \frac{2{,}25at}{r_1^2} - \ln \frac{2{,}25at}{r_2^2}\right) = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

которое полностью совпадает с уравнением Дюпюи (13.19).

Следствием этих закономерностей является то, что при откачке депрессионная кривая перемещается во времени параллельно самой себе, поэтому период квазистационарной фильтрации называют упорядоченным, или регулярным, режимом. По этому свойству на опытных кривых, полученных в процессе откачки, выделяют зону квазистационарной фильтрации. Эта зона со временем расширяется, и из уравнения (13.29) ее радиус (как сферы взаимодействия) равен $r_{кв} = 0{,}63\sqrt{at}$, что составляет примерно половину $R_{пр}$ по (13.31). Формирование этих зон показано на рис. 13.1 и 13.2.

Следует отметить, что в пределах зоны $r_{кв}$ согласно (13.33) формируется около 10 % расхода, отбираемого скважиной, остальную часть она получает из внешней области, где фильтрация отвечает зависимости (13.27). Если радиус зоны равен $R_{пр}$ [см. формулу (13.31)], то в ее пределах формируется 50 % расхода скважины. Решения для

различных законов изменения дебита скважины рассматриваются в работе [6].

Теоретически по формулам (13.27) и (13.30), влияние откачки распространяется до бесконечности, так как не учитываются инерционные силы и пласт считается абсолютно изолированным, не имеющим вертикального водообмена. В действительности радиус влияния откачки конечен. В. Н. Щелкачев [53] ввел понятие «условный радиус влияния» $R_{\text{ус}}$ откачки, которым оценивается такое расстояние от скважины, дальше которого в данный момент времени эффект откачки практически не сказывается (при заданном «пороге чувствительности» величины S или Q). Условный радиус влияния не тождествен $R_{\text{пр}}$ и $r_{\text{кв}}$.

13.6. УРАВНЕНИЯ ПЛАНОВО-РАДИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ (СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СКВАЖИН)

Вывод уравнений для стационарной фильтрации. При построении расчетных зависимостей используют принцип суперпозиции, а суммарное понижение S определяют по зависимости (13.2). При этом принимают скользящую систему координат и ее начало располагают последовательно на каждой из взаимодействующих скважин. В качестве S_i рассматривают решение, полученное для одиночной скважины в соответствующих гидрогеологических условиях. Впервые такой прием использовал Ф. Форхгеймер [50] в задаче о стационарном притоке воды к системе n взаимодействующих совершенных скважин в круговом открытом напорном пласте (рис. 13.7, *а*). Приняв за исходное решение (13.21) и последовательно определяя S_i, которое создано в точке A под влиянием откачки из скважин $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, получим

$$S_A = \frac{Q_1}{2\pi T} \ln \frac{R_{\text{к. 1}}}{r_{A-1}} + \frac{Q_2}{2\pi T} \ln \frac{R_{\text{к, 2}}}{r_{A-2}} + \cdots + \frac{Q_n}{2\pi T} \ln \frac{R_{\text{к, }n}}{r_{A-n}}, \tag{13.36}$$

где $R_{\text{к,1}}, R_{\text{к,2}}, \ldots, R_{\text{к,}n}$ — расстояния до контура питания от каждой из n скважин; $r_{A-1}, r_{A-2}, \ldots, r_{A-n}$ — расстояния от каждой из n скважин до точки A.

Принимая расстояния между скважинами существенно меньше радиусов влияния $\sigma \ll R_{\text{к, }i}$ и считая, что $R_{\text{к,1}} \approx R_{\text{к,2}} \approx \ldots \approx R_{\text{к,}n} = R_{\text{к}}$, можно вместо (13.36) записать

$$S_A = \frac{Q_{\text{сум}}}{2\pi T} \sum_1^n \alpha_i \ln \frac{R_{\text{к}}}{r_i} \tag{13.37}$$

при

$$\alpha_i = \frac{Q_i}{Q_{\text{сум}}}, \qquad Q_{\text{сум}} = \sum_1^n Q_i, \tag{13.37а}$$

где α_1 — коэффициент дебита взаимодействующей скважины, показывающий ее долю в суммарном расходе всех скважин.

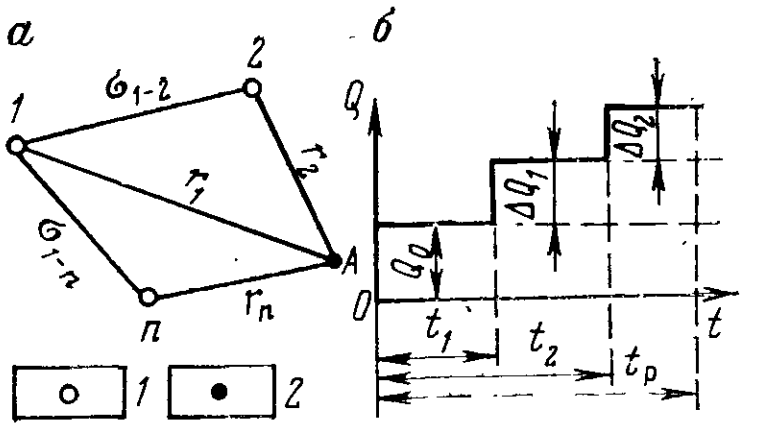


Рис. 13.7. Схемы к расчетам n взаимодействующих скважин:

а — расположение n взаимодействующих скважин; *б* — ступенчатое изменение дебита скважин по методу сложения течений. *1* — скважина; *2* — расчетная точка

Если $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q$, то из уравнения (13.37а) $\alpha = 1/n$, и тогда вместо зависимости (13.37) имеем:

$$S_A = \frac{Q_{\text{сум}}}{2\pi T}\left(\ln R - \frac{1}{n}\ln r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n\right). \qquad (13.38)$$

Понижение в любой из взаимодействующих скважин можно определить, если представить, что точка A находится на фильтре этой скважины, и рассмотреть последовательно те понижения, которые формируются в этой скважине под влиянием откачки из самой скважины и под действием на нее других скважин. Формула (13.37) примет вид

$$S_i = S_i^0 + \sum_1^{n-1} S_i^* = \frac{Q_i^0}{2\pi T}\ln\frac{R}{r_c^0} + \frac{Q_{\text{сум}}^*}{2\pi T}\sum_1^{n-1}\alpha_i \ln\frac{R}{r_i^*}, \qquad (13.39)$$

где S_i^0 — понижение, связанное с действием самой скважины с радиусом r_i^0 и дебитом Q_i^0; S_i^* — понижения, формирующиеся под влиянием других $n-1$ взаимодействующих скважин, расположенных на расстояниях r_i^* от рассматриваемой скважины и имеющих суммарный дебит $Q_{\text{сум}}^* = Q_{\text{сум}} - Q_i^0$.

Вывод уравнений для нестационарной фильтрации. При построении расчетных зависимостей используют аналогичный прием и определяют суммарное понижение, формирующееся в любой точке под влиянием работы системы взаимодействующих скважин по формуле (13.7), используя метод суперпозиции. Для системы взаимодействующих скважин (см. рис. 13.7, *а*) в качестве исходных используют уравнения (13.27) и (13.30) или (13.32). Если взаимодействующие скважины вводятся в работу одновременно, то общее понижение в точке A, вызванное их совместным действием, определится выражением

$$S_A = \frac{Q_1}{4\pi T}W(u_1) + \frac{Q_2}{4\pi T}W(u_2) + \ldots + \frac{Q_n}{4\pi T}W(u_n); \qquad (13.40)$$

$$u_1 = \frac{r_1^2}{4at}, \quad u_2 = \frac{r_2^2}{4at}, \ldots, u_n = \frac{r_n^2}{4at}, \qquad (13.40а)$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — расстояние от расчетной точки A до каждой из взаимодействующих скважин.

Наступление для всех скважин квазистационарной фильтрации определяется по условию

$$\frac{r_{max}^2}{4at} \leqslant 0{,}1, \tag{13.41}$$

где r_{max} — расстояние максимально удаленной от точки A скважины. В этом случае формула (13.40) с учетом (13.37а) принимает вид

$$S_A = \frac{Q_{сум}}{4\pi T} \sum_1^n \alpha_i \ln \frac{2{,}25at}{r^2} \tag{13.42}$$

З а д а ч а. Записать, используя выражение (13.42), формулу для определения понижения в одной из взаимодействующих скважин при условии одинаковых дебитов и переписать ее по типу (13.39). Все формулы записать для грунтовых вод, используя напорную функцию (13.9).

Для взаимодействующих скважин, работающих с постоянным понижением, нельзя получить расчетные зависимости методом суперпозиции, потому что во всех скважинах под влиянием работы соседних уровень будет непрерывно снижаться. Следовательно, нарушается граничное условие.

Метод «большого колодца». Для удобства расчетов при большом числе взаимодействующих скважин Ф. Форхгеймер [50] предложил заменить их гидродинамическое действие некоторой условной схемой, в которой скважины расположены по кругу радиусом R_0. Они образуют как бы «большой колодец», работающий с суммарным дебитом всех взаимодействующих скважин. Понижение в центре такого «колодца» определяют по формуле (13.38). При $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = R_0$ и она принимает вид

$$S_0 = \frac{Q_{сум}}{2\pi T} \ln \frac{R_к}{R_0}. \tag{13.43}$$

Для реальных систем скважин обычно находят площадь F их расположения (по карте, плану), а затем, вычислив $R_0 = \sqrt{F/\pi}$, по формуле (13.43) определяют S_0. В работе [53] показано, что уже на расстоянии $r \geqslant 2R_0$ от центра «большого колодца» понижения, рассчитанные по уравнениям (13.43) и (13.38), практически не различаются.

Аналогичный прием может быть использован и при исследовании нестационарной фильтрации. Рассмотрим n взаимодействующих скважин, работающих с одинаковыми дебитами в зоне квазистационарной фильтрации. Понижение в точке A, вызванное их влиянием, определяется по формуле (13.42), которая принимает вид

$$S_A = \frac{Q_{сум}}{4\pi T}\left(\ln 2{,}25at - \frac{1}{n} \ln r_1^2 r_2^2 \ldots r_n^2\right). \tag{13.44}$$

Вводя приведенный радиус водозабора

$$\rho_n = \sqrt[n]{r_1^2 r_2^2 \ldots r_n^2},$$

перепишем формулу (13.44) иначе

$$S_A = \frac{Q_{\text{сум}}}{4\pi T} \ln \frac{2{,}25at}{\rho_S}, \qquad (13.45)$$

и, принимая $\rho_S = R_0^2$, а $R_{\text{пр}}$ — по (13.31), получим формулу, аналогичную (13.43). Зависимости для неравнодебитных скважин приведены в работе [6].

13.7. УРАВНЕНИЯ ПЛАНОВО-РАДИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПЛАСТАХ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЦАМИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДОВ

Влияние прямолинейных границ с граничными условиями первого и второго родов на гидродинамику потока учитывается методами суперпозиции и *зеркальных отображений*, последний был предложен Ф. Форхгеймером [50]. Этот прием позволяет эквивалентно заменить гидродинамическое действие каждой границы действием фиктивных (зеркально отображенных относительно этой границы) скважин и свести сложную расчетную схему к более простой схеме бесконечного пласта, в котором работает система взаимодействующих реальных и фиктивных скважин. Режим работы последних определяется характером граничных условий, заданных на прямолинейных границах, и выбирается таким, чтобы сохранилась неизменной гидродинамическая сетка движения, отвечающая исходной реальной обстановке.

Вывод уравнений фильтрации для полуограниченных пластов с границей первого рода (река). Если скважина работает в полуограниченном пласте на расстоянии L от прямолинейной границы постоянного напора ($H_{\text{р}} = \text{const}$ или $S_{\text{р}} = 0$), то ее действие учитывается заданием за контуром на расстоянии L от него фиктивной нагнетательной скважины, представляющей собой зеркальное отображение действующей (рис. 13.8). Тем самым схема полуограниченного пласта заменяется расчетной схемой бесконечного пласта, в котором работают две скважины с одинаковым дебитом: одна в режиме откачки при S_0, другая в режиме нагнетания при минус S_0 (см. рис. 13.8, *в*). Нагнетательная скважина гидродинамически играет «питающую» роль в формировании водопритока к реальной скважине. Для такой расчетной схемы понижение в любой точке пласта определяется методом суперпозиции согласно уравнению (13.2) с учетом знака при величине S_i: знак плюс отвечает откачке, минус — нагнетанию.

Исходным уравнением является (13.27), и для полученной расчетной схемы (см. рис. 13.8, *в*) имеем:

$$S_A = \frac{Q}{4\pi T} [W(u_1) - W(u_2)] \qquad (13.46)$$

при

$$u_1 = \frac{r^2}{4at}, \qquad u_2 = \frac{\rho^2}{4at}, \qquad (13.46а)$$

где r и ρ — расстояния соответственно от реальной и отображенной скважин до точки A.

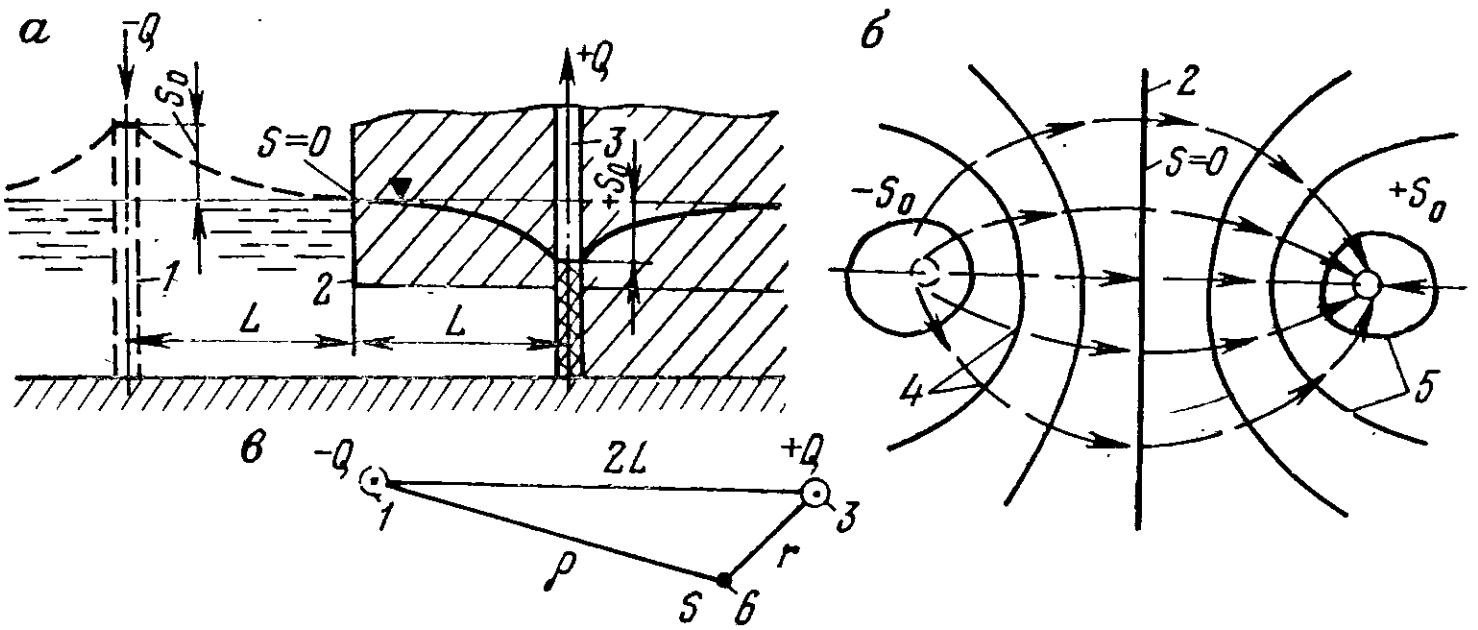


Рис. 13.8. Скважина у прямолинейной границы постоянного напора (у реки): *а* — разрез через скважиину нормальио к границе; *б* — схематическая гидродииамическая сетка движения в плаие; *в* — расчетиая схема. *1* — отображениая скважиина; *2* — урез реки (граница постояиного напора); *3* — реальная скважиина; *4* — лииия тока; *5* — линия напора; *6* — расчетиая точка

На контуре $r = \rho$. Подставляя это условие в выражение (13.46а), получим $u_1 = u_2$, и тогда по формуле (13.46) $S = 0$, что соответствует заданному граничному условию. При определении понижения в скважине для аргументов u_1 и u_2 следует в формуле (13.46а) принять $r = r_c$ и $\rho = 2L$. Если откачка длительная и в зоне действия скважин устанавливается квазистационарный режим, наступление которого проверяется условием

$$\rho^2/(4at) \leqslant 0{,}1 \qquad \text{или} \qquad (2L)^2/(4at) \leqslant 0{,}1, \tag{13.47}$$

то вместо (13.46) получим

$$S_A = \frac{Q}{2\pi T} \ln\left(\frac{\rho}{r}\right), \tag{13.48}$$

а для определения понижения в скважине

$$S_c = \frac{Q}{2\pi T} \ln\frac{2L}{r_c}. \tag{13.49}$$

Эта формула впервые была получена Ф. Форхгеймером [50]. В формулы (13.48) и (13.49) время не входит, что свидетельствует о стационарной фильтрации, следовательно, время ее наступления $t_р$ определяется по условию (13.47), что отвечает критерию схематизации (5.8).

Если река как граница несовершенна, то влияние зоны деформации потока на приток к скважине можно учесть, сдвинув урез реки на величину $\Delta L_{ид}$, и тогда понижение в скважине при стационарном режиме равно

$$S_c = \frac{Q}{2\pi T} \ln\frac{2(L + \Delta L_{ид})}{r_c}.$$

Если вблизи контура расположено несколько взаимодействующих скважин, то для получения расчетной зависимости производят их зеркальное отображение относительно этого контура и заменяют ре-

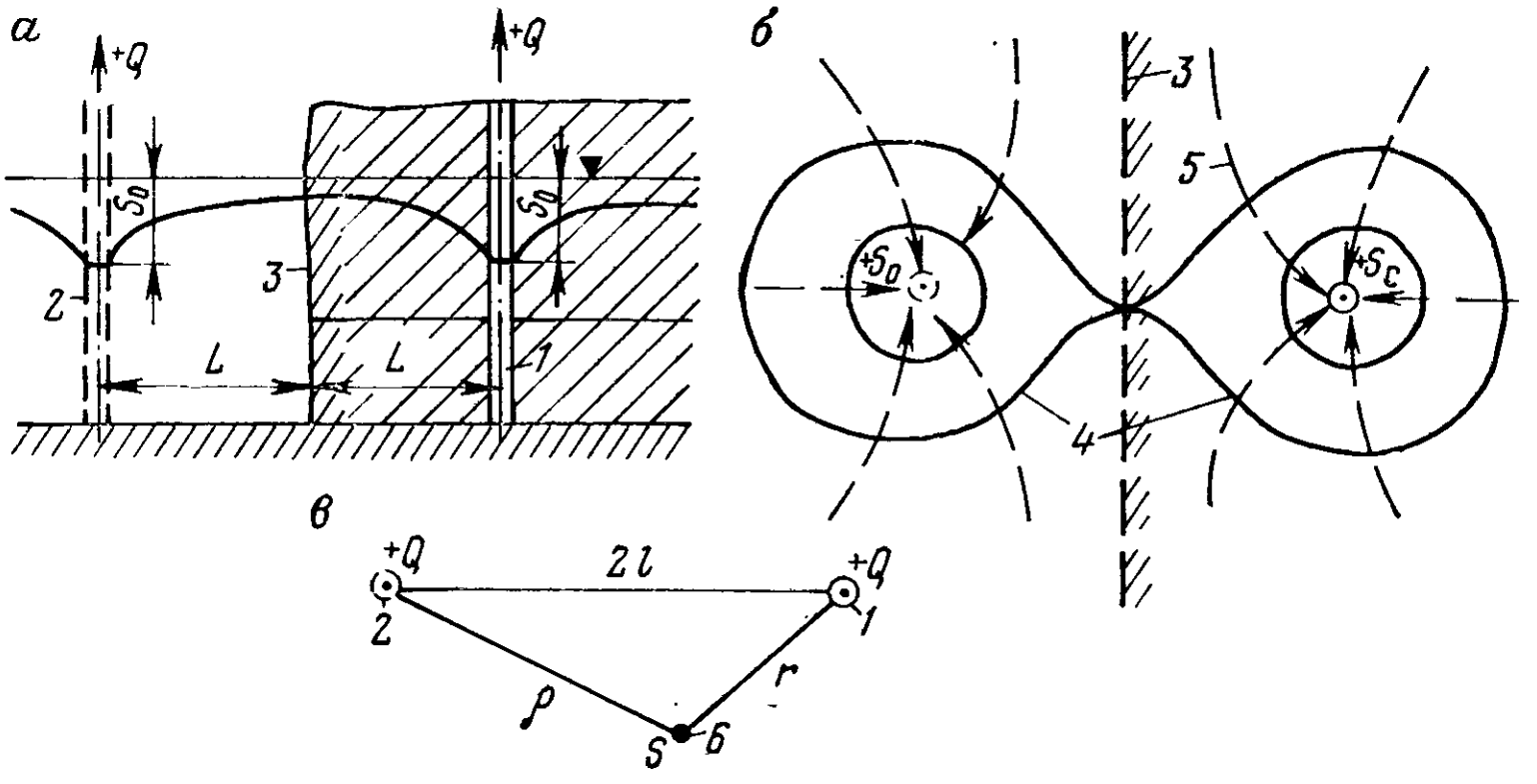


Рис. 13.9. Скважина у прямолинейного непроницаемого контура:

а — разрез через скважнну нормально к граннце; *б* — схематическая гидродинамнческая сетка движения в плане; *в* — расчетная схема. *1*, *2* — соответственно реальная и отображенная скважины; *3* — непроницаемая граннца; *4* — лннин напора; *5* — линии тока; *6* — расчетная точка

альную схему расчетной, в которой в неограниченном пласте работает удвоенное число скважин, половина — в режиме откачки, половина — в режиме нагнетания.

Задача. Получите уравнения для определения понижений в произвольной точке пласта и в одной из трех взаимодействующих скважин, расположенных в виде линейного ряда на расстоянии L от реки при расстоянии между скважинами σ.

Вывод уравнений фильтрации для полуограниченного пласта с границей второго рода (непроницаемая граница). Если скважина работает на расстоянии L от прямолинейной непроницаемой границы (условие второго рода $Q = 0$), то ее гидродинамическое действие на приток воды к реальной скважине учитывают отображением относительно этой границы фиктивной скважины, работающей с тем же дебитом в ержиме откачки (рис. 13.9, *а*, *б*). Понижение в любой точке пла́ста(см. рис. 13.9, *в*) находится из выражения

$$S_A = \frac{Q}{4\pi T}[W(u_1) + W(u_2)], \qquad (13.50)$$

где u_1 и u_2 определяются по формуле (13.46а).

Если справедливо условие (13.47), то вместо (13.50) имеем:

$$S_A = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{2{,}25at}{\rho r}. \qquad (13.51)$$

Понижение в скважине при $r = r_c$ и $\rho = 2L$ из выражения (13.51) определяется следующим уравнением:

$$S_{скв} = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{2{,}25at}{r_c \cdot 2L}. \qquad (13.52)$$

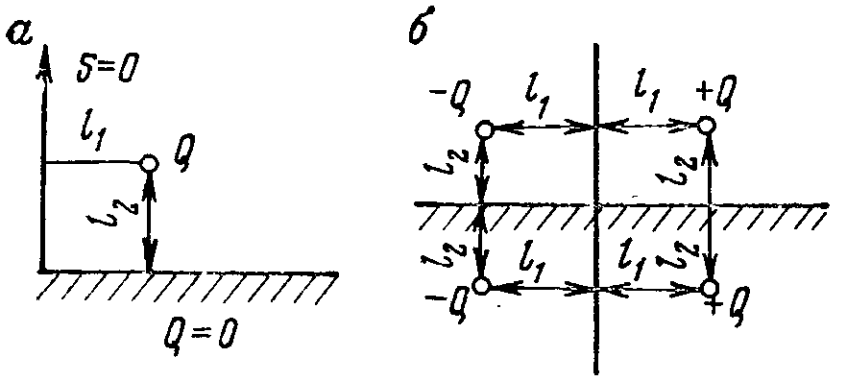


Рис. 13.10. Схемы для расчета понижений в пласте-квадранте:
а — реальная; *б* — расчетная

В этом случае, как видно из выражений (13.51) и (13.52), квазистационарная фильтрация в стационарную не переходит.

З а д а ч а. Составить расчетные зависимости для определения понижений в любой точке пласта и в одной из двух взаимодействующих скважин, находящихся на расстоянии L от непроницаемой границы и на расстоянии σ между собой.

Аналогичным образом строят расчетные зависимости при наличии нескольких границ. Рассмотрим пласт-квадрант, который имеет одну проницаемую и одну непроницаемую границы, находящиеся под углом 90° (рис. 13.10). В нем работает скважина с дебитом Q. Построим расчетную схему. Учтем наличие проницаемой границы и отобразим в левой части фиктивную скважину, работающую в режиме нагнетания. Чтобы гидродинамические условия ее работы отвечали работе реальной скважины, следует продлить налево непроницаемую границу и зеркальным отображением учесть ее влияние. Для вновь отображенной скважины следует справа вниз продлить проницаемую границу ($S = 0$) и относительно ее произвести последнее отображение. Таким образом, вместо одной скважины, работающий в пласте-квадранте, мы получили схему, в которой в неограниченном пласте работают в разных режимах четыре взаимодействующие скважины. Расчетную зависимость получают методом суперпозиции, используя уравнения (13.40) или (13.42).

13.8. ДИАГНОСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ ВОДОПРИТОКА К СКВАЖИНАМ

Выяснение общих закономерностей формирования понижений в скважинах при их работе в различных гидрогеологических условиях имеет важное диагностическое значение при интерпретации данных опытных и эксплуатационных откачек. Зная, какими особенностями характеризуются теоретические графики зависимости понижения уровня воды в скважине от времени для типовых гидрогеологических условий, т. е. для типовых расчетных схем, можно путем сопоставления опытных графиков с теоретическими (эталонными) уточнить, какую гидродинамическую структуру имел поток в процессе опыта и какой теоретической расчетной схеме отвечала фильтрация, и в соответствии с этим выбрать уравнения для гидродинамических расчетов.

При мониторинге за нарушенным режимом подземных вод в зоне действия водозаборов (аналогично описанному для плоскопараллель-

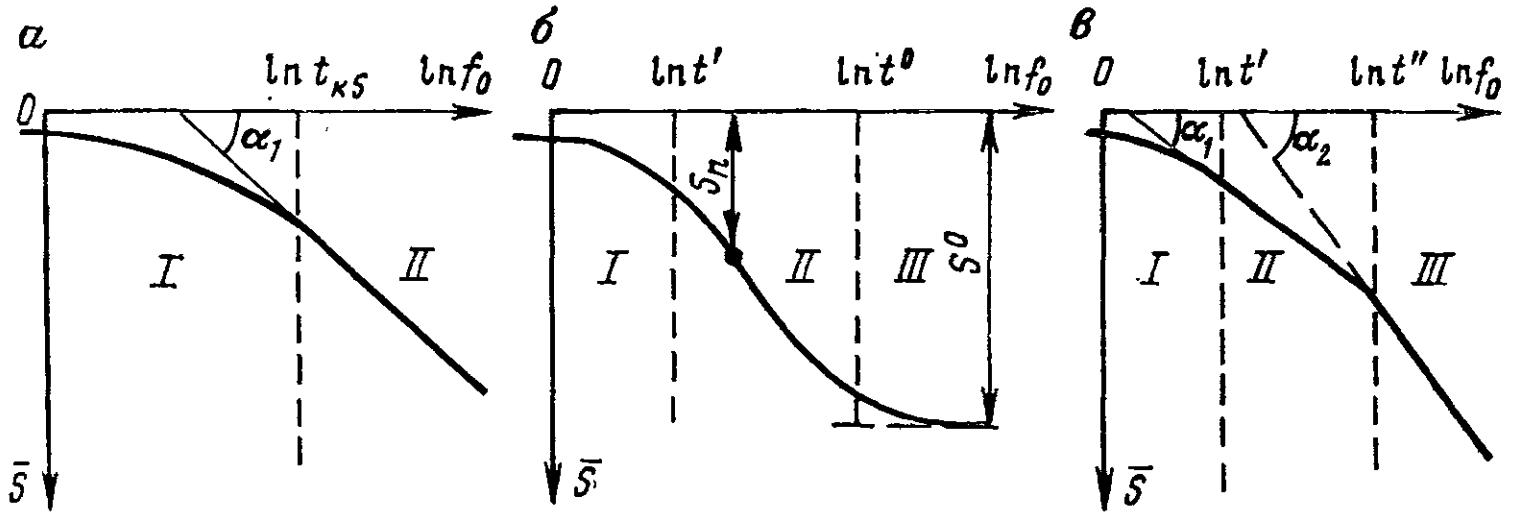


Рис. 13.11. Формирование депрессионных кривых при откачке из скважин (диагностические кривые):

а — изолированный неограниченный напорный пласт (I, II — зоны соответственно нестационарной и квазистационарной фильтрации); *б*, *в* — полуограниченный напорный пласт с граничным условием первого (*б*) и второго (*в*) родов (I, II, III — периоды формирования депрессионной поверхности)

ной фильтрации в разд. 10.6) можно диагностическим анализом выявить факторы, формирующие этот режим, и установить, правильно ли была принята расчетная схема и оценены условия формирования понижений. Для этого данные наблюдений представляются в безразмерных показателях $\bar{S} = 4\pi TS/Q$ от lnf_0 или lnF_0. Если все натурные относительные понижения $\bar{S}$ попадут на эталонный график, то фильтрация в этот период отвечает схеме эталонного графика.

Рассмотрим закономерности формирования понижений при откачке для трех эталонных схем: неограниченный и полуограниченные пласты с граничными условиями первого и второго родов. Используем графики, построенные в координатах $\bar{S}$ — ln f_0 на основе теоретических зависимостей (13.27), (13.30), (13.46), (13.48), (13.50) и (13.51). Такие диагностические графики показаны на рис. 13.11.

В формировании депрессионной кривой в неограниченном потоке выделяют два периода с нестационарной и квазистационарной фильтрацией (см. рис. 13.11, *а*). Первому на графике отвечает зона нелинейной связи $\bar{S}$ с lnf_0 по (13.27), второму (с момента ln f_0) — линейная связь по (13.30), при которой темп снижения уровня постоянен и характеризуется тангенсом угла α_1 наклона прямой к оси абсцисс (ln f_0). Как видно из уравнения (13.30), тангенс угла α_1 зависит от сомножителя, стоящего перед ln f_0, и связан с величиной водопроводимости пласта. Чем больше T, тем меньше значение тангенса, а следовательно, меньше зона наклона прямолинейного участка графика.

В полуограниченном пласте с граничным условием первого рода согласно уравнениям (13.46) и (13.48) можно выделить три периода формирования депрессионной поверхности (см. рис. 13.11, *б*): I — начальный, когда влияние границы не сказывается на скорости понижения уровня и закономерность понижения определяется выражениями (13.27) и (13.30); II — переходный, когда формирование определяется зависимостью (13.46); III — стационарный, в который согласно уравнению (13.48) понижение $\bar{S}_t = \bar{S}_0$.

В полуограниченном пласте с граничным условием второго рода тоже выделяют три периода в формировании депрессионной поверхности (см. рис. 13.11, *в*): I — начальный, в течение которого влияние границы отсутствует; II — переходный, в течение которого влияние границы нарастает согласно уравнению (13.50); III — интенсивного квазистационарного режима по (13.52), при котором снижение уровней происходит при удвоенном дебите скважины, что видно из сопоставления выражений (13.52) и (13.30). График $\bar{S} - \ln f_0$ в этот период прямолинеен и уклон его в два раза больше, чем у графика для такого же по фильтрационным свойствам неограниченного пласта.

Из анализа следует, что некоторое время графики $\bar{S} - \ln f_0$ похожи для всех трех расчетных схем и только со временем начинают различаться. Наиболее полно проявляются диагностические закономерности в изменении понижения во времени для скважины, из которой идет откачка, и в непосредственной близости от нее. На удалении понижение уровня начинается не сразу, и чем дальше расположена наблюдательная точка, тем позже оно начинается. Поэтому не все диагностические особенности успевают отразиться на графике $S - \ln f_0$ (см. рис. 13.1). Как показывает анализ (см. выше), в полуограниченных потоках их гидродинамическая структура в начале откачки может не совпадать с гидрогеологической структурой, установленной по данным бурения, геофизических и других работ. Они идентифицируются в процессе опыта (откачки) постепенно, по мере проявления действия граничных элементов ГГС. Следует отметить, что по форме опытных графиков $S - \ln f_0$ можно выявить наличие внутренних границ в пласте (резкий фациальный переход, разрывное нарушение), которые в процессе изысканий не были установлены, но влияют на динамику потока при откачке.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В каких условиях водоприток к скважине отвечает схеме планово-радиальной фильтрации?
2. Запишите уравнения водопритока к скважине в неограниченном напорном пласте для нестационарной и квазистационарной фильтрации.
3. По какому критерию можно определить время начала квазистационарной фильтрации и зону ее развития на заданный момент времени?
4. Что такое метод «большого колодца»? По какому критерию следует оценить время, начиная с которого для данного R_0 погрешности в оценке S_0 будут менее 5 %?
5. Назовите особенности квазистационарной фильтрации, подтвердите их математически.
6. Для решения каких задач, приведенных в гл. 13, использован метод суперпозиции? Почему его нельзя применять, если фильтрация к скважинам описывается нелинейным уравнением Буссинеска? Если скважины работают с граничным условием $S_{скв} = \text{const}$?
7. Каков гидродинамический смысл метода зеркальных отображений?
8. Назовите все допущения, которые приняты при выводе уравнений водопритока к скважине в условиях стационарной фильтрации, нестационарной фильтрации в неограниченном и полуограниченном пластах. Какие из них являются общими для всех расчетных схем? Появятся ли новые допущения, если в названных выше условиях будет работать несколько скважин?

9. В чем проявляется взаимодействие скважин? Как записать в общем вид принцип, на основе которого строятся все расчетные зависимости для системы взаимодействующих скважин?

10. Как определить, начиная с какого времени наступает стационарная фильтрация в зоне расположения нескольких скважин, работающих у реки?

11. С каким начальным условием решена задача нестационарного водопритока к скважине, если искомой функцией является $S_{r,t}$? Как перейти к функции $H_{r,t}$?

12. Какие изменения в гидродинамическую структуру потока, отвечающую функции Sr,t, вносит учет наличия естественного (бытового) потока?

13. Назовите диагностические признаки, которыми различаются процессы формирования понижения уровня воды в скважине и соответствующие им графики S—$\ln f_0$ для схем неограниченного и полуограниченного пластов с условиями на границе первого и второго родов.

14. Как оценить погрешность в расчете понижений, если для скважины, работающей в грунтовых водах, использовано уравнение, полученное для напорных вод?

15. В напорных пластах с одинаковыми фильтрационными свойствами работают с одинаковыми дебитами две скважины: одна — в условиях неограниченного потока, другая — в условиях полуограниченного потока с границей первого рода. В каком соотношении будут находиться формирующиеся в скважинах понижения на моменты времени 1 сут, 100 сут, 1 год и 5 лет, если расстояние до границ 200 м? Какая расчетная схема водоотбора наиболее благоприятна с точки зрения практики?

16. Какие из рассмотренных расчетных схем характерны для условий работы водозаборных скважин в потоках речных долин и артезианских бассейнов (использовать рисунки, приведенные в гл. 1)?

Глава 14

ПЛОСКОВЕРТИКАЛЬНАЯ, ПЛАНОВО-ПРОСТРАНСТВЕННАЯ И СЛОЖНЫЕ СЛУЧАИ ФИЛЬТРАЦИИ

14.1. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Пространственная фильтрация формируется в условиях водопритока к несовершенным скважинам, во многих случаях она схематизируется более простыми типами фильтрации. Так, если скважина вскрывает не более 10 % мощности пласта, то фильтрация схематизируется к одномерной в сферической системе координат, в остальных случаях (при симметричном притоке) — к плосковертикальной и рассматривается в цилиндрической системе координат; в условиях взаимосвязи нескольких пластов — к планово-пространственной, при которой в хорошо проницаемых пластах фильтрация плановая, а в разделяющих — вертикальная. При симметричном притоке к совершенной скважине в многопластовой толще такая фильтрация схематизируется к профильнорадиальной, а при наличии границ — остается планово-пространственной.

Расчетные схемы для несовершенных скважин определяются положением их фильтров в водоносном пласте относительно его водоупорной кровли или подошвы (см. рис. 5.7): в средней части пласта, если $c_1 = c$; вблизи водоупора при $c < 0{,}3\ m$, и примыкает к границе,

если $c = 0$. В гл. 5 приведена схематизация пластов по мощности в зависимости от эффективных размеров области действия фильтра. При соотношении $l/m \geqslant 0{,}9$ скважина считается совершенной; при $l/m \leqslant 0{,}1$ — несовершенной с коротким фильтром; при $0{,}9 > l/m \geqslant 0{,}1$ — несовершенной с длинным фильтром.

Стационарная симметричная фильтрация к несовершенной скважине с длинным фильтром (см. рис. 4.1, *и*) в цилиндрической системе координат описывается уравнением

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial S}{\partial r}\right) = 0, \tag{14.1}$$

а к несовершенной скважине с коротким фильтром (см. рис. 4.1, *е*) в сферической системе координат — уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial S}{\partial \rho}\right) = 0. \tag{14.2}$$

Фильтрация при гидравлической взаимосвязи пластов выражается дифференциальным уравнением (6.23), которое записывают относительно понижения уровня S, а величины $w'_{гл}$ и $w''_{гл}$ по формуле (6.24) представляют собой дополнительное питание, которое получает рассматриваемый водоносный горизонт в условиях эксплуатации по сравнению с естественными (бытовыми) условиями.

Для сферического и профильно-радиального потоков математическая модель для решения уравнений (14.1) и (14.2) строится с использованием точечных ($\rho \to 0$) или линейных ($r \to 0$, $l \leqslant m$) стоков, действующих в пространстве. Для точечного стока в неограниченном по мощности пласте, когда линии тока имеют радиальное направление, а поверхности равного напора представлены концентрическими сферами радиусом ρ с центром в стоке, фундаментальное решение в общем виде записывается как

$$S = \frac{Q}{4\pi k\rho} + C, \tag{14.3}$$

где C — постоянная интегрирования.

Строго говоря, приток воды к скважине неравномерен по высоте и усиливается на концевых участках фильтра. Математически учесть это сложно, и поэтому в модели линейных стоков последние имеют равномерную и постоянную интенсивность притока по длине фильтра в соответствии с выражением (13.8). Факторы, осложняющие приток воды к несовершенным скважинам (сопротивление фильтра, неоднородность пласта в призабойной зоне и т. п.), учитываются специальными приемами, о чем скажем ниже.

Теория притока воды к несовершенным скважинам исследована применительно к нефтяной гидродинамике М. Маскетом, Ф. Форхгеймером, М. Хантушем, А. Л. Хейном, применительно к гидрогеологическим задачам — Н. Н. Веригиным, С. К. Абрамовым, Ф. М. Бочевером и др.

14.2. УРАВНЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ (ВОДОПРИТОК К НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЕ С КОРОТКИМ ФИЛЬТРОМ)

Точечный сток (рис. 14.1, *а*, *б*) с расходом Q в неограниченном по мощности пласте создает одномерный сферический поток. Поместим сток в центр сферической системы координат. Скорость фильтрации v_ρ потока в любой точке зависит только от длины радиуса-вектора ρ сферы. При площади поперечного сечения потока $\omega = 4\pi\rho^2$ она определяется уравнением

$$v_\rho = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q}{4\pi\rho^2}. \tag{14.4}$$

Эта же скорость может быть выражена следующим образом:

$$v_\rho = -k\frac{dS}{d\rho}. \tag{14.5}$$

Приравняв выражения (14.4) и (14.5), разделив переменные и проинтегрировав полученное выражение, придем к фундаментальному решению (14.3). Находя C из условия, что при $\rho \to \infty$ $S_к = 0$ (где $S_к$ — понижение на удаленном контуре питания), окончательно имеем:

$$S = \frac{Q}{4\pi k\rho}. \tag{14.6}$$

В условиях нестационарной фильтрации решение (14.6) можно использовать с точностью 5—10 % в определении S, если

$$f_0 = \frac{at}{r^2} \leqslant 0{,}01—0{,}06.$$

З а д а ч а. Используя выражение (14.6), составить расчетную зависимость, учитывающую наличие непроницаемой границы вблизи стока (см. рис. 14.1, *б*), а также для случая, когда полусферическая скважина (или колодец) вскрывает дном напорный пласт.

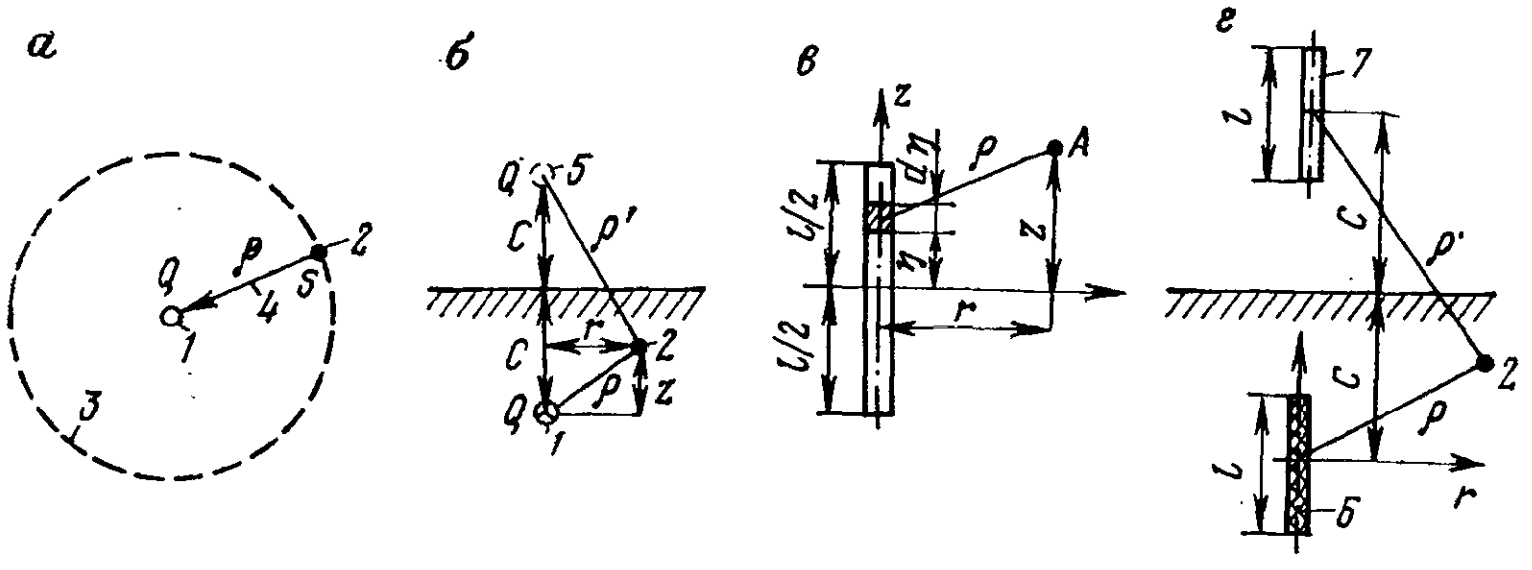


Рис. 14.1. Модели несовершенных скважин в неограниченном (*а*, *в*) и ограниченном (*б*, *г*) по мощности пластах:

Модели скважины: *а* — с коротким фильтром; *б* — то же, в полуограниченном пласте; *в* — с длинным фильтром в неограниченном пласте; *г* — то же, в полуограниченном пласте. *1* — точечный источник-сток; *2* — расчетная точка; *3* — проекция поверхности напора; *4* — линия тока; *5* — зеркальное отображение точечного источника-стока; *6* — линейный источник-сток у кровли; *7* — его зеркальное отображение

14.3. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОВЕРТИКАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ (ВОДОПРИТОК К НЕСОВЕРШЕННЫМ СКВАЖИНАМ)

Для исследования фильтрации к несовершенной скважине с дебитом Q и длинным фильтром l используется модель линейного стока (см. рис. 14.1, *б*), вдоль которого непрерывно располагаются точечные стоки, создающие равномерную интенсивность q по его длине l согласно уравнению (13.8). Рассмотрим стационарную фильтрацию. Выделим бесконечно малый элемент линейного стока $d\eta$ с текущей координатой η и представим его как точечный сток с расходом $qd\eta$. Используя формулу (14.6), получим выражение для определения понижения dS под действием этого стока

$$dS = \frac{qd\eta}{4\pi k\rho} \qquad \text{при} \qquad \rho = \sqrt{r^2 + (z - \eta)^2}. \tag{14.7}$$

Выражение для S получим интегрированием зависимости (14.7) в пределах от $\eta = -0{,}5\,l$ до $\eta = +0{,}5\,l$ при q, полученном по формуле (13.8),

$$S = \frac{Q}{4\pi kl}\left(\operatorname{arsh}\frac{z + 0{,}5l}{r} - \operatorname{arsh}\frac{r - 0{,}5l}{r}\right), \tag{14.8}$$

где arsh — функция, обратная гиперболическому синусу.

Уравнение (14.8) позволяет находить понижения в любой точке пласта с координатами r и z. Если принять $z = 0$, то формула (14.8) при учете, что функция arsh нечетная и приближенно $\operatorname{arsh} x \approx \ln 2x$, принимает вид

$$S = \frac{Q}{2\pi kl}\ln\frac{l}{r}. \tag{14.9}$$

Использовать формулы (14.8) и (14.9) для нахождения понижения в скважине нельзя, так как на расстоянии $r = r_c$ наблюдается несовпадение форм поверхностей равных напоров: для реальной скважины — это боковая поверхность цилиндра, а для линейного стока — эллипсоид вращения. Разработаны различные приемы их согласования. Для этого в выражение (14.9) в числитель логарифма вводится коэффициент α, учитывающий способ усреднения и изменяющийся от 0,66 до 0,74 (в среднем 0,7).

Если фильтр расположен вблизи водоупорных границ (см. рис. 14.1, *г*), то для нахождения расчетных зависимостей используется метод зеркальных отображений [6]. При исследовании нестационарной фильтрации к несовершенным скважинам получены весьма громоздкие решения, мало приспособленные для практического использования. На основе этих решений составлены таблицы и графики, позволяющие оценивать дополнительное понижение, которое формируется в скважине только вследствие ее гидродинамического несовершенства.

Различают два вида гидродинамического несовершенства скважин: по степени и по характеру вскрытия пласта. Первый определяется неполнотой вскрытия фильтром скважины мощности пласта, а второй — особенностями водоприемной части скважины. Оба вида несовершен.

ства вызывают дополнительное (по сравнению с совершенной скважиной) сопротивление $f_{нс}$ в потоке и соответственно в скважине, и вблизи нее формируется дополнительное понижение уровня

$$\Delta S_{нс} = \frac{Q}{2\pi T} f_{нс}.$$

Величина $f_{нс}$ имеет два слагаемых $f_{нс} = f_{нс,\,1} + f_{нс,\,2}$ (где $f_{нс,\,1}$ и $f_{нс,\,2}$ — сопротивления, определяемые неполнотой и характером вскрытия пласта). Величины $f_{нс}$ и $f_{нс,\,2}$ находятся по данным опытных работ, $f_{нс,\,1}$ может рассчитываться аналитически или определяться по специальным таблицам и графикам (см. ниже). Чем выше сопротивление фильтра и хуже проницаемость пород в призабойной зоне, тем резче проявляется деформация формы потока и больше величина $f_{нс}$. Наоборот, если скважина бесфильтровая и призабойная зона раскольматирована, то величина $f_{нс}$ будет небольшой. Зная величину $f_{нс}$, можно составлять расчетные зависимости, используя метод фильтрационных сопротивлений.

14.4. МЕТОД ФИЛЬТРАЦИОННЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Метод использует два принципа: аналогию между движением электрического тока в проводнике и фильтрацией воды в водоносном горизонте и локализацию сферы влияния возмущающего фактора. Первый позволяет представить фильтрацию в пласте как движение в некоторой гидравлической цепи, имеющей по аналогии с электрической гидравлическое сопротивление, зависящее от длины, площади сечения и строения цепи; к таким цепям могут быть применены все известные для электрических цепей действия. Второй в силу конечности сферы воздействия возмущающего фактора (это подтверждено анализом гидродинамических сеток движения; см. гл. 4, рис. 4.1) показывает, что зоны резкой деформации структуры потока, связанные с проявлением этого фактора, могут быть выделены фрагментированием из общего потока, а их действие на него представлено в виде дополнительной гидравлической цепи, сопротивление которой пропорционально степени деформации потока в этой зоне. Такой подход, называемый методом локальных сопротивлений, впервые был использован в нефтяной гидродинамике [4] и при изучении фильтрации в зоне плотин [3]. В динамике подземных вод он использовался на эмпирическом уровне для оценки зоны «активной» фильтрации [20]. В 1960-х гг. он получил теоретическое обоснование как метод фильтрационных сопротивлений [6, 31, 54].

Используя аналогию между фильтрацией воды в пласте (закон Дарси) и движением электрического тока в проводнике (закон Ома), можно записать выражение

$$\Phi = S/Q, \qquad (14.10)$$

оторое принято называть фильтрационным сопротивлением. Зависимость (14.10) показывает, что понижения пропор-

циональны фильтрационным сопротивлениям, и, в частности, понижения уровня воды, возникающие в зонах деформации потока, можно оценивать величиной пропорциональных им сопротивлений.

Используя выражение (14.10), можно расчетные зависимости для различных условий водопритока к совершенным скважинам записать одной формулой: $S = Q\Phi$, где Φ имеет разное математическое выражение в зависимости от рассматриваемой расчетной схемы. Так для стационарного водопритока из уравнения (13.21) имеем:

$$\Phi = \frac{1}{2\pi T} \ln \frac{R_к}{r_с},$$

для нестационарного из (13.27)

$$\Phi = \frac{1}{4\pi T} W(u),$$

для квазистационарной фильтрации из (13.30)

$$\Phi = \frac{1}{4\pi T} \ln \frac{2{,}25at}{r^2} \quad \text{и т. д.}$$

Однако Φ имеет размерность, и это неудобно, поэтому используют безразмерное гидравлическое сопротивление

$$f = \frac{2\pi TS}{Q} = 2\pi T\,\Phi,$$

и тогда любая расчетная зависимость может быть представлена в следующем виде:

$$S = \frac{Q}{2\pi T} f. \tag{14.11}$$

Действия с гидравлическими сопротивлениями подчиняются правилам (законам) Кирхгофа. В зависимости от общего направления движения потока и соотношения фрагментов, на которые он разбивается, частные сопротивления можно алгебраически складывать по правилам последовательных или параллельных цепей. Если сложный поток разделить на n фрагментов по направлению его движения и для каждого фрагмента определить сопротивление f_i, то общее сопротивление представляет собой их сумму:

$$f = \sum_1^n f_i, \tag{14.12}$$

и в соответствии с уравнением (14.12) общее понижение уровня по формуле (14.11) будет

$$S_{об} = \frac{Q}{2\pi T} \sum_1^n f_i. \tag{14.13}$$

Зависимость (14.13) показывает, что сопротивление f определяется строением и параметрами пласта, гидродинамической структурой

потока, видом фильтрации, формой и числом границ и действующими на них граничными условиями, а также числом и схемой расположения взаимодействующих скважин.

Фрагментируют поток на части так, чтобы для каждой были известны значения f_i, а их суммирование отвечало наиболее простым правилам расчета электрических цепей. Проиллюстрируем применение метода на примере, приведенном на рис. 14.2, где показан линейный ряд несовершенных водозаборных (дренажных) скважин, работающих вблизи реки, имеющей несовершенный врез. Если бы река была совершенной и вместо линейного ряда скважин работала с тем же суммарным дебитом совершенная горизонтальная дрена (галерея), то поток на всей длине L имел бы плоскопараллельную одномерную структуру (см. рис. 14.2, схемы *а*, *б* для центральной части участка). Обозначим сопротивление такого потока f_1. Так как вместо галереи работают дискретные скважины, то они создают зону деформации потока, показанную на схеме 14.2, *б*. Обозначим сопротивление, эквивалентное этой деформации, f_2. Вследствие того, что скважины несовершенны, возникает дополнительная деформация потока в разрезе, показанная на рис. 14.2, *а* вблизи фильтра. Обозначим пропорциональное ей сопротивление f_3, а последнее значение f_4 характеризует деформацию потока, обусловленную несовершенным врезом реки (см. рис. 14.2, *а*, *б*). По формуле (14.12) общее сопротивление потока (см. рис. 14.2, *в*) равно: $f_{об} = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$.

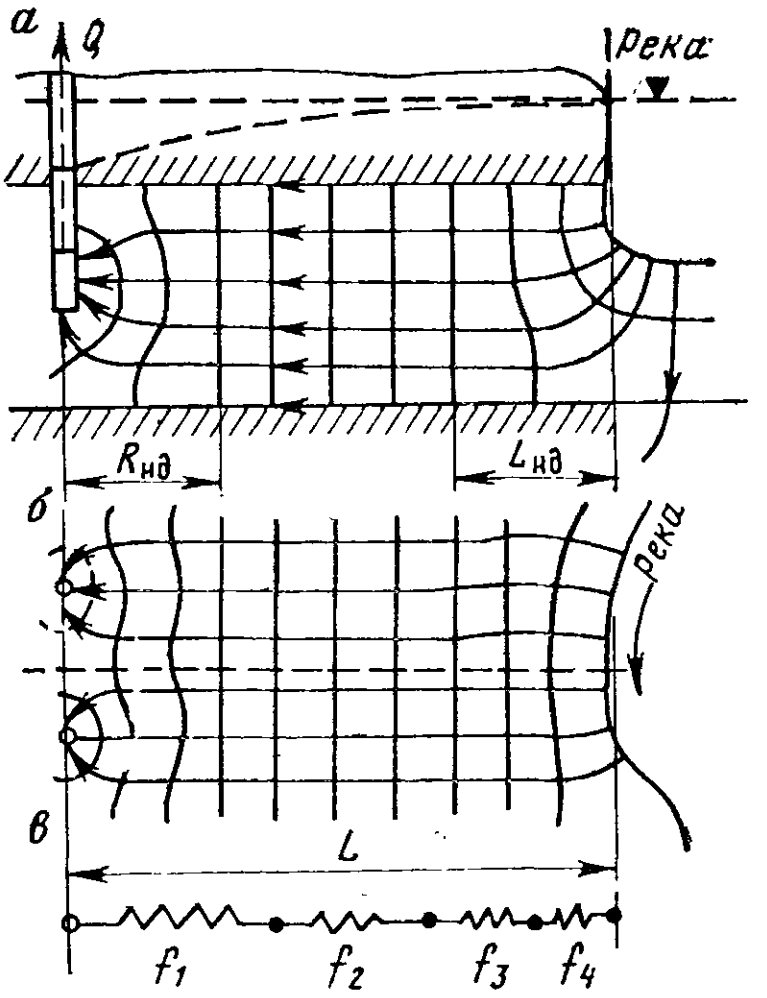


Рис. 14.2. Схема, иллюстрирующая метод фильтрационных сопротивлений.

Природная схема потока подземных вод: *а* — разрез; *б* — план; *в* — модельная схема фнльтрационных сопротивлений, аппроксимирующая реальный поток

Согласно уравнению (14.11) каждое сопротивление создает в пласте на линии расположения скважин свое понижение, и общее результирующее сопротивление согласно выражению (14.13) можно представить как

$$S_{об} = \sum_1^4 S_i = \frac{Q}{2\pi T} \sum_1^4 f_i,$$

где Q — суммарный дебит скважин.

14.5. ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ДЛЯ НЕСОВЕРШЕННЫХ СКВАЖИН ПО МЕТОДУ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Зона деформации потока вблизи несовершенной скважины распространяется на расстояние одной-полутора мощностей потока, (см. рис. 4.1, *л*). За пределами этой зоны поток носит планово-радиальный характер, и распределение напоров здесь аналогично действию совершенной скважины. Фрагментируя поток и используя метод фильтрационных сопротивлений, представим поток к несовершенной скважине, состоящим из двух потоков: первый аналогичен потоку, формирующемуся под действием совершенной скважины, и создает сопротивление $f_{сов}$; второй учитывает влияние зоны деформации, которое оценивается дополнительным сопротивлением $f_{нс} = f'_{нс} + f''_{нс}$. Сопротивление $f'_{нс}$ зависит от таких аргументов, как степень вскрытия пласта скважиной l/m, положение фильтра в пласте C/m, относительное положение расчетной точки в зоне деформации m/r_c (где r — расстояние точки от начала координат) и относительное время $\alpha = r_0^2/(4at)$. Показатель характера вскрытия пласта скважиной $f''_{нс}$ аналитически не оценен.

Величина понижения в несовершенной скважине согласно уравнению (14.13) определяется выражением

$$S = S_{сов} + \Delta S_{нс} = \frac{Q}{2\pi T}\left[f_{сов} + f_{нс}\left(\frac{l}{m};\ \frac{m}{r_c};\ \frac{c}{m};\ \alpha\right)\right]. \qquad (14.14)$$

Величина $f_{сов}$ определяется расчетной схемой, которая отвечает гидрогеологическим условиям работы скважины.

Если $\alpha > 5\cdot 10^{-5}$, то значения f от времени не зависят. В гидродинамических расчетах принимают $f_{нс} \cong f'_{нс}$ и вычисляют его, пользуясь специальными таблицами или графиками [6]. Для грунтовых вод расчетная мощность пласта m определяется как $m = h_e - 0{,}5\ S_0$, а расчетная длина l водоприемной части скважины при незатопленном фильтре $l = l_0 - 0{,}5\ S_0$, при затопленном $l = l_0$, а $C = C_0 - 0{,}5\ S_0$ (где S_0 — понижение в скважине; C_0 измеряется от начального положения уровня до верха фильтра длиной l_0).

Для квазистационарной фильтрации уравнение (14.14) принимает вид

$$S = \frac{Q}{2\pi T}\left[\ln\frac{R_{пр}}{r_c} + f_{нс}\left(\frac{l}{m};\ \frac{m}{r_c};\ \frac{c}{m}\right)\right]. \qquad (14.15)$$

Можно несовершенную скважину заменить [54] на эквивалентную по дебиту совершенную скважину, имеющую приведенный радиус $r^* = r_c e^{-f_{нс}}$. Тогда зависимость (14.15) примет вид

$$S = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R_{пр}}{r_c^*},$$

где $R_{пр}$ определяется по формуле (13.31).

В условиях взаимодействия введением r_c^* все несовершенные скважины эквивалентно заменяются на совершенные и далее исследуются как совершенные.

Задача. Получить расчетные зависимости для определения понижения в любой точке пласта и в одной из трех взаимодействующих линейно расположенных скважин для условий неограниченного и полубесконечного пластов с границами первого и второго родов.

14.6. ПЛАНОВО-ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В МНОГОПЛАСТОВЫХ СИСТЕМАХ

Фильтрация к скважинам в двухпластовой системе. Планово-пространственная фильтрация к скважинам возникает в слоистых системах, когда выполняется критерий (4.32) или (4.34), что обусловливает перетекание по схемам, показанным на рис. 14.3. Рассмотрим двухпластовую систему (см. рис. 14.3) с постоянным уровнем в соседнем пласте, из которого идет перетекание. Такая схематизация возможна, если водопроводимость верхнего пласта значительно превышает водопроводимость основного, где работает скважина, а «питающий» пласт дополнительно имеет инфильтрационное питание и гидравлическую связь с реками.

В таких условиях фильтрация описывается уравнением

$$a\left(\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}\right)-bS=\frac{\partial S}{\partial t}, \qquad (14.16)$$

где b — коэффициент перетекания, $b = k_0/m_0\mu^*$. Решение уравнения (14.16) получено Ч. Джейкобом и М. Хантушем [8, 62] и имеет вид

$$S=\frac{Q}{4\pi T}W\left(u,\ \frac{r}{B}\right), \qquad (14.17)$$

при этом u определяется по формуле (13.28), а B — по (5.15а).

Функция $W\left(u, \frac{r}{B}\right)$ табулирована и приведена в работах [8, 6, 34, 62]. Анализ полученного решения показывает, что при $t \geqslant 2{,}5\frac{r_2}{a}$ и $\frac{r}{B}\leqslant 0{,}2$ функция $W\left(u, \frac{r}{B}\right)$ заменяется на $2K_0\left(\frac{r}{B}\right)-I_0\frac{r}{B}\times W(Bt)$, где K_0 и I_0 — символы функции Бесселя второго и первого родов от мнимого аргумента. При длительной откачке, когда $t \geqslant 3/b$, $W(B, t)$ стремится к нулю, и вместо выражения (14.17) получаем

$$S=\frac{Q}{2\pi T}K_0\left(\frac{r}{B}\right). \qquad (14.18)$$

Формула (14.18) отвечает стационарной фильтрации. При определении понижения в самой скважине при $\frac{r}{B}\ll 0{,}2$ и $K_0\left(\frac{r_c}{B}\right)\approx \approx \ln\frac{1{,}12B}{r_c}$ вместо (14.18) получим

$$S_{\text{скв}}=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{1{,}12B}{r_c}, \qquad (14.19)$$

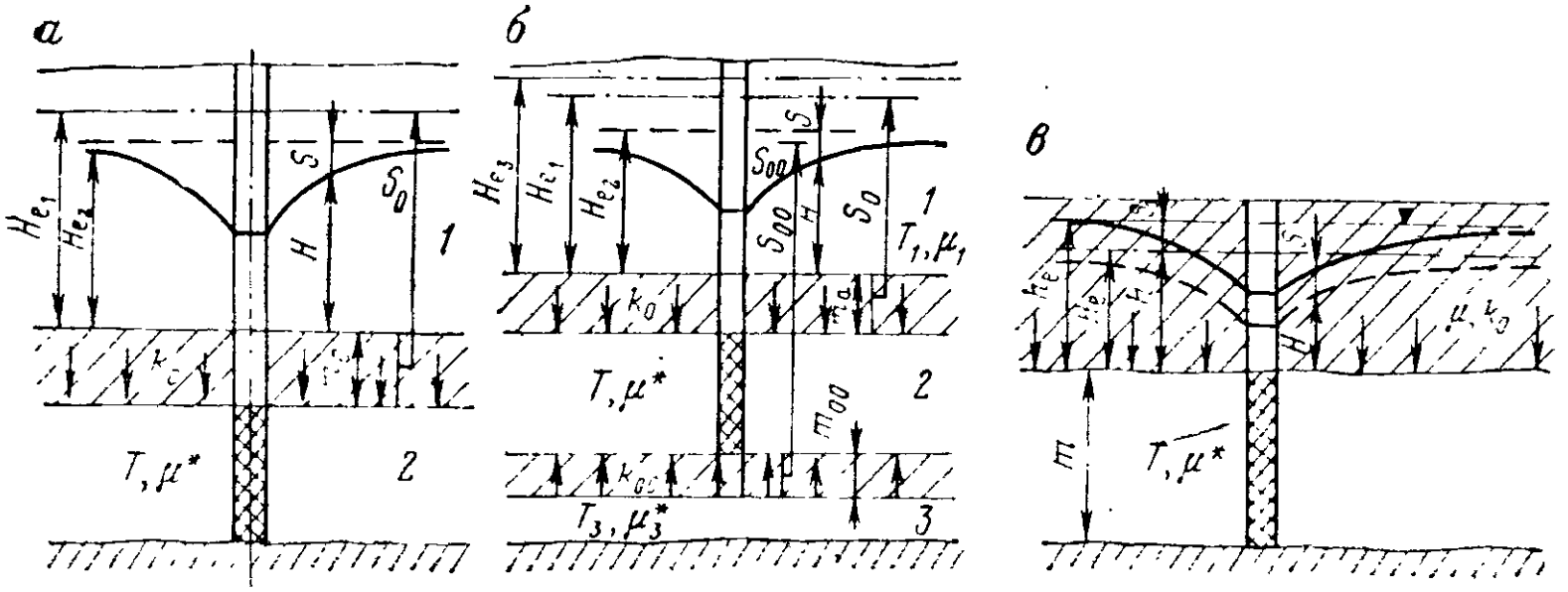


Рис. 14.3. Типовые схемы слоистых систем с перетеканием:

а — два основных водоносных горизонта и разделяющий их слой (перетекание во второй пласт при постоянном или переменном уровне воды H_{e_1} в первом пласте); *б* — три основных водоносных горизонта и два разделяющих их слоя (перетекание во второй пласт при постоянных или переменных уровнях воды в первом H_{e_1} и третьем H_{e_3} пластах); *в* — двухслойная толща с перетеканием воды из суглинков (грунтовые воды) в пески (напорные воды)

что идентично формуле Дюпюи (13.21), если принять $R = 1{,}12\ B$ Формула справедлива и для расчетов в зоне, где $r < (0{,}1—0{,}34)\ B$ [6]. Перетекание здесь не изменяет формы депрессионной воронки, так как разность понижений $S_{скв} — S$ по (14.19) дает уравнение Дюпюи (13.19). Другие решения рассмотрены в работах [6, 34, 54, 62].

При откачке из n взаимодействующих скважин расчетные понижения определяются методом суперпозиции, наличие границ учитывается методом зеркальных отображений, а несовершенство скважин — методом фильтрационных сопротивлений.

Диагностический анализ. Влияние перетекания на режим снижения уровня воды при откачке в двухпластовой системе показано на рис. 14.4, где приведены два графика: первый — при постоянном напоре в соседнем питающем горизонте (см. рис. 14.4, *а*), второй — в условиях сработки его уровня (см. рис. 14.4, *б*). На первом понижение стабилизируется, что отвечает переходу от уравнения (14.17) к (14.18), на втором (см. рис. 14.4, *б*) наблюдаются три периода: I — до заметного снижения уровня в питающем горизонте — понижение описывается формулой (14.17); II — период сложного взаимодействия двух пластов, когда появляется участок с практически постоянным значением понижения (что свидетельствует о временном динамическом равновесии между водоотбором из скважины и перетеканием из питающего пласта); III — период, характеризующийся увеличением скорости снижения уровня, которое происходит как в едином пласте суммарной проводимости, т. е. согласно зависимости (13.27), в которой $T = T_1 + T_2$ и $\mu^*_{об} = \mu^* + \mu_1 + \mu_0$ (коэффициенты водоотдачи основных пластов и разделяющего слоя). Как видно из графиков на рис. 14.4, *б*, фильтрация не стабилизируется.

На третьем графике (см. рис. 14.4, *в*) дано сопоставление нескольких эталонных кривых, характеризующих снижение уровня в неограниченном изолированном пласте и двухпластовой системе с посто-

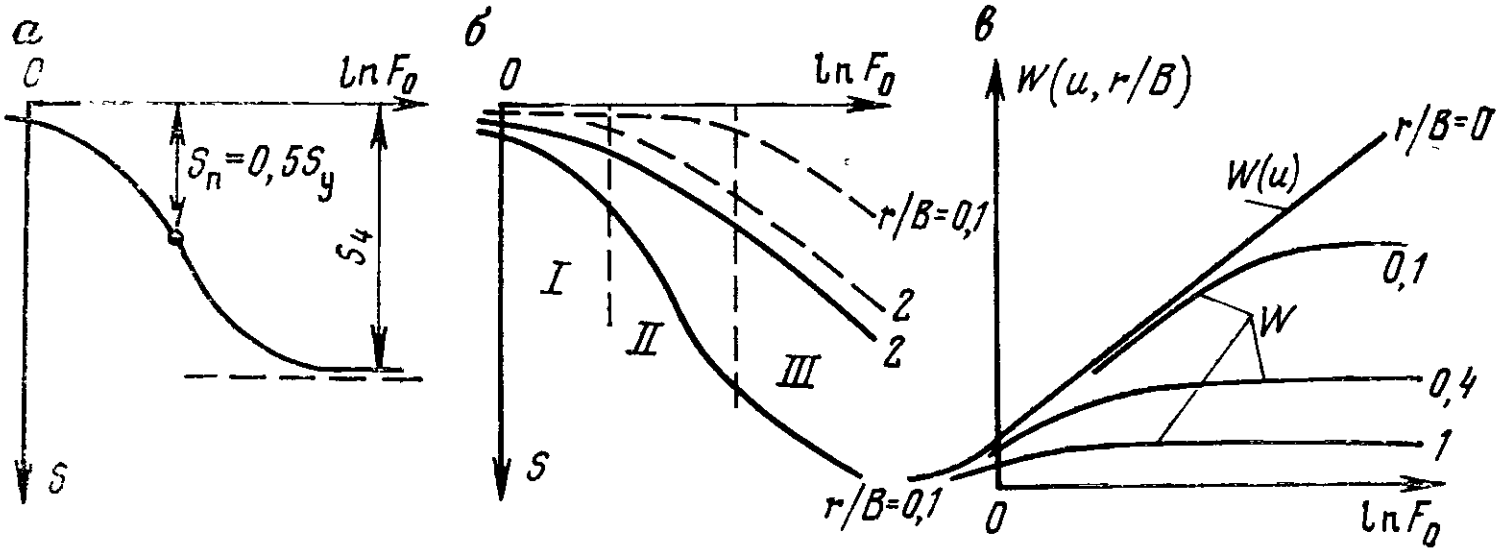


Рис. 14.4. Формирование депрессионных кривых при откачке из скважины в слоистых гидравлически связанных системах (диагностические кривые):

а — типовой график изменения уровня при неизменном напоре в соседних пластах (имеется точка перегиба, где понижение $S_п$ равно половине стационарного $S_у$); *б* — графики изменения уровня в двухпластовой системе; *в* — графики формирования уровня в неограниченном изолированном пласте $W(u)$ и в условиях перетекания $W(u, B)$ (сплошная линия — основной пласт первый, из которого идет откачка; пунктирная — соседний пласт второй). I, II, III — периоды формирования кривой депрессии: I — при малом влиянии перетекания, II — при сложном взаимодействии пластов, III — в условиях их работы как единой системы с суммарной проводимостью $F_0 = at/B^2$

янным уровнем в питающем горизонте. В условиях неустановившегося движения преобладающее влияние на процесс снижения уровней оказывает удельная водопроводимость k_0/m_0 разделяющего слоя и соотношение μ^* и μ_1 водоотдачи основных пластов [6].

Двухслойная толща. При выполнении критерия (4.32) двухслойная толща (см. рис. 14.4, *в*) представляется расчетной схемой, в которой верхний суглинистый слой содержит грунтовые воды, а нижний песчаный — напорные. Между слоями наблюдается перетекание, и фильтрация описывается уравнениями (6.23) и (6.44), которые в данном случае принимают вид

$$w - \mu \frac{\partial h}{\partial t} = k_0 \frac{h - H}{h};$$

$$a^* \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{k_0}{\mu^*} \left(\frac{h - H}{h} \right) = \frac{\partial H}{\partial t}, \qquad (14.20)$$

где h — глубина воды от свободной поверхности до кровли нижнего слоя; k_0 и μ — параметры верхнего слоя; a^*, μ^* и H — параметры и напор нижнего слоя.

Решение для верхнего пласта имеет следующий вид [6]:

$$S_в = \frac{Q}{4\pi T} R\left(u, \frac{r}{B}\right); \qquad (14.21)$$

$$u = \frac{r^2}{4a^{**}t}; \qquad a^{**} = \frac{T(1 + \varphi_{1ср})}{\mu^{**}};$$

$$\mu^{**} = \mu + \mu^*; \qquad B = \sqrt{\frac{T h_{ср} \mu}{k_0 \mu^{**}}}, \qquad (14.21а)$$

а для нижнего пласта—

$$S_{\text{и}} = \frac{Q}{4\pi T} R^*\left(u,\ \frac{r}{B},\ S_{\text{в}},\ h_{\text{е}}\right). \qquad (14.22)$$

При выполнении условия

$$t \geqslant 3\,\frac{\mu h_{\text{ср}}}{k_0} \qquad (14.23)$$

функция $R^*\left(u, \frac{r}{B}, S_{\text{в}}, h_{\text{е}}\right) \cong W(u)$ и зависимость (14.22) становятся аналогичными зависимости (13.27) для изолированного пласта, но, как видно из уравнения (14.21а), в аргументе u содержатся показатели водоотдачи обоих слоев. Условие (14.23) тождественно критерию (5.12) и указывает на незначительное влияние величины понижения $S_{\text{в}}$ в суглинистом слое на скорость перетекания, и с момента $t_{\text{р}}$ по формуле (14.23) водоприток в двухслойной системе можно рассматривать по схеме изолированного пласта с эффективными параметрами пьезопроводности a^{**} и водоотдачи μ^{**} [см. формулу (14.21а)], которые определяются по данным опытных работ.

З а д а ч а. Сравните уравнения (14.16) и (14.20) и сделайте вывод о том, какими диагностическими особенностями должен характеризоваться график $S - \ln t$ для двухслойной толщи.

14.7. МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ СКВАЖИН

Метод обобщенных систем скважин, предложенный Ф. М. Бочевером [6], позволяет реальные группы взаимодействующих скважин заменить бесконечным множеством линейных стоков, равномерно распределенных по линии или площади, приблизительно отвечающим действительному расположению скважин (рис. 14.5). Суммарный расход этих стоков равен суммарному расходу реальных скважин

$$Q_{\text{сум}} = \sum_{1}^{n} Q_i = q\omega,$$

где q — расход линейных стоков на единицу длины контура или площади ω, в пределах которых располагаются скважины.

При выводе формул в качестве исходной используют зависимость (13.10) и, выделяя бесконечно малый элемент линии или площади $d\omega$, определяют бесконечно малое изменение уровня dS на расстоянии r^*, вызванное расходом элемента $qd\omega$. Интегрируя полученное уравнение применительно к выбранному типу обобщенной системы (линия, кольцо или площадь), получают зависимости для определения уровня $S_{\text{об}}$ или гидравлического сопротивления $f_{\text{об}}$. Поскольку при использовании этого приема не рассматриваются реальная схема расположения скважин и зона резкой деформации потока, то полное понже-

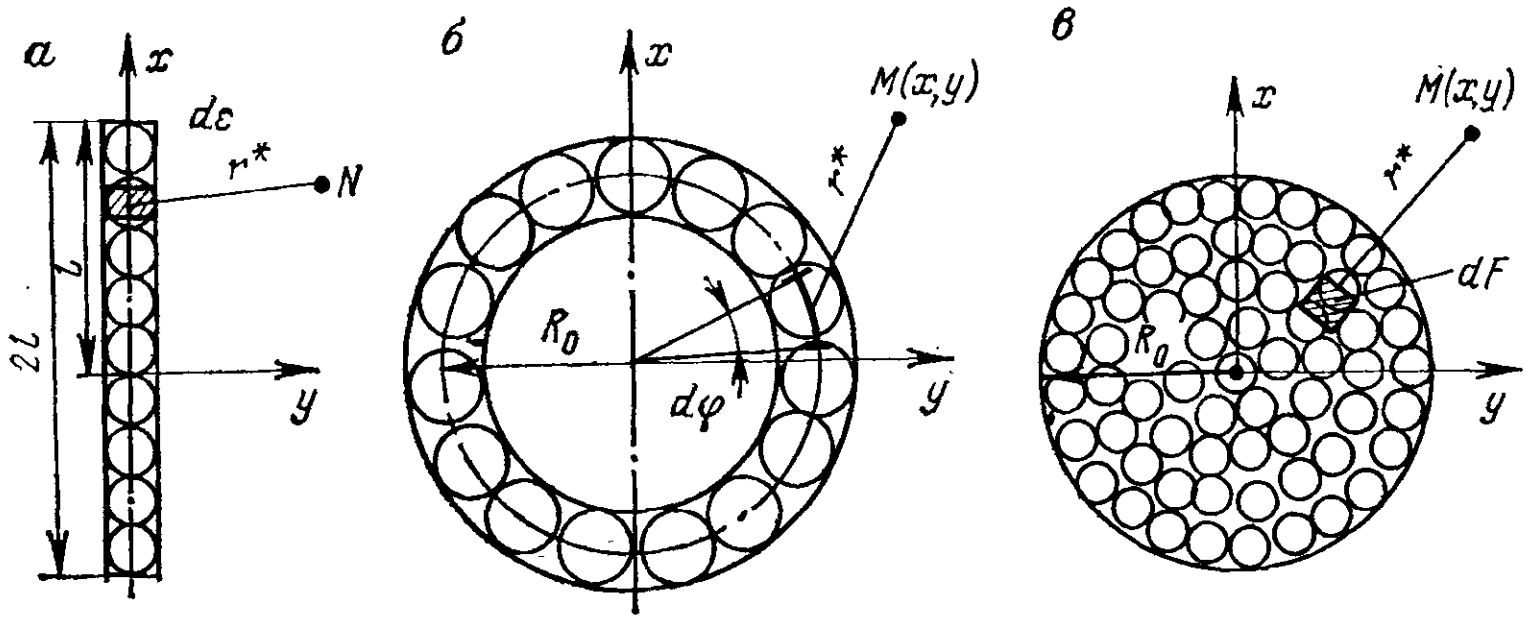


Рис. 14.5. Типовые схемы обобщенных систем скважин:
а — линейная; *б* — кольцевая; *в* — площадная

ние S в скважине находится по формуле (14.14) методом фильтрационных сопротивлений

$$S = S_{об} + \Delta S_{вн},$$

где $\Delta S_{вн}$ — дополнительное понижение уровня, учитывающее реальную схему расположения скважин и характер ее гидродинамического несовершенства.

Ссответственно полное сопротивление [см. формулу (14.12)] выразится как

$$f = f_{об} + f_{вн}.$$

Величина $f_{об}$ характеризует внешнее сопротивление, которое зависит от формы обобщенной системы, условий на границах пласта, его строения и продолжительности действия скважин. Величина $f_{ви}$ — дополнительное сопротивление, определяемое в зависимости от расстановки скважин внутри системы и степени их гидродинамического несовершенства:

$$f_{вн} = \ln \frac{r_{гр}}{r_c} + \xi_c,$$

где $r_{пр}$ — радиус внутренней области влияния скважин, для контурных систем их расположения (ряд, контур) $r_{пр} = \sigma/\pi$ (где σ — расстояние между скважинами), а для площадных $r_{пр} = 0{,}47\sqrt{F_0/\pi}$ (где F_0 — площадь круга, равная области, границы которой проведены посередине между соседними скважинами).

Общее решение имеет вид

$$S = \frac{Q}{4\pi T}(f_{об} + f_{вн}).$$

Значения $f_{об}$ для линейного ряда, кольца и площадной системы находят по таблицам и графикам, приведенным в работе [6]. Погрешность в определении S внутри системы и вне ее от замены дискретных

скважин на обобщенную систему при $F_0 > 5$ не превышает 5 %, при этом достаточно, чтобы число скважин в системе было больше трех.

Расчеты взаимодействующих обобщенных систем ведут как для дискретных скважин методом суперпозиции, а влияние границ учитывают методом зеркальных отображений.

З а д а ч а. Запишите расчетные зависимости для определения понижения в одной из скважин и в любой точке пласта для случая, когда в неограниченном пласте вблизи реки и непроницаемого контура работают две обобщенные площадные системы.

14.8. ОСОБЕННОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ К СКВАЖИНАМ В АНИЗОТРОПНЫХ И ГЕТЕРОГЕННЫХ ПЛАСТАХ

Анизотропные пласты. Для пластов, имеющих в плане различные коэффициенты фильтрации k_x и k_y по главным осям анизотропии, совпадающим с направлением координат x и y, упругая фильтрация определяется дифференциальным уравнением (6.21), при $\lambda = \sqrt{k_y/k_x}$, $a_y = T_y/\mu^* = k_y m/\mu^*$ и $x = \lambda x_0$; $y = y_0$, которое в радиальной системе координат принимает вид

$$a_y\left(\frac{\partial^2 S}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'}\frac{\partial S}{\partial r'}\right) = \frac{\partial S}{\partial t}; \tag{14.24}$$

$$r' = \sqrt{y^2 + \lambda^2 x^2} \quad \text{или} \quad r' = r\sqrt{\sin^2\theta + \lambda^2\cos^2\theta}, \tag{14.24а}$$

где r' — радиус-вектор в трансформированной системе координат x_0, y_0; θ — угол между радиусом r и главной осью анизотропии x_0.

Дифференциальное уравнение (14.24) решаем [10] так же, как для изотропной среды (см. разд. 13.4), только иначе определяем связи между q и $Q_{скв}$. Представим зависимость (13.25) в следующем виде:

$$S_{r',\,t} = A\,W\left(\frac{r'^2}{4a_y t}\right) \tag{14.25}$$

и найдем A из условия (4.42), которое примет вид

$$Q_{скв} = m\int_0^{2\pi} r v_r d\theta\,\Big|_{r'=r_c'} = \text{const} \tag{14.26}$$

Представим $v_r = \sqrt{\left(k_x\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(k_y\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2}$ и, проведя дифференцирование выражения (14.25) по x и y с учетом, что $x = \lambda x_0$ и $y = y_0$, после подстановки полученных результатов в v_r получим

$$v_r = \frac{2Ak_y e^{\frac{r'^2}{4a_y t}}}{r'^2}, \tag{14.27}$$

где r' определяется по формуле (14.24а).

Подставив равенство (14.27) в (14.26) и обозначив $\alpha = \sin^2\theta + \lambda^2\cos^2\theta$, будем иметь

$$Q_{скв} = 2Amk_y \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{r^2\alpha}{4a_y t}}}{\alpha} d\theta \Bigg|_{r=r_c} = \text{const}. \qquad (14.28)$$

Уравнение (14.28) справедливо, если $e^{-\frac{r^2\alpha}{4a_y t}} \approx 1$, что выполняется практически при условии $r_c^2 \ll 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ и $4a_y t \gg 1$, так как $r_c^2\alpha/(4a_y t) \ll 0{,}01$. В этом случае зависимость (14.28) без больших погрешностей можно представить в виде

$$Q_{скв} = 2Amk_y \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin^2\theta + \lambda^2\cos^2\theta},$$

и, выполнив интегрирование в заданных пределах, после преобразований найдем $A = Q_{скв}/(4\pi m\sqrt{k_x k_y})$. Подставив это уравнение в выражение (14.25) получим

$$S = \frac{Q_{скв}}{4\pi m\sqrt{k_x k_y}} W(u), \quad u = \frac{r'^2}{4a_y t}. \qquad (14.29)$$

При условии $r'^2/(4a_y t) \leqslant 0{,}1$ для квазистационарной фильтрации

$$S = \frac{Q_{скв}}{4\pi m\sqrt{k_x k_y}} \ln\frac{2{,}25a_y t}{r'^2}. \qquad (14.30)$$

При определении S в любой точке пласта по формулам (14.29) и (14.30) значение r' находится по уравнению (14.24а), а для скважины, из которой ведется откачка.

$$r_c' = r_c\frac{1+\lambda}{2},$$

что обеспечивает точность в 2—10 % в вычислении $S_{скв}$ при $\lambda^2 > 0{,}1$; при меньших значениях λ^2 погрешности возрастают.

Влияние внешних границ пласта и взаимодействие скважин учитываются так же, как для изотропного пласта. Анизотропия в вертикальном разрезе рассмотрена в работах [34, 40].

Особенности фильтрации в гетерогенных системах. Фильтрация в гетерогенных системах с двойной пористостью или двойной трещиноватостью характеризуется наличием двойной емкости крупных трещин и блоков. При откачке из таких пластов возникает разность напоров между трещинами и пористыми блоками, которой и определяется скорость оттока воды из слабопроницаемых блоков к секущим их трещинам. Фильтрация в таких условиях воспроизводится моделью равномернослоистого пласта (см. гл. 6) и описывается дифференциальными уравнениями (6.31) и (6.32).

В работе [54] рекомендуется параметр η^*, определяемый по формуле (6.33), интерпретировать как усредненный параметр трещиновато-пористой среды, пропорциональный отношению проницаемости блоков к их водоотдаче и отражающий размеры и форму блоков, а величину $t_0 = 1/\eta^*$, которая отражает продолжительность периода, когда существенно сказывается разновременность отдачи воды блоками и трещинами, называть характерным временем запаздывания. Оно измеряется часами или сутками и может достигать нескольких десятков суток.

Вопрос. Как отразится время запаздывания на диагностическом графике $\overline{S} - \ln f_0$?

14.9. ОЦЕНКА ИЗМЕНЕНИЯ ДЕБИТА И ВРЕМЕНИ ВВОДА СКВАЖИН В ДЕЙСТВИЕ

Учет изменения дебита, а также времени ввода в действие и остановки скважин проводится с помощью метода суперпозиции. Согласно этому методу ранее существовавшая скважина с дебитом Q_j действует неизменно весь расчетный срок $t_р$, а каждое изменение ее дебита Q_{j+1} рассматривается как новое воздействие, по величине равное алгебраическому приращению $\Delta Q = Q_{j+1} - Q_j$, с длительностью, измеряемой от момента его возникновения t_i до конца расчетного срока $t_р$, т. е. $t_р - t_i$.

Рассмотрим принцип построения расчетных зависимостей на примере. Пусть в неограниченном пласте работает скважина с дебитом Q_1, и в момент t_1 от начала ее работы дебит изменяется до Q_2, т. е. изменение равно $\Delta Q_{2-1} = Q_2 - Q_1$ (см. рис. 13.7, *б*). Требуется построить зависимость для определения понижения в скважине в момент $t_р$. Принимаем, что в пласте работают две скважины: существующая с дебитом Q_1 в течение всего расчетного срока $t_р$ и дополнительная (фиктивная), введенная в действие в том же месте с дебитом ΔQ_{2-1} и работающая в течение срока $t_р - t_1$. Расчетная зависимость имеет вид

$$S_A = \frac{Q_1}{4\pi T} W(u_1) + \frac{Q_2 - Q_1}{4\pi T} W(u_2) \qquad (14.31)$$

при

$$u_1 = \frac{r_c^2}{4at_р}; \quad u_2 = \frac{r_c^2}{4a(t_р - t_1)}. \qquad (14.31а)$$

Остановка скважины в момент t_2 означает, что $Q_2 = 0$, и моделируется введением в точке ее расположения фиктивной скважины, работающей в режиме нагнетания с дебитом, который отмечался в период, предшествовавший остановке, т. е. $-Q_2$. Расчетная зависимость (14.31) для нового периода $t_р$ примет вид

$$S_A = \frac{Q_1}{4\pi T} W(u_1) + \frac{Q_2 - Q_1}{4\pi T} W(u_2) - \frac{Q_2}{4\pi T} W(u_3), \qquad (14.32)$$

где u_1 и u_2 определяют по формуле (14.31а), а $u_3 = r_c^2/[4a(t_р - t_2)]$.

З а д а ч а. Записать вместо (14.32) выражение, отвечающее квазистационарной фильтрации, и продолжить пример, приняв условие, что с момента t_3 вводится новая скважина с дебитом Q_3, находящаяся на расстоянии r_3 от существующей, а в момент t_4 в новой скважине дебит уменьшится до Q_4. Построить расчетную зависимость для определения понижения S в новой скважине в момент $t_p > t_4$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какими математическими моделями представляется водоприток к несовершенным скважинам?
2. Какие имеются различия в гидродинамической структуре потока реальной скважины и ее математической модели? Как это учитывается?
3. Что такое метод фильтрационных сопротивлений? Как формулируются его основные принципы?
4. Сформулируйте принцип построения расчетных зависимостей для определения понижений в скважине и любой точке пласта для системы взаимодействующих несовершенных скважин, расположенных в полуограниченном пласте с граничным условием первого рода?
5. Какие изменения произойдут, если скважины будут работать в пласте, имеющем гидравлическую связь с вышележащим водоносным горизонтом? Будут ли справедливы эти зависимости, если расстояние σ между скважинами будет больше $R_{пр}$?
6. Запишите уравнения водопритока к несовершенной скважине, работающей в изолированном пласте в двухпластовой системе, так, чтобы по математической форме они были одинаковыми и отвечали уравнению стационарного водопритока к совершенной скважине по Дюпюи.
7. Что такое метод обобщенных систем скважин? В чем его отличие от метода «большого колодца»? Проиллюстрируйте различие примером.
8. В чем сходство и различие в характере снижения уровня воды в скважине, работающей в неограниченном пласте, полуограниченном с граничными условиями первого и второго родов и двухпластовой системе с постоянным уровнем в «питающем» водоносном горизонте? Проиллюстрируйте это эталонными для каждой схемы графикамн $\overline{S} - \ln f_0$.
9. Дифференцированием зависимости (13.27) по t найдите выражение для скорости фильтрации и, сопоставив его с уравнением (13.25), выясните различие которое вносится в процесс снижения уровня заменой нестационарной фильтрации на квазистационарную.
10. Чем должны быть похожи графики изменения $\overline{S}—\ln f_0$ для двухпластовой системы, двухслойной толщи и пласта с гетерогенно-блоковым строеннем?
11. Запишите уравнения (13.27), (13.30), (14.10), (14.14), (14.17), (14.18) и (14.21) для грунтовых вод, используя напорную функцию (13.9).

Глава 15

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПО ДАННЫМ ОПЫТНО-ФИЛЬТРАЦИОННЫХ РАБОТ

15.1. ПОСТАНОВКА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Опытно-фильтрационные работы (ОФР) — один из основных видов полевых исследований, по данным которых определяют гидрогеологические параметры пород и пластов. Они выполняются как одиночные или кустовые с системой пьезометрических скважин, в которых измеряют понижения и наблюдают за изменением депрессионной во-

ронки в процессе опыта. Если опыт проводится одновременно на двух и более опытных скважинах, то он называется групповым и во многом аналогичен эксплуатации водозабора.

С позиций теории фильтрации определение параметров представляет собой решение обратных задач (см. разд. 6.11). В основу их положено использование имеющихся аналитических и численных решений дифференциальных или интегральных уравнений плановорадиальной фильтрации, полученных для типовых расчетных схем водопритока к скважинам. Это определяет необходимость схематизировать гидрогеологические условия участка ОФР к известным расчетным схемам, что всегда вносит погрешность в расчетные значения параметров.

Обратная задача ставится так: путем диагностики данных ОФР установить расчетные схемы, аппроксимирующие гидродинамические условия участков ОФР, найти отвечающие им уравнения и способы получения расчетных значений параметров по результатам опыта. Выполнив расчет, оценить инженерную достоверность расчетных значений. Она зависит от правильности выполненной схематизации гидрогеологических условий участка откачки и гидродинамической интерпретации данных опыта, а также от погрешностей измерения показателей, входящих в расчетные формулы (S_0, S_i, $Q_{скв}$, r_0, r_i). Следовательно, решая обратную задачу, мы находим не истинные значения параметров, а некоторые эффективные их значения. При этом, обрабатывая данные одного опыта разными методами, получают несколько значений искомого параметра, т. е. задача решается неоднозначно, и перед гидрогеологом возникает вопрос, как выбрать расчетное значение. Последняя задача выходит за рамки курса гидрогеодинамики. Выделяют три группы методов определения параметров: *аналитические*, *графоаналитические* и *моделирование*. В последнем случае используют численные методы и моделирование на АВМ или ЭЦВМ, воспроизводя на модели опытную откачку и подбирая расчетные параметры таким образом, чтобы модельная картина формирования понижений в наблюдательных и опытной скважинах совпадала с данными опыта за весь период откачки. Аналитические и графоаналитические методы рассмотрены в работах В. Н. Щелкачева, Н. Н. Веригина, Ф. М. Бочевера, В. М. Шестакова, В. А. Мироненко, Б. В. Боревского, М. Хантуша, Ч. Тейса, Ч. Джейкоба, Д. Хорнера и др. В качестве одного из основных приемов предложено представлять уравнение (13.30) в виде логарифмической прямой

$$S = A + C\varphi(r, t), \tag{15.1}$$

где A и C — коэффициенты прямой, с использованием которых определяют искомые параметры; $\varphi(r, t)$ — логарифмическая функция от аргументов r, t или t/r^2.

Определяемые параметры можно разделить на три группы: а) параметры пород (k, μ, k_0); б) параметры пласта (T, μ^*, a, B, $\Delta L_{ид}$, $R_{пр}$); в) параметры скважины ($f_{ис}$, $r_{пр}$ или r^*). Исходными зависимостями являются при стационарной фильтрации (13.19), (13.21), (13.24), (13.49), (14.10), (14.14), (14.18), а при нестационарной и квазистацио-

нарной — (13.27), (13.30), (13.32), (13.51), (14.15) и (14.17). При расчетах параметров пластов с грунтовыми водами вводится напорная функция, по которой в названных уравнениях осуществляется замена Sm на $(2h_e—S)\,S$, а $Q/(2\pi km)$ на $Q/(\pi k)$.

15.2. ПРИНЦИПЫ ДИАГНОСТИКИ И ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДАННЫХ ОПЫТНЫХ ОТКАЧЕК

Расчетная схема откачки — это упрощенная математическая модель участка пласта, отражающая его характерные гидрогеологические и гидродинамические особенности, которые определяют закономерности фильтрации, создаваемой откачкой. Схема потока может менять свою гидродинамическую структуру в зависимости от продолжительности и интенсивности опыта, а также положения опытных скважин относительно границ исследуемого объекта. Для выявления «действующих» в процессе откачки расчетных схем используют индикаторные (эталонные) графики. Индикаторные графики характеризуют главные особенности процесса понижения уровня воды в опытных и наблюдательных скважинах для типовых расчетных схем. Основными индикаторными кривыми являются графики временно́го (S — ln t), площадного (S — ln r) и комбинированного (S — ln t/r^2) прослеживания, а также эталонные кривые, построенные в специальной системе координат. На величину угловых коэффициентов этих графиков влияют параметры и границы пласта, что позволяет по внешнему виду графика оценивать степень проницаемости пластов и гидродинамическую роль границ. Под интерпретацией понимают анализ опытных индикаторных графиков для выявления главных факторов, определяющих реальный процесс откачки, и установления типовых периодов формирования депрессионных кривых, отвечающих действию конкретной расчетной схемы. Диагностика — это сопоставительный анализ теоретических и опытных индикаторных кривых, в результате которого на опытных индикаторных графиках выделяются расчетные участки и устанавливаются соответствующие им расчетные схемы для определения гидрогеологических параметров. Идентификация выполняется визуальной оценкой степени морфологического сходства выделенных (опытных) участков с теоретическими, что подтверждается затем временны́ми критериями, оценивающими период действия данной расчетной схемы.

Индикаторные графики при кратковременных опытах не всегда позволяют однозначно интерпретировать опытный процесс в силу нечеткого проявления его характерных особенностей и влияния случайных факторов. С этой точки зрения диагностика индикаторных графиков одиночных откачек малоинформативна и субъективна, в то время как данные кустовых откачек обладают более высокой информативностью и позволяют лучше контролировать результаты интерпретации ОФР по наблюдательным скважинам.

15.3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Расчет выполняется по аналитическому уравнению, преобразованному относительно искомого параметра. Например, для определения коэффициента фильтрации или водопроводимости по данным кустовой откачки при стационарной фильтрации формулу Дюпюи (13.19) или (14.14) переписывают в таком виде:

$$T = \frac{Q}{2\pi (S_0 - S_i)} \left[\ln \frac{r_i}{r_0} + f_{нс}\left(\frac{l}{m};\ \frac{m}{r_0};\ \frac{c}{m}\right)\right], \qquad (15.2)$$

где S_0 и S_i — понижения соответственно в центральной и одной из наблюдательных скважин; r_0 и r_i — соответственно радиус опытной несовершенной скважины и расстояние от нее до наблюдательной, при этом $r_к$ больше, чем зона влияния гидродинамического несовершенства скважины $R_{нс}$; $f_{нс}$ — показатель гидродинамического несовершенства скважины, который должен быть определен ранее из опытных работ или вычислен по графикам, приведенным в работе [6]. Если опытная скважина совершенная, то $f_{нс} = 0$.

При квазистационарной фильтрации в качестве расчетной зависимости используют (13.30), которая при расчете по двум наблюдательным скважинам принимает вид, аналогичный (15.2) при равенстве $f_0 = 0$. Если использовать данные о понижениях S_1' и S_1'' в одной наблюдательной скважине на моменты t' и t'', то, преобразуя зависимость (13.30), получим

$$T = \frac{Q}{4\pi (S_1' - S_1'')} \ln \frac{t''}{t'} = \frac{0{,}183Q}{S_1' - S_1''} \ln \frac{t''}{t'}.$$

Способом подбора по уравнению нестационарной фильтрации (13.27) обычно определяют параметр a, а для стационарной фильтрации из уравнения (14.18) — параметр B.

Для определения коэффициента a возьмем отношение двух понижений S' и S'', замеренных в одной наблюдательной скважине на моменты t' и t''. Величину понижений определяем по уравнению (13.27); после сокращений получим

$$\frac{S'}{S''} = \frac{W\,[r^2/(4at')]}{W\,[r^2/(4at'')]}, \qquad (15.3)$$

где r — расстояние от наблюдательной скважины до опытной. Величина a, как видно из выражения (15.3), определяется подбором. В правую часть формулы (15.3) подставляют в аргумент некоторое значение a и, найдя отвечающее ему соотношение функций W, сравнивают с отношением S'/S'', вычисленным по данным опытной откачки. Расчетное значение a считается установленным, если эти отношения совпадут (с заданной точностью). Для ускорения процесса подбора по первым трем результатам (максимум, минимум, среднее) строят график зависимости a от отношения $W(u')/W(u'')$, а затем, зная из

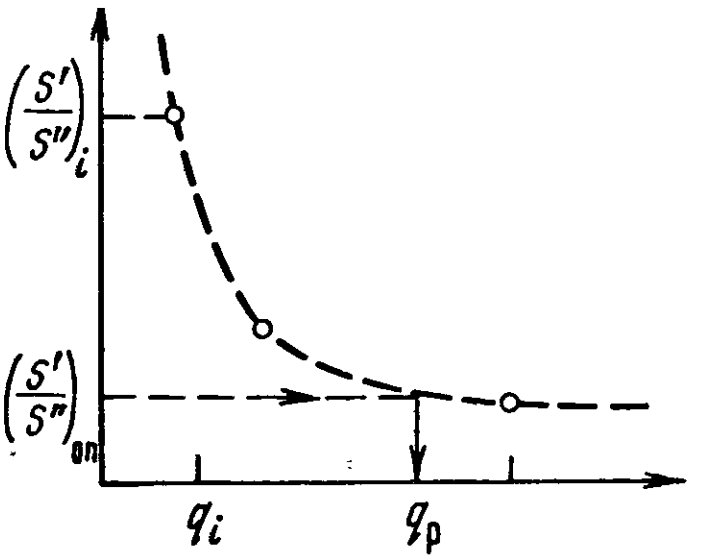


Рис. 15.1. Определение гидрогеологических параметров пласта способом подбора

опыта величину S'/S'', находят отвечающее ей значение a, как показано на рис. 15.1.

Аналогично находят коэффициент перетекания B, используя зависимость (14.18) [35].

15.4. СПОСОБ ЭТАЛОННЫХ КРИВЫХ

По опытным данным в специальной логарифмической системе координат строят кривую, которую совмещают с теоретической эталонной кривой. По результатам совмещения находят параметры a, T и B. Рассмотрим принцип решения на примере определения параметров a и T. Для этого прологарифмируем почленно уравнение (13.27) и его аргумент u [см. формулу (13.28)]. Представив последний в виде $1/u = 4at/r_i^2$, получим

$$\ln S = \ln \frac{Q}{4\pi T} + \ln W(u); \tag{15.4}$$

$$\ln \frac{1}{u} = \ln \frac{4a}{r_i^2} + \ln t. \tag{15.4а}$$

Обозначим

$$\ln S^0 = \ln \frac{Q}{4\pi T} \text{ и } \ln t^0 = \ln \frac{r_i^2}{4a} \tag{15.5}$$

и перепишем выражения (15.4) и (15.4а) иначе

$$\ln S = \ln S^0 + \ln W(u); \tag{15.6}$$

$$\ln t = \ln t^0 + \ln \frac{1}{u}. \tag{15.6а}$$

Из сопоставления уравнений (15.6) и (15.6а) видно, что если построить эталонную кривую в координатах $\ln W(u)$ и $\ln(1/u)$ и наложить ее на кривую, построенную по данным опытной откачки в координатах $\ln S$ и $\ln t$, то параллельным перемещением осей координат можно добиться совпадения этих кривых по значительному числу точек. При этом кривые будут по вертикали сдвинуты на величину $\ln S^0 = \ln Q/(4\pi T)$, а по горизонтали — на $\ln t^0 = \ln r_i^2/4a$ (рис. 15.2).

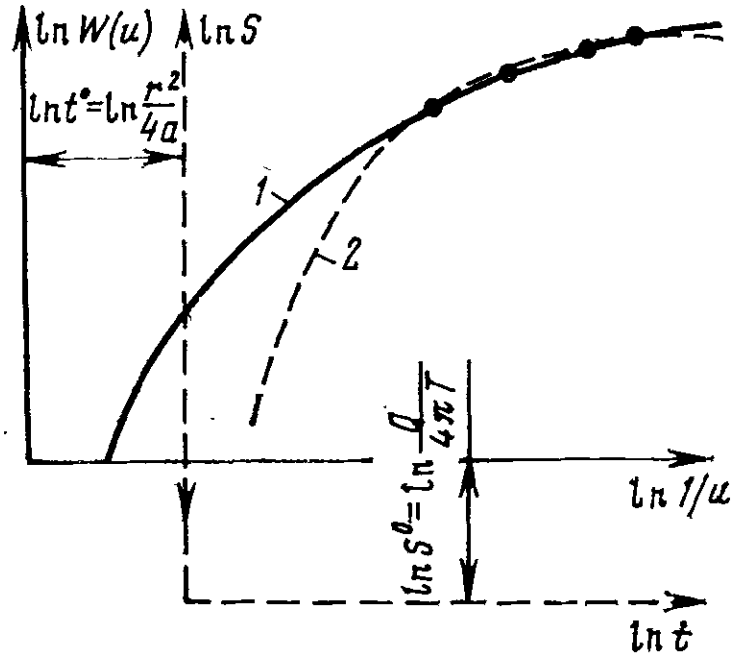


Рис. 15.2. Определение гидрогеологических параметров пласта способом эталонной кривой.
Кривые: *1* — эталонная; *2* — опытная

Получая с графиков значения $\ln S^0$ и $\ln t^0$ и пользуясь формулой (15.5), находим параметры

$$T = 0{,}183Q/S^0 \text{ и } a = r_i^2/(4t_0),$$

где r_i — расстояние от опытной скважины до наблюдательной, по данным которой ведется расчет параметров.

Впервые такой способ предложил Ч. Тейс [8]. Приемлемые для практики результаты получают при $t < 100\, r_i^2/a$. Эталонную кривую строят, задавая величину u некоторой последовательностью чисел. Для каждого числа по таблице функции $W(u)$ находят ее значение, а затем логарифм этого числа. Способ эталонной кривой для нахождения параметра B по формуле (14.17) рассматривается в работе [35].

15.5. МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АНАМОРФОЗЫ

Способы линейной анаморфозы основаны на приведении зависимсти (13.30) к виду прямой линии (15.1), коэффициенты которой A и C используются для нахождения параметров. Эти способы были предложены Ч. Джейкобом и Д. Хорнером [62].

Рассмотрим теоретическое обоснование способа *временно́го прослеживания* S — $\ln t$ (рис. 15.3, *а*). Для любой наблюдательной скважины имеем зависимость (13.30) в виде

$$S_i = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2{,}25a}{r_i^2} + \frac{Q}{4\pi T} \ln t$$

при

$$\frac{r_i^2}{4at} \leqslant 0{,}1.$$

Обозначая

$$C_t = \frac{Q}{4\pi T}, \tag{15.7}$$

$$A_t = C_t \ln \frac{2{,}25a}{r_i^2}, \tag{15.8}$$

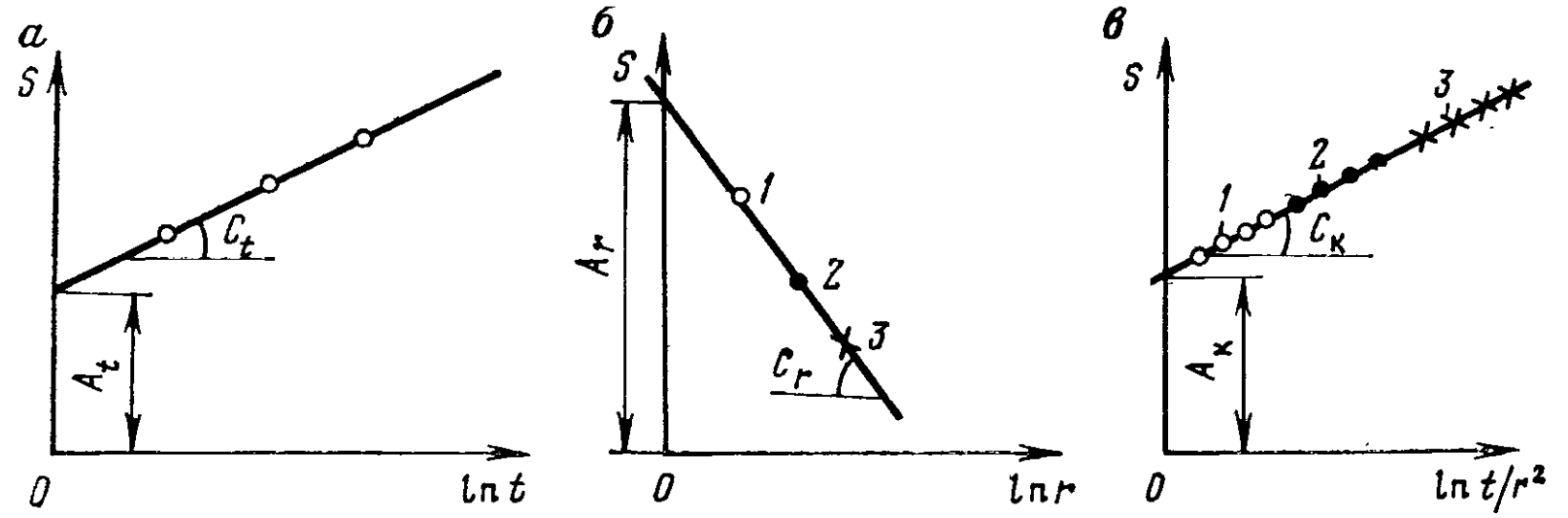


Рис. 15.3. Графики, используемые при определении гидрогеологических параметров графоаналитическим способом.

Прослеживание: *а* — временное; *б* — площадное; *в* — комбинированное. *1—3* — наблюдательные скважины

преобразуем ее к виду логарифмической прямой

$$S = A_t + C_t \ln t. \tag{15.9}$$

Величина C_t определяется как угловой коэффициент прямой относительно оси абсцисс

$$C_t = \frac{S_2 - S_1}{\ln t_2 - \ln t_1}, \tag{15.10}$$

где S_2 и S_1 — два любых значения понижения, рассматриваемые как ординаты прямой; $\ln t_2$ и $\ln t_1$ — соответствующие им абсциссы.

Величина A_t находится как отрезок, отсекаемый на оси ординат при $\ln t = 0$ (см. рис. 15.3, *а*). Параметры вычисляют по формулам (15.7) и (15.8):

$$T = \frac{Q}{4\pi C_t}, \tag{15.11}$$

$$\ln a = \frac{A_t}{C_t} + 2 \ln r - 0{,}82. \tag{15.11а}$$

График S — $\ln t$ строят по данным наблюдательных скважин; по центральной скважине целесообразно определять только T, поскольку a однозначно установить нельзя, что видно из выражения (15.11а), так как в центральной скважине на величину понижения оказывают влияние состояние призабойной зоны и гидродинамическое несовершенство скважины. В этом случае вместо радиуса скважины r_c в выражении (15.11а) должен использоваться приведенный радиус r_c^*. Появляются два неизвестных, которые можно определить только как отношение a/r_c^*.

Аналогичным образом, принимая в зависимости (13.30) согласно (15.1) $\varphi_r = \ln r_i$ и $\varphi_к = \ln (t/r_i^2)$, получаем (см. рис. 15.3, *б*, *в*):

для графиков *площадного прослеживания*

$$S_i = A_r - C_r \ln r_i, \tag{15.12}$$

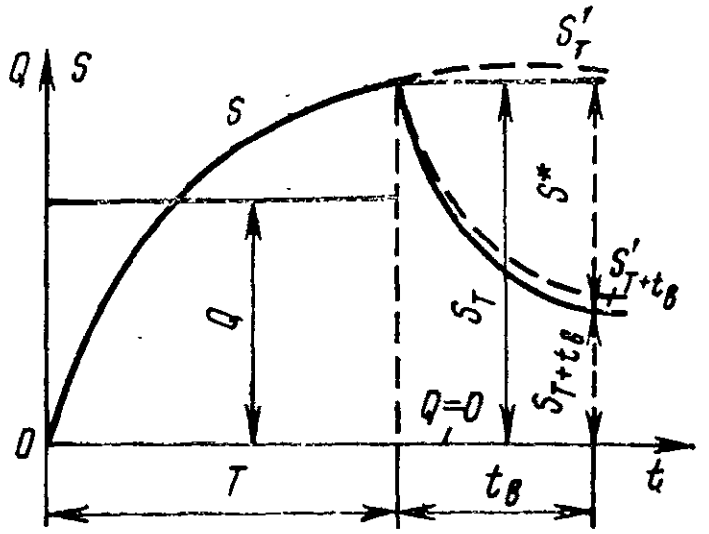


Рис. 15.4. График восстановления уровня ($T = t_0$ — продолжительность откачки)

для графиков *комбинированного прослеживания*

$$S_i = A_к + C_к \ln \frac{t_i}{r_i^2}. \qquad (15.13)$$

В выражениях (15.12) и (15.13) угловые коэффициенты равны ($C_r = C_t$), $C_к = Q/(2\pi k)$, начальные ординаты определяют по формулам $A_r = 0{,}5C_r \ln 2{,}25at_i$ и $A_к = C_к \ln 2{,}25a$.

Значения C_r и $C_к$ получают с помощью графиков, построенных по данным опытных откачек, вычисляя их по формуле (15.10), где в знаменателе для уравнения (15.12) ставят $\ln r_2 - \ln r_1$, а для (15.13) — $\ln t/r_1^2 - \ln t/r_2^2$. Водопроводимость T вычисляют по зависимости (15.11), в которой для графика площадного прослеживания $S - \ln r$ знаменатель равен $2\pi C_r$, а для графика $S - \ln t/r^2$ комбинированного прослеживания — $4\pi C_к$. Пьезопроводность a^* определяется соответственно по величинам отрезков A_r и $A_к$, снятым с опытных графиков $S - \ln r$ и $S - \ln t/r^2$, и вычисляется по формулам:

$$\ln a = \frac{2A_r}{C_r} - 0{,}82 - \ln t_i, \quad \ln a = \frac{A_к}{C_к} - 0{,}82.$$

График $S - \ln r$ строят на выбранный момент $t_i \geqslant 2{,}5\, r_i^2/a$ для всех наблюдательных скважин, принятых в расчет. График $S - \ln t/r^2$ строят по данным нескольких наблюдательных скважин с использованием нескольких моментов времени.

Определение T и a по данным восстановления уровня воды в скважинах выполняется аналогичным образом. Остановка откачки (см. разд. 14.9) учитывается по методу суперпозиции (рис. 15.4) «нагнетанием» в эту же скважину дебита $Q_{скв}$ в течение времени $t_в$. Тогда расчетная формула для квазистационарной фильтрации принимает вид

$$S_{t_0+t_в} = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{t_0 + t_в}{t_в},$$

где t_0 и $t_в$ — продолжительность откачки и восстановления уровня.

Как видно из рис. 15.4, остаточное понижение $S_{t_0+t_в}$ рассматривается как результат одновременного действия продолжающейся откачки $S_{t_0} = f[\ln(t_0 + t_в)]$ и «нагнетания» $S^* = f(\ln t_в)$ с момента остановки откачки при равенстве ее дебита дебиту «нагнетания». Гра-

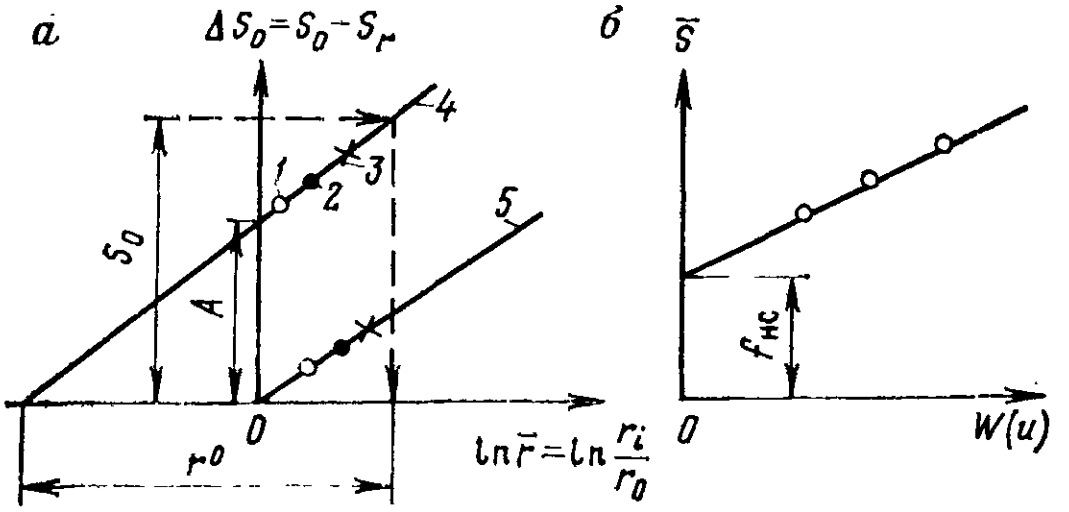


Рис. 15.5. Графики прослеживания, используемые для определения параметров пласта $R_{пр}$ и параметров гидродинамического несовершенства скважины $f_{нс}$: *а* — график площадиого прослеживания при стационарной и квазистационарной фильтрации для определения параметров T, $R_{пр}$ и $f_{нс}$; *б* — график в координатах $\bar{S} = f\,[W\,(u)]$ для центральиой скважины при определеиии показателя $f_{яс}$. *1—3* — наблюдательные скважины; *4* — опытная центральиая скважииа иесовершеииая; *5* — то же, совершеииая

фик временно́го прослеживания с учетом периода восстановления строится в координатах S^* — ln $[t_в/(t_в + t_о)]$ (где S^* — повышение уровня, т. е. разность между уровнями $S_{t_о+t_в}$ в данный момент восстановления и $S_{t_о}$ на конец откачки). По этому графику находят C и по формуле (15.11) определяют T. Для удобства обработки график строится в координатах S — ln $[t_в/(t_о + t_в)]$, при этом должно выполняться условие $t_о \geqslant t_к = r^2/(4at)$ и $t > t_к$ (где $t_к$ — контрольное время наступления квазистационарной фильтрации). При $t_в \leqslant 0{,}1t_о$ и достаточно стабильном положении уровня на конец откачки параметры рассчитыва́ют по формуле (15.9), используя только данные периода восстановления, в которой вместо S ставят S^* и ln $t_в$ вместо ln t; график строят в координатах S^* — ln $t_в$. Расчет содержит погрешность, что видно из рис. 15.4. Определение T и a в условиях двойной трещиноватости и другие методы рассматриваются в работах [5, 31, 54].

При стационарной и квазистационарной фильтрации график площадного прослеживания дает возможность определить приведенный радиус питания $R_{пр}$ и коэффициент гидродинамического несовершенства опытной скважины $f_{ис}$. В качестве исходной принимается зависимость (15.2), которая записывается для разности понижений в центральной несовершенной S_0 и любой из наблюдательных скважин

$$\Delta S_{0-i} = S_0 - S_i = \frac{Q}{2\pi T}\left(\ln \frac{r_i}{r_0} + f_{ис}\right),$$

и после известных уже преобразований приводится к виду, (рис. 15.5, *а*)

$$\Delta S_{0-i} = A + C \ln \bar{r}_{0,i} \qquad (15.14)$$

при

$$A = Cf_{нс}, \qquad (15.14а)$$

где C определяется по формуле (15.7). Наблюдательные скважины находятся вне зоны гидродинамического несовершенства опытной сква-

жины. Как видно из уравнения (15.14), по отрезку A, отсекаемому прямой на оси ординат при $\ln \bar{r} = 0$ (см. рис. 15.5, *а*), определяют показатель $f_{нс}$ для центральной скважины согласно уравнению (15.14а). Для нахождения приведенного радиуса $R_{пр}$ на оси абсцисс находят величину отрезка $\ln \bar{r} = r^0$, отвечающего значению $\Delta S_{0-i} = \Delta S_0$ (см. рис. 15.5, *а*). Зная отрезок r^0, $R_{пр}$ вычисляют по формуле

$$R_{пр} = r^0 e^{r_0}.$$

Если скважина совершенная и $f_{нс} = 0$, то прямая (15.14) проходит через начало координат.

15.6. ДОСТОВЕРНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ И ФАКТОРЫ, ОСЛОЖНЯЮЩИЕ ДИАГНОСТИКУ ОПЫТНЫХ ГРАФИКОВ

Достоверность определения параметров зависит от качества исходной информации, точности построения опытных графиков и правильности выделения на них представительных прямолинейных участков. Диагностика и интерпретация этих графиков — сложный творческий процесс, требующий от исполнителя тщательности в работе, высокого профессионализма и интуиции.

К факторам, осложняющим интерпретацию и диагностику опытных графиков, могут быть отнесены следующие:

а) несоблюдение критерия (13.29) наступления квазистационарной фильтрации, что вызывает на графиках линейной анаморфозы отклонения начальных точек от прямой линии (рис. 15.6);

б) наличие на опытном участке границ первого рода, глубинного перетекания, зон перехода напорных вод в грунтовые или зон с повышенной водопроводимостью, а в грунтовых водах инфильтрационного питания. Все это приводит к выполаживанию концевых участков графиков временно́го прослеживания, при этом наблюдается перелом и появляется более пологий второй участок или прямая асимптотически стремится к оси абсцисс (см. рис. 15.6, прямая *4*);

в) наличие на участке откачек непроницаемых границ или зон с малой водопроницаемостью, что приводит к увеличению темпа снижения уровня и на графике прослеживания наблюдается перелом,

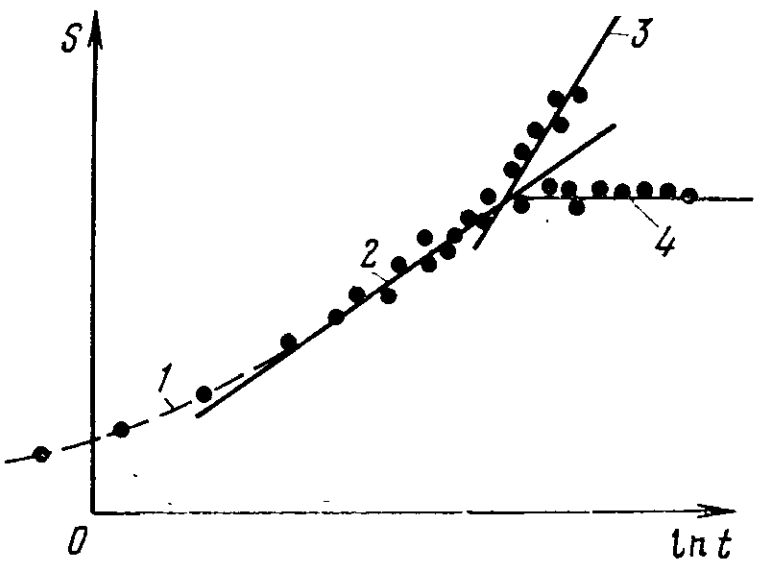


Рис. 15.6. Типовая схема влияния факторов на форму графика S—$\ln t$ наблюдательной скважины:

1 — начальный период, отвечающий функции $W(u)$; *2* — прямолинейная часть, отвечающая функции $\ln u'$; *3*, *4* — участки, отвечающие влиянию границ (*3* — непроницаемой ($Q = 0$), *4* — высокопроницаемой или реки ($H_к = \text{const}$))

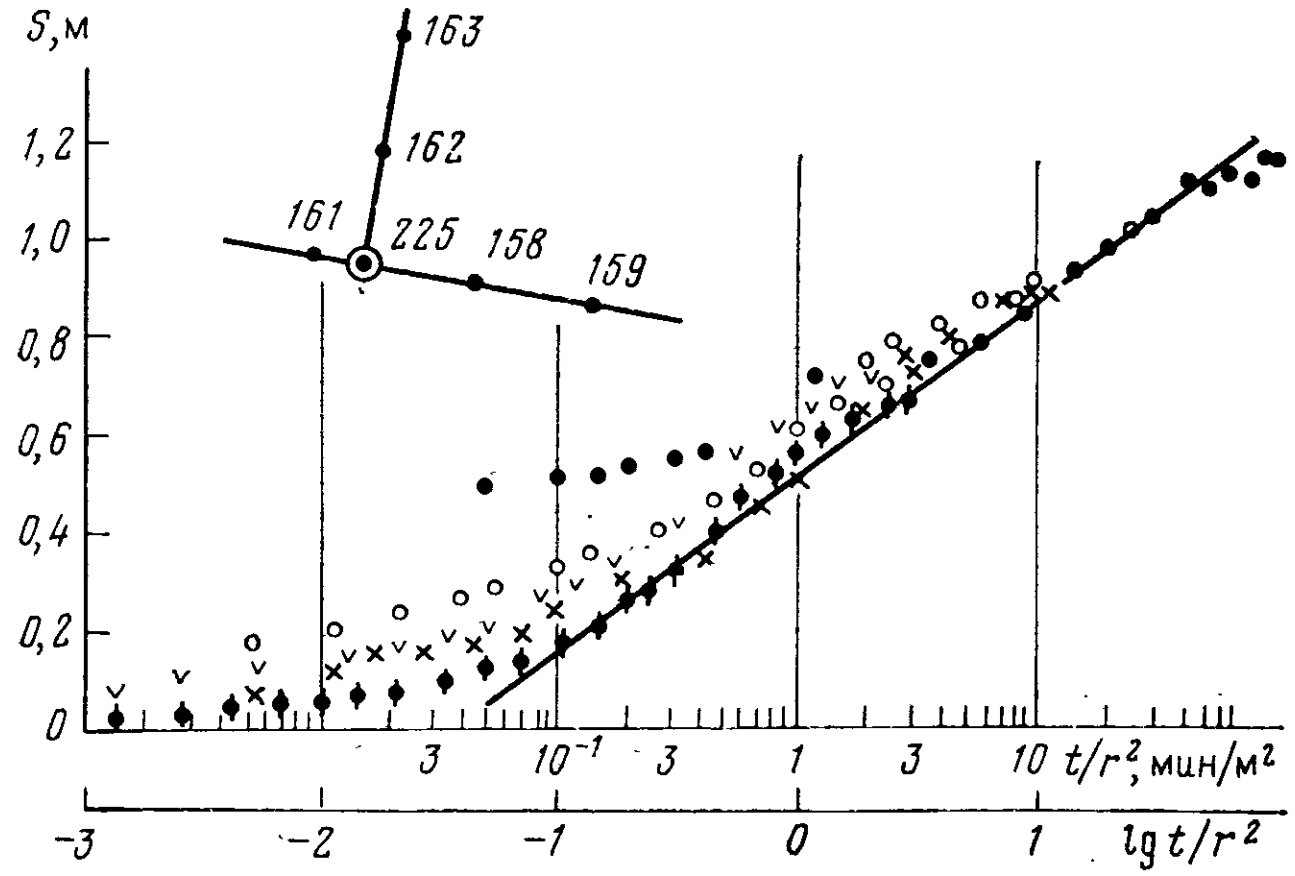


Рис. 15.7. График комбинированного прослеживания при откачке из равномерно-трещиноватого водоносного горизонта с двойной пористостью [5].

Расстояние наблюдательных скважин от опытной: *1* — 10 м; *2* — 30 м; *3* — 30 м; *4* — 39 м *5* — 59 м

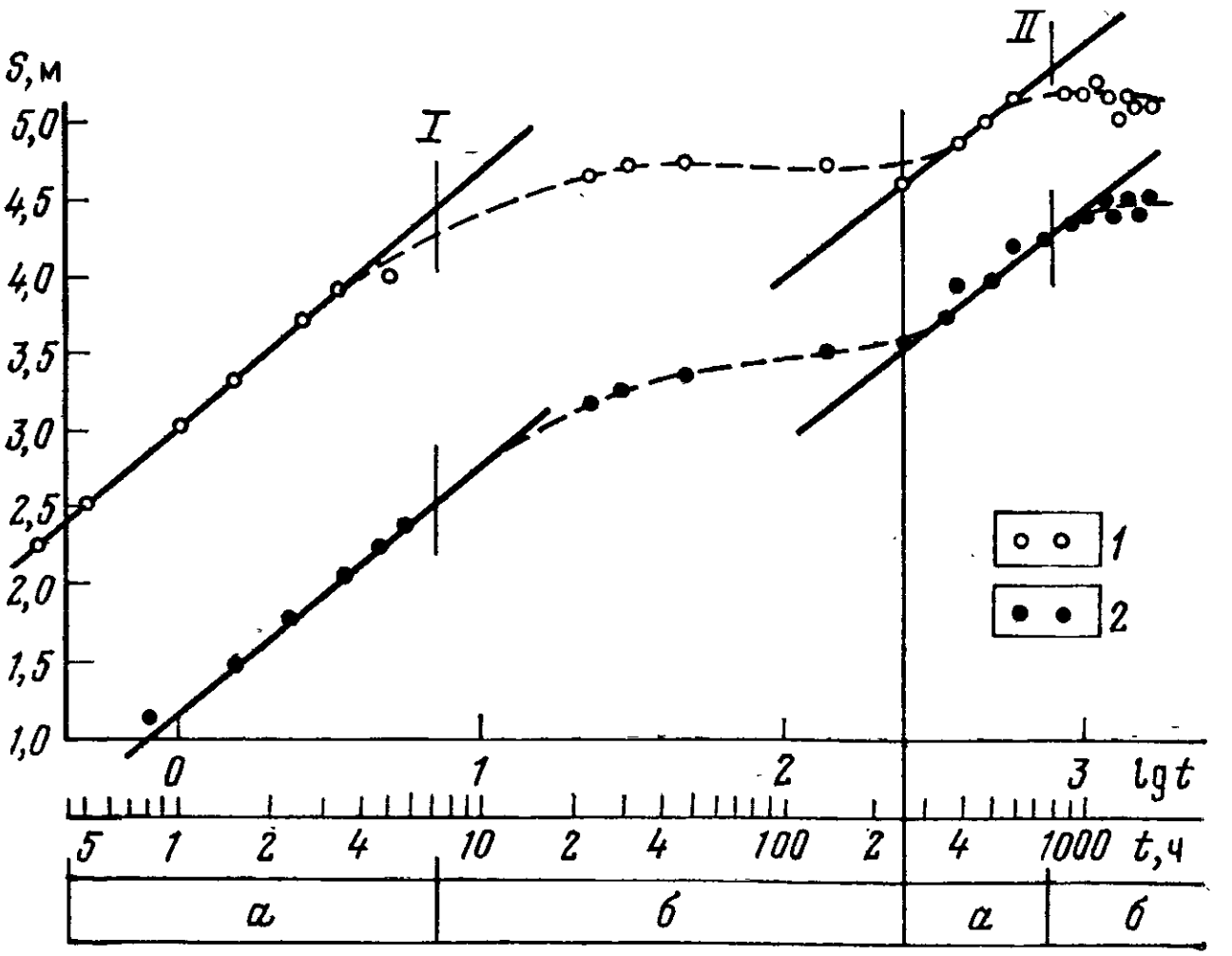


Рис. 15.8. Характерные графики временно́го прослеживания при откачке из напорного трещинно-карстового пласта с двойной пористостью вблизи реки [5]:

1, *2* — наблюдательные скважины. I. II — участкн: *а*. *б* — зоны

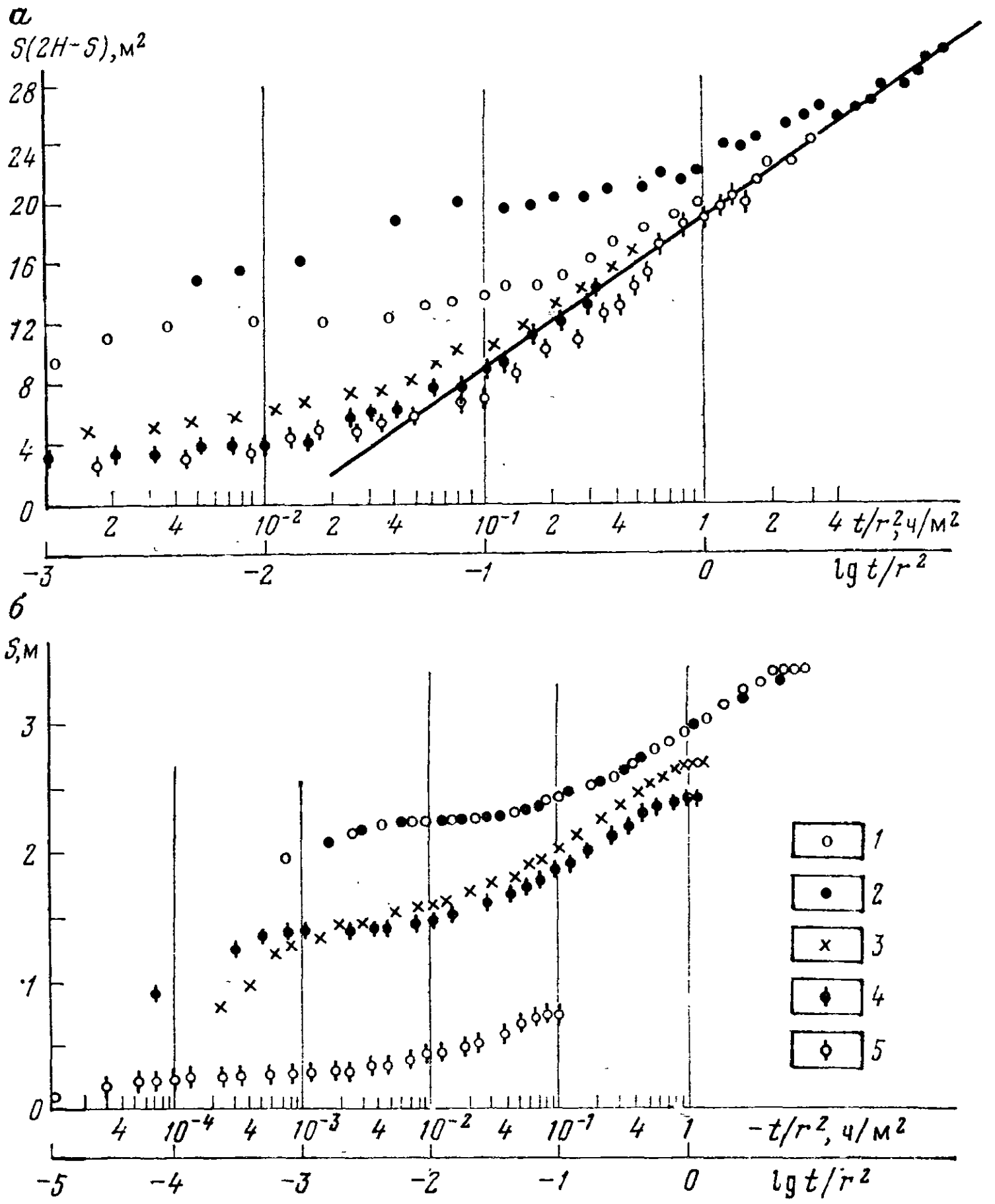
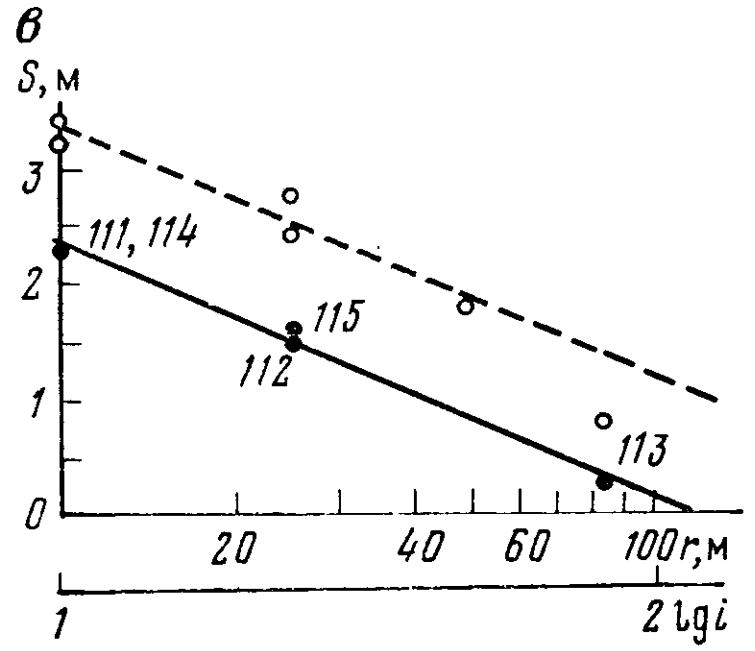


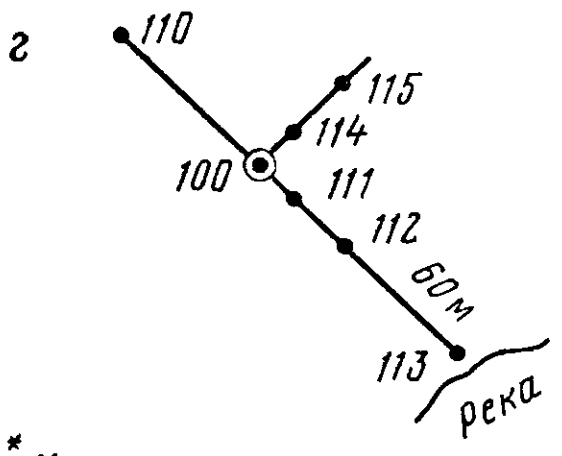
Рис. 15.9. Графики комбинированного прослеживания при откачке из грунтовых вод, характеризующие эффект Болтона [5]:

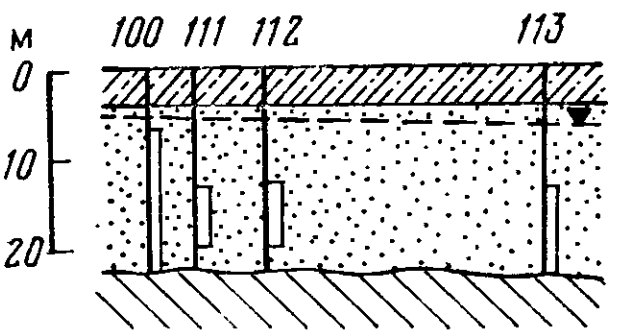
а — графики прослеживания понижения для наблюдательных скважин (все выходят на общую асимптоту, которая используется для определения параметров); *б—г* — графики полученные с учетом влияния реки, совпадающего с диапазоном времени асимптотических участков (*б* — графики прослеживания понижения выполаживаются и не выходят на общую асимптоту, имеют периоды ложной и действительной стабилизации, по которым определяются параметры, *в* — графики площадного прослеживания, которые строятся на эти периоды (сплошная линия — 3 ч, пунктирная — 672 ч) являются контрольными, *г* — графики прослеживания восстановления уровня не обнаруживают эффекта Болтона). Расстояния опытной скважины до наблюдательных: *1* — 5 м; *2* — 10 м; *3* — 15 м; *4* — 26 м; *5* — 31 м

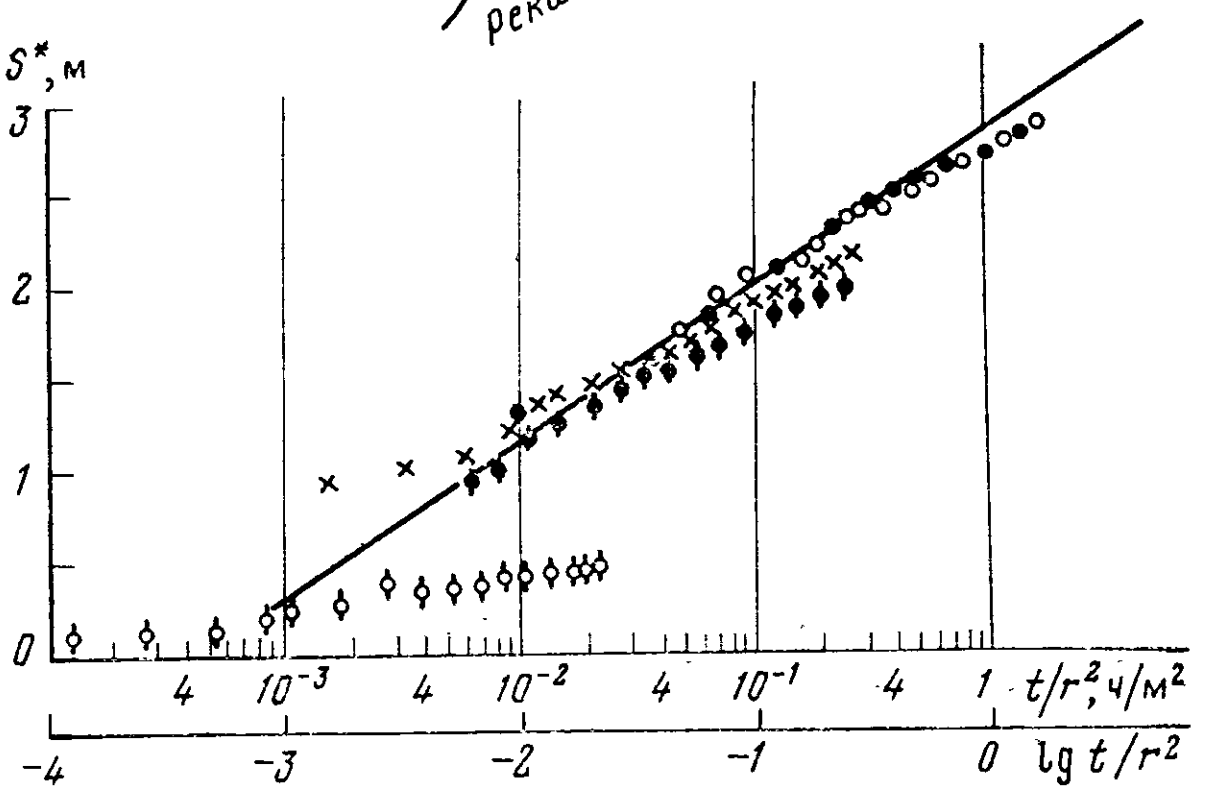
а уклон второго прямолинейного участка увеличивается (см. рис. 15.6, прямая *3*);

г) неоднородное строение пласта, переменность дебита в процессе откачки и др.









Все графики прослеживания обеспечивают более достоверное определение параметров, чем аналитические способы, так как для построения графиков используется вся имеющаяся информация как по временно́й координате (S — ln t), так и по координатам пространства (S — ln r и S — ln t/r^2). Постоянство дебита откачки — одно из обязательных условий достоверного расчета параметров любыми методами, в том числе и графоаналитическим. С целью исключения влияния небольших изменений дебита в процессе откачки графики строят для относительных понижений, т. е. вместо S_i используют координату S_i/Q_i [5, 35].

Остановимся коротко на особенностях интерпретации графиков прослеживания при откачках из грунтовых вод и напорных пластов с гетерогенно-блоковым строением.

Для пластов с двойной пористостью или двойной трещиноватостью графики комбинированного прослеживания, построенные по данным нескольких наблюдательных скважин, выходят на одну асимптотическую ветвь (рис. 15.7), что является диагностическим признаком наличия в пласте гетерогенно-блоковой среды [5, 31, 35]. В этом случае на графике временно́го прослеживания выделяется ложностационарный участок (рис. 15.8, участок I, зона *б*), и чем меньше разница в емкости трещин и пористых или трещиноватых блоков, тем хуже выражен ложностационарный период. Левая крутая ветвь участка I (зона *а*) соответствует периоду фильтрации при водоотдаче, определяемой емкостью крупных трещин. Обычно эта часть участка I вырождается, и на графике S — ln t наблюдается резкий скачок уровня во всех наблюдательных скважинах при пуске откачек (за счет быстроты распространения возмущения от откачки по крупным трещинам). Если участок I (зона *а*) выражен, то по нему наложенным выше способом определяют параметры T и a для среды, представленной крупными трещинами. Длительность периода, соответствующего участку I на графике, может изменяться от нескольких минут до сотен часов [5]. Ложностационарный участок может быть ошибочно признан за стационарный (влияние реки или зоны с очень высокой проницаемостью).

Значительная длительностью ткачек позволяет более определенно диагностировать результаты опытной откачки, так как по прошествии времени при наличии двойной трещиноватости проявится второй прямолинейный участок II (зона *а*) (см. рис. 15.8). Этот участок отвечает условиям фильтрации в среде с обобщенными параметрами, где одновременно работают и крупные трещины, и трещиноватые блоки.

Сложность интерпретации графиков S — ln t заключается в том, что поскольку величина времени запаздывания η^* неизвестна, то участок II (зона *а*) может быть ошибочно принят за участок, где сказывается влияние непроницаемой границы или зоны с низкой водопроводимостью.

Общий вид графика на рис. 15.9 морфологически напоминает график, отвечающий схеме перетекания в двухслойном пласте или двухпластовой системе. Аналогичную форму имеет и график откачки грунтовых вод из несовершенной скважины. В первый период откачки в силу того, что фильтры скважин находятся значительно ниже зеркала грунтовых вод, в расположенных вблизи наблюдательных скважинах снижение уровня определяется проявлением упругих свойств пласта и формируется первый прямолинейный участок. Затем начинает сказываться влияние процесса гравитационного осушения и переформирования капиллярной каймы (эффект Болтона), о чем речь шла в гл. 4. В этот период скорость снижения уровня существенно уменьшается и на графике появляется ложностационарный участок. При достаточной длительности опыта появляется третий участок, скорость формирования которого полностью определяется гравитационной водоотдачей пласта в целом.

Сказанное еще раз подчеркивает сложность и нередко неоднозначность интерпретации данных опытных работ и требует от исследова-

теля знания особенностей диагностических (эталонных) графиков. Различные способы интерпретации и диагностики излагаются в работах [5, 31, 35, 54].

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите параметры пород, пласта и скважины?
2. На какие группы можно разделить все методы определения параметров по откачкам?
3. В чем суть методов подбора и линейной анаморфозы? Какой из них достовернее?
4. Какие факторы могут осложнять определение параметров по графикам прослеживания?
5. Какие расчетные схемы и почему имеют схожие графики прослеживания?
6. В чем суть диагностики и идентификации данных опытных откачек?
7. В чем суть понятия «неоднозначное решение обратной задачи»? Может ли это проявиться при определении параметров по графику временного прослеживания? Методом подбора?
8. Какие погрешности возникают, если определение T вести аналитическим расчетом по формуле (15.2)? По графику площадного прослеживания?
9. Почему при откачке из грунтовых вод на графике S—ln t появляется ложностационарный период? Может ли появиться такой период при откачке из напорного пласта, сложенного закарстованными породами?
10. По каким признакам можно «увидеть» на графике S—ln t влияние непроницаемой границы?
11. Запишите формулу, пользуясь которой можно определить по откачке параметр $\Delta L_{нд}$, и приведнте ее к виду (15.9).
12. Почему не рекомендуется определять a по данным центральной скважины?

Глава 16

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ ВОДОЗАБОРОВ

Теория водопритока к скважинам используется при решении практических задач трех групп: 1) гидродинамические расчеты водозаборов; 2) определение гидрогеологических параметров пластов по данным опытно-фильтрационных работ; 3) выбор рационального варианта работы водозабора.

Рассмотрим решение задач первой и третьей групп

16.1. ПОНЯТИЕ О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ ВОДОЗАБОРА

Под *гидродинамическим расчетом* будем понимать исследование гидродинамического режима потока подземных вод, формирующегося при различных схемах водоотбора, и определение расчетных гидродинамических параметров водозабора, обеспечивающих решение задачи при соблюдении заданных гидродинамических критериев. Исследование гидродинамического режима включает: 1) обоснование принятой математической модели (расчетной схемы) и оценку принятых при схематизации допущений, исследование конкурирующих расчетных схем строения пласта; 2) выявление решением серии прямых (прогноз-

ных) задач характера зависимости расчетных параметров водозабора от схемы, числа и режима работы скважин; 3) установление главных факторов и источников, формирующих гидродинамический режим потока и принятую величину водоотбора. *Расчетные гидродинамические параметры водозабора* характеризуют условия его работы и включают: а) число n, схему расположения и расстояние σ между скважинами; б) расчетную величину понижения $S_р$ в скважинах водозабора.

Гидродинамическими критериями (с учетом вопросов охраны геологической среды от негативного влияния на нее интенсивного водоотбора) являются: а) предельно допустимые понижения $S_{доп}$ уровня в водозаборных скважинах; б) экологически допустимые понижения $S_{эк}$ уровня в эталонных точках потока; в) критическая глубина $h_{кр}$ залегания уровня грунтовых вод от поверхности земли (или норма осушения); г) требуемое снижение пьезометрического уровня $H_{тр}$ в заданной точке потока.

Эталонными точками (или зонами) являются представительные участки потока, в пределах которых формирование гидродинамического режима потока позволяет судить о выполнении поставленных экологических требований. Намечаются они при гидродинамическом районировании (см. гл. 5). Точки (зоны), в которых требуется снизить уровень ниже определенной глубины, задаются содержанием решаемой задачи.

Величина $S_{эк}$ связана с конкретным содержанием охранной задачи и представляет собой допустимое понижение уровня, предупреждающее, например, осушение пласта и возникновение негативных изменений в соседних водозаборах, осушение мелких рек и негативное изменение их водного баланса. По гидродинамическим критериям оценивают полученные результаты. Расчет считается выполненным, если в заданных точках соблюдается условие

$$S_{р,i} \leqslant S_{доп,i};\ S^{эт}_{р,i} \leqslant S_{эк,i};\ h_{р,i} \geqslant h_{кр,i}. \qquad (16.1)$$

Значения $S_{доп}$ определяются гидрогеологами, $h_{кр,i}$ — проектировщиками; $S_{эк,i}$ получают от специалистов экологов.

16.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЙ

Гидродинамическим расчетам водозаборов посвящены работы Н. Н. Биндемана, Ф. М. Бочевера [6], Л. С. Язвина [57], Б. В. Боревского, Н. А. Плотникова, Н. И. Плотникова [39], Е. Л. Минкина, И. К. Гавич [11] и др.

При гидродинамическом расчете водозабора гидрогеолог определяет величину $S_{доп}$, пользуясь следующими зависимостями:

для напорных вод

$$S_{доп} = \Delta H_{изб} + 0{,}5m; \qquad (16.2)$$

для грунтовых вод

$$S_{доп} = (0{,}6—0{,}7)\, h_е — \Delta h_н, \qquad (16.3$$

где $\Delta H_{изб}$ — величина избыточного в начальный момент напора над кровлей исследуемого водоносного горизонта; h_e — начальная мощность грунтовых вод; $\Delta h_н$ — столб воды в скважине над верхней границей погружного насоса (обычно не менее 1 м).

Постановка гидродинамического расчета для водозабора формулируется так:

з а д а н ы: суммарный водоотбор $Q_{сум} = \sum_1^n Q_i$, наиболее вероятная схема гидрогеологической структуры потока подземных вод в виде исходной расчетной схемы (или несколько наиболее вероятных ее вариантов), расчетные значения гидрогеологических параметров (k, μ, m, k_0, m_0, T, μ^*, a, B и т. п.), начальные и граничные условия на принятых границах потока;

т р е б у е т с я: обосновать гидродинамическую структуру потока, выбрать такое число n^* водозаборных скважин и схему их расположения, определив расстояния σ между ними и расчетные значения $S_{р,i}$, $S^{эт}_{р,i}$, $h_{р,i}$, которые обеспечивают получение заданного водоотбора $Q_{сум}$ при соблюдении гидродинамических критериев (16.1).

Цель такой постановки — нахождение рационального с гидродинамической точки зрения варианта работы водозабора, удовлетворяющего критериям $S_{доп}$ и $S_{эк}$ и $h_{кр}$. Последние рассматриваются как некоторые ограничения, управляющие гидродинамическим режимом водоотбора. В общем для выбора рационального варианта водоотбора в постановку задачи необходимо дополнительно включить условия, определяющие формирование заданного гидрогеохимического режима потока подземных вод и получение наилучших технико-экономических показателей для эксплуатации водозабора и разработки месторождения подземных вод (МПВ) в целом. Такая постановка отвечает понятию з а д а ч и о п т и м и з а ц и и. С некоторыми методами ее решения можно ознакомиться в работе [28]. Задача оптимизации в гидродинамической постановке рассмотрена в разд. 16.5.

Гидродинамическая постановка задачи расчета дренажа отличается от аналогичной для водозаборных скважин тем, что задан не суммарный водоотбор, а норма осушения $h_{кр}$ по (16.1). Это условие должно быть выполнено на площади, где необходимо снизить уровень подземных вод. При этом определяются следующие г и д р о д и н а м и ч е с к и е п а р а м е т р ы д р е н а ж а: число скважин n, схема их расположения σ, расчетная величина понижения $S_р$, расчетный дебит скважины $Q_р$ и суммарный их дебит $Q_{сум}$. Такая постановка всегда предполагает рассмотрение конкурирующих вариантов и выбор наиболее рационального.

Для удобства исследования формирующегося гидродинамического режима используют методы обобщенных систем и фильтрационных сопротивлений, сравнивая результаты конкурирующих вариантов по величине $f_{вн}$. Составляют графики связи числа скважин n расстояний σ между дренажными скважинами и расстояния дренажа l от осушаемой зоны с величиной понижения уровня $S^*_{р,i}$ в обобщенной системе. По этим графикам определяют те минимальные значения параметров

дренажа, при которых обеспечивается выполнение следующих критериев: на осушаемой территории $h_{р,i} \geqslant h_{кр,\,i}$, в дренажных скважинах $S_{р,i} \leqslant S_{доп}$ и на исследуемой территории в целом $S_{р,\,i} \leqslant S_{эк,\,i}$. Такие расчеты рассмотрены в работах [30—34].

16.3. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ВОДООТБОРА НА РЕЧНОЙ СТОК

Для схемы полуограниченного пласта с прямолинейной границей постоянного напора (см. рис. 13.8) величина водоотбора из скважин определяется притоком из реки. Следовательно, речной сток, привлекаемый к водозабору в процессе его эксплуатации,— это главный фактор (источник) формирования водоотбора, понижений уровня в водозаборных скважинах и пьезометрической поверхности в пределах всей зоны влияния откачки. Создающийся гидродинамический режим потока подземных вод зависит от характера связи потока с рекой. Обобщенно она оценивается величинами параметра $\Delta L_{нд}$ или вертикального гидравлического сопротивления русловых отложений $A_0 = m_0/k_0$ (измеряется в сутках). Чем они меньше, тем теснее гидравлическая связь. Эти показатели определяются по данным полевых работ [31, 35, 54].

Гидродинамическое взаимное влияние водоотбора и речного стока можно оценить с помощью гидродинамической сетки. При этом находят уравнение линий тока и положение раздельной линии, выделяющей в потоке область, в пределах которой отмечается приток воды из реки в водозабор. Такая схема показана на рис. 13.3 для условий, когда $I_6 > 0$ и справа недалеко от скважины располагается река, питающая поток грунтовых вод, а также на рис. 16.1.

Рассмотрим принцип решения такой задачи. Запишем уравнение [6], учитывая по методу суперпозиции наличие бытового (естественного) потока подземных вод q_6, направленного до откачки к реке (рис. 16.1):

$$S = S_{скв} + S_e = -\frac{Q}{4\pi T} W\left(\frac{r^2}{4at}\right) + \\ + \frac{Q}{4\pi T} W\left(\frac{\rho^2}{4at}\right) + \frac{q_6}{km} \qquad (16.4)$$

при $r^2 = y^2 + (x_0 - x)^2$ и $\rho^2 = y^2 + (x_0 + x)^2$.

Продифференцировав уравнение (16.4) по x, найдем составляющую скорости фильтрации по координате x:

$$v_x = -k\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi m}\left(\frac{x_0 - x}{r^2} e^{-\frac{r^2}{4at}} + \right. \\ \left. + \frac{x_0 + x}{\rho^2} e^{-\frac{\rho^2}{4at}}\right) - \frac{q_6}{m}. \qquad (16.5)$$

При $\rho^2/(4at) \leqslant 0{,}1$ формируется стационарный режим, и тогда из уравнения (16.5)

$$v_x \approx \frac{Q}{2\pi m}\left(\frac{x_0 - x}{r^2} + \frac{x_0 + x}{\rho^2}\right) - \frac{q_6}{m}. \qquad (16.6)$$

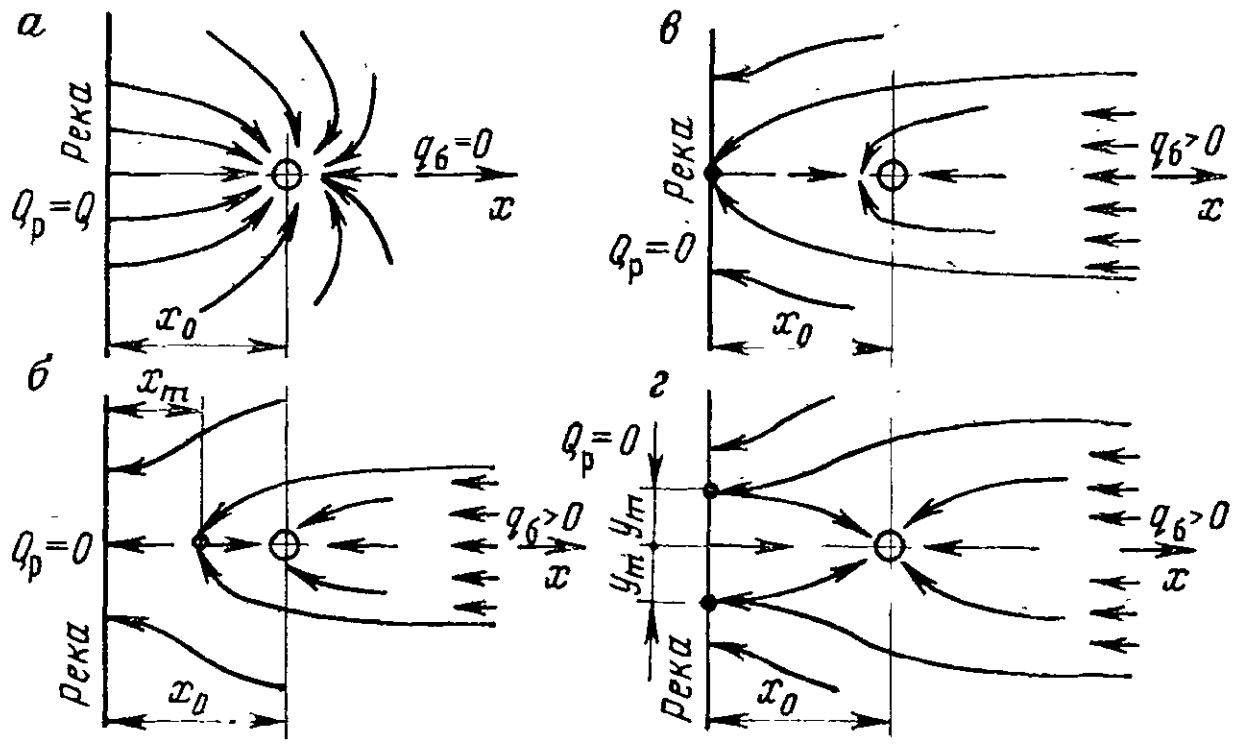


Рис. 16.1. Схемы фильтрационных течений к скважине вблизи реки (по Ф. М. Бочеверу)

Приравнивая к нулю выражение (16.6), получаем координату точки разветвления потока, через которую проходит раздельная линия, ограничивающая область питания скважины. Существуют четыре варианта связи потока с рекой (см. рис. 16.1):

а) расход скважины полностью обеспечивается фильтрацией из реки, что отвечает условиям, рассмотренным в гл. 14;

б) расход скважины обеспечивается только притоком подземных вод $q_б$, и раздельная точка находится между скважиной и рекой; координаты этой точки при условии $Q < \pi x_0 q_б$ следующие:

$$y_р = 0;\ x_р = \sqrt{x_0\left(x_0 - \frac{Q}{\pi q_б}\right)}; \tag{16.7}$$

в) расход скважины обеспечивается только потоком $q_б$, и тогда раздельная точка находится на урезе реки ($Q = \pi x_0 q_б$ и $y_р = x_р = 0$);

г) расход скважины обеспечивается потоком $q_б$ и фильтрацией речных вод, на урезе реки образуются две раздельные точки, координаты которых при $Q > \pi x_0 q_б$

$$y_р = \pm\sqrt{x_0\left(\frac{Q}{\pi q_б} - x\right)};\ x_р = 0. \tag{16.8}$$

Нейтральная (раздельная) линия тока, ограничивающая область питания потока, находится по уравнению функции тока ψ, которое получается [6, 16] из выражения (10.6):

$$\Psi = -\int v_x dy = -\frac{Q}{2\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x_0 - x} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arctg}\frac{y}{x_0 + x}\right) - q_б y + C. \tag{16.9}$$

Постоянная интегрирования C определяется из условия $x = 0$, $\psi = 0$ и равна 0. Задаваясь любым значением y и в силу симметрии полагая $\psi = Q/2$, по выражению (16.9) можно найти координаты x раздельной линии.

Величина расхода из реки $Q_р$ определяется согласно уравнению (16.9)

$$Q_р = 2m \int_0^{y_р} v_x \Big|_{x=0} dy.$$

При $q_б = 0$ (см. рис. 16.1, *а*) теоретически фильтрация из реки идет на бесконечно большой длине уреза реки ($y_р = \infty$), и расход, поступающий при этом в поток подземных вод, определяется по формулам:

$$Q_р = Q \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{F_0}}\right); \quad F_0 = \frac{at}{x^2_0}, \tag{16.10}$$

а при длительных откачках, когда справедливо условие (16.6) (см. рис. 16.1, *г*)— по формуле

$$Q_р = \frac{2Q}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_р}{x_0} - 2q_б y_р, \tag{16.11}$$

где $y_р$ вычисляют по формуле (10.8).

Ширина зоны захвата потока из реки $B = 2y_р$ устанавливается из балансового соотношения

$$Q = \frac{2Q}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_р}{x_0} + 2(B - y_р) q_б,$$

решая которое относительно B, получим

$$B = \frac{Q}{\pi q_б} \operatorname{arctg} \frac{x_0}{y_р} + y_р. \tag{16.12}$$

Доля речных вод $Q_р$ в расходе скважины, как видно из уравнений (10.7) — (10.12), зависит от соотношения Q и $q_б$, а также величины x_0; она может быть значительной и существенно уменьшить расход реки. Влияние этих потерь оценивается по формулам (16.10), (16.11).

Другие аналитические схемы рассмотрены в работах [6, 16, 54]. В сложных случаях гидродинамические сетки строят графически или с помощью моделирования [11, 16].

При исследовании гидродинамики береговых водозаборов даже в случаях, рассмотренных на рис. 16.1, *б*, *в*, необходимо учитывать влияние реки. Понижение уровня, вызванное откачкой, распространяется на значительные расстояния, и несмотря на то, что в этих случаях из реки непосредственно вода в скважину не поступает, понижение пьезометрического уровня будет сказываться и в области, расположенной за нейтральной линией. В настоящее время оценка взаимосвязи поверхностных и подземных вод при решении проблемы рационального использования водных ресурсов ставится как оптимизационная задача, т. е. находят такой вариант их совместного исполь-

зования, при котором отбирается требуемое количество подземных вод и сохраняется заданная экологическая и гидрологическая обстановки в речном бассейне. Такие задачи рассматриваются в работах Е. Л. Минкина, С. Я. Концебовского, А. К. Бисваса и др. [13, 45].

Исследование гидродинамической структуры потока вблизи реки важно и в связи с проблемой охраны подземных вод от загрязнений. Зная размеры области захвата, вычисленные по формулам (16.6), (16.8), (16.12), и соответствующие им расходы воды из реки, полученные по формулам (16.10) и (16.11), оценивают возможности загрязнения подземных вод речными (если последние не отвечают требованиям ГОСТа на питьевую воду) и рассчитывают для предупреждения этого явления размеры зон санитарной охраны водозаборов [6, 39].

16.4. ПОНЯТИЕ О ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ

Проблема рационального водоотбора подземных вод всегда связана с выбором из различных вариантов такого, который наиболее полно удовлетворяет поставленным критериям, т. е. выбирается о п т и м а л ь н ы й в а р и а н т [28]. В качестве критериев оптимальности обычно принимают технико-экономические показатели. Но можно сузить задачу и поставить ее так: выбрать на основе некоторых гидродинамических критериев такой наилучший (оптимальный) вариант размещения и режима работы водозаборных скважин (их распределение, дебиты при заданном суммарном водоотборе), чтобы была достигнута поставленная цель и соблюдалась заданная гидрогеологическая обстановка. В данном случае цель может быть, например, такой: получить максимальное количество воды за определенный срок. Рассмотрим содержание и последовательность решений задачи оптимизации.

1. Заданы водоносный горизонт и эксплуатирующий его водозабор. Принимаем, что водоотбор зависит от основных N изменяющихся $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ параметров. Такими параметрами являются число, расход и конструкция водозаборных скважин, понижение уровней и другие характеристики водозаборного сооружения и месторождения подземных вод.

2. Формулируют цель, которую надо достичь в виде так называемой ц е л е в о й ф у н к ц и и F, зависящей от этих параметров $(F = f(x_1, x_2, \ldots, x_N))$. Эта функция является математическим результатом решения всей задачи. Ее называют к р и т е р и е м оптимизации, или п о к а з а т е л е м к а ч е с т в а р е ш е н и я з а д а ч и. Оптимальных вариантов может быть выбрано много в зависимости от того, каким критерием мы будем пользоваться, т. е. возникает так называемая многокритериальная постановка. Обычно задачу упрощают. Выбирают один критерий, наиболее важный для рассматриваемой задачи, и принимают его за целевую функцию. Остальные критерии представляют в виде различных ограничений, которыми оценивают, насколько можно допускать их частичное уменьшение или увеличение, добиваясь минимизации или максимизации целевой функции.

Известно, что с гидродинамических позиций водоотбор считается обеспеченным, если расчетные значения понижений $S_р$ оказываются меньше допустимых $S_{доп}$. Поэтому в качестве критерия можно принять такое, например, требование: максимально продлить срок эксплуатации месторождения при условии, что во всех водозаборных скважинах расчетные значения понижений достигают предельных значений одновременно (что благоприятно для эксплуатации водозабора).

3. Выделяют главные параметры управления x_j, т. е. искомые характеристики, изменяя которые определенным образом находят решение задачи. Их число и конкретное содержание зависят от поставленной цели. В данном случае — это число скважин, их расположение и режим эксплуатации.

4. Формулируют ограничения, т. е. допустимые изменения параметров x_i

$$\beta_i \leqslant x_i \leqslant \alpha_i, \tag{16.13}$$

где α_i, β_i — границы допустимых изменений параметров.

Ограничения выражают различные связи параметров между собой и требования на введенные параметры, которые вытекают из существа решаемой задачи. Они определяют соблюдение заданных гидрогеологической и экологической обстановок, а также технических условий эксплуатации водозаборных скважин. Ограничения (16.13) могут быть заданы в виде равенств, представленных функциями ψ, зависящими от некоторых параметров x_i,

$$\psi_к(x_1, x_2, \ldots, x_{m_k}) = 0;\ k = 1, 2, \ldots, p;$$
$$m_k \leqslant N, \tag{16.13а}$$

или неравенствами в виде функций φ, также зависящих от некоторых параметров x_i,

$$\varphi_j^* \leqslant \varphi_j = (x_1, x_2, \ldots, x_{m_j}) \leqslant \varphi_j^{**}$$
$$\text{при } j = 1, 2, \ldots, h;\ m_j \leqslant N, \tag{16.13б}$$

где k и j — число условий типа (16.13а) и (16.13б) соответственно; $m_к$ и m_j — число параметров, которыми определяются функции ψ и φ соответственно; φ_j^* и φ_j^{**} — границы возможного изменения значений функции φ; m — число параметров, определяющих функции ψ и φ.

Математически задание ограничений означает [28], что в N-мерном пространстве ограничения вида (16.13) выделяют параллелепипед объемом $V = \prod_{i=1}^{N} (\alpha_i - \beta_i)$. Ограничения вида (16.13а) и (16.13б) в этом параллелепипеде выделяют некоторое множество объемов V_D, которое называется областью допустимых значений. Предполагается, что отношение V_D/V не слишком мало. Тогда общая оптимизационная задача может быть сформулирована следующим образом: требуется найти такую точку $x^0 = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_N^0\}$ в N-мер-

ном пространстве, принадлежащую области V_D, в которой значение критерия оптимальности минимально (максимально)

$$F = F\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots\ .\ x_N^0\right) = \min;$$
$$\{x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots\ ,\ x_N^0\} \in V_D. \qquad (16.14)$$

Гидрогеологически условие (16.14) означает, что выбирается оптимальный вариант работы водозаборных скважин (их число, размещение, дебиты); обеспечивающий достижение поставленной цели при других характеристиках, заданных в виде ограничений (16.13а) и (16.13б).

Выделяют несколько стадий обоснования водохозяйственных мероприятий и отвечающих им стадий гидрогеологических изысканий и исследований [28]. Для каждой из них могут быть сформулированы свои задачи оптимизации, различающиеся целями и параметрами управления. Соответственно стадии определяются ограничения и обосновываются их конкретное содержание и числовые значения. Так, на стадии детальной разведки, данные которой обосновывают проект водозабора, еще не утверждены число и схема размещения будущих водозаборных скважин, не определены окончательно их дебиты. Все эти показатели можно изменять и включать как искомые в постановку задачи оптимизации. Более того, еще не осуществлены капитальные затраты на сооружение и обустройство водозабора, поэтому в качестве критерия оптимальности целесообразно принять экономические показатели, например минимизировать приведенные затраты, а все гидрогеологические и другие показатели представить в виде ограничений. На стадии эксплуатационной разведки строительство водозаборных скважин закончено, капитальные затраты сделаны, водозабор работает. Число, конструкция, местонахождение скважин выбраны и изменять их нельзя. В этом случае основным критерием становится гидродинамический (например, максимальный срок эксплуатации водозабора), а искомым параметром — оптимальное распределение дебитов между действующими водозаборными скважинами. Задача максимального продления срока эксплуатации водозабора имеющимся насосным оборудованием при заданном режиме водопотребления встречается на практике часто в связи с тем, что производительность водозабора лимитирована величиной эксплуатационных запасов месторождения и пропускной способностью магистральных водоводов.

С таким целевым назначением рассмотрим ниже конкретную математическую постановку задачи оптимизации водоотбора.

16.5. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ВОДООТБОРА ПРИ ФИКСИРОВАННОМ ПОЛОЖЕНИИ ВОДОЗАБОРНЫХ СКВАЖИН

Поставим задачу как определение таких дебитов водозаборных скважин Q_i, при которых суммарный водоотбор $Q_{\text{сум}}$ в течение срока эксплуатации t будет максимальным. При этом понижения уровней S_i

в любой j-й водозаборной скважине не превышают предельно допустимого значения S_j^*, а дебиты скважин находятся в пределах их изменения от 0 до $Q_{\max_i}$ (значения $Q_{\max_i}$ назначаются в зависимости от водопроводимости пласта в том месте, где находится скважина, ее конструкции и технических характеристик насосов).

Предположим, что месторождение содержит только пресные воды, удовлетворяющие по качеству требованиям ГОСТа, поэтому никаких ограничений на качество воды не накладываем. Не будем рассматривать и экологические требования. Для этих условий задачу сформулируем так: требуется найти такие величины дебитов водозаборных скважин Q_i, при которых суммарный водоотбор как критерий оптимальности максимизируется

$$F = \sum_{i=1}^{n} Q_i \to \max \tag{16.15}$$

при соблюдении ограничений

$$S_j(t) \leqslant S_j^*;\ 0 \leqslant Q_i \leqslant Q_{\max_i}, \tag{16.15а}$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, n$ — порядковый номер и число водозаборных скважин.

Величины S_j зависят от гидрогеологических условий района, дебитов скважин Q_i и времени их эксплуатации t. В относительно простых условиях S_j рассчитывают по аналитической формуле

$$S_j = \frac{1}{2T} \sum_{i=1}^{n} Q_i f_{j,i}, \tag{16.16}$$

где $f_{j,i}$ — безразмерное гидравлическое сопротивление.

Для напорных вод зависимость (16.16) представим иначе, использовав линейную связь понижения S_j с дебитом скважины,

$$S_j = \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} Q_i, \tag{16.17}$$

где $a_{j,i}$ — некоторые функции влияния i-й скважины на j-ю, которые учитывают фильтрационные и емкостные свойства пласта, вид границ, расстояния до них и между скважинами. Устанавливаем (см. гл. 14), что $a_{j,i}$ — это известное уже нам $\Phi_{i,j}$ фильтрационное сопротивление пласта, т. е.

$$a_{j,i} = f_{j,i}/(2T) = \Phi_{j,i}. \tag{16.17а}$$

Величины $a_{i,j}$ согласно уравнению (16.17) физически представляют собой понижения уровня в j-й скважине под влиянием эксплуатации i-й с единичным дебитом. Введение функции $a_{i,j}$ позволяет весьма просто получить значения $S_j(t)$ для всех взаимодействующих скважин

и представить ограничения типа (16.15а) в виде неравенств, записанных как система линейных алгебраических уравнений (что способствует ускорению математических вычислений). С учетом (16.17) условия (16.15) и (16.15а) принимают вид:

$$F = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots + Q_n \to \max; \tag{16.18}$$

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + \ldots + a_{1n}Q_n \leqslant S_1^* \\ &a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + \ldots + a_{2n}Q_n \leqslant S_2^* \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}Q_1 + a_{n2}Q_2 + \ldots + a_{nn}Q_n \leqslant S_n^* \\ &0 \leqslant Q_i \leqslant Q_{\max_i};\ i = \overline{1,\ n} \end{aligned}\right\} \tag{16.18а}$$

Принцип расчета функций влияния заключается в следующем: 1) в одной из n скважин, например первой ($i = 1$), задают единичный дебит, в то время как расходы всех остальных скважин считают равными нулю; 2) определяют S_j во всех скважинах, которые соответствуют $a_{j,\,1}$ — первому столбцу системы ограничений (16.18а); 3) перебирая все скважины ($i = \overline{2,\ n}$), аналогичным образом находят остальные значения функций влияния $a_{j,\,i}$ и получают запись (16.18а). Для скважин значения S_j^* получают по уравнениям (16.2) или (16.3).

Принятая постановка характеризуется тем, что целевая функция F и все ограничения линейны относительно параметров оптимизации Q_i. В этом случае сформулированная задача относится к задаче линейного программирования (ЗЛП).

Если целевая функция или хотя бы одно из ограничений нелинейны относительно Q, то система (16.18) — (16.18а) представляет собой задачу нелинейного программирования (ЗНЛП). В ряде случаев нелинейные функции могут быть заменены кусочно-линейными и ЗНЛП может быть сведена к ЗЛП. Существуют различные методы решения оптимизационных задач [18, 36].

Среди методов линейного программирования наиболее часто используется симплекс-метод. При решении оптимизационных задач с числом неизвестных $n \leqslant 2$ эффективно применение графических методов.

16.6. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Графический способ позволяет на плоскости построить допустимую область решения, в пределах которой отыскивается точка с наименьшим (наибольшим) значением целевой функции. Рассмотрим работу водозабора из двух скважин. Требуется найти такие дебиты Q_1 и Q_2, при которых целевая функция (16.18) имеет вид

$$F = Q_1 + Q_2 \to \max, \tag{16.19}$$

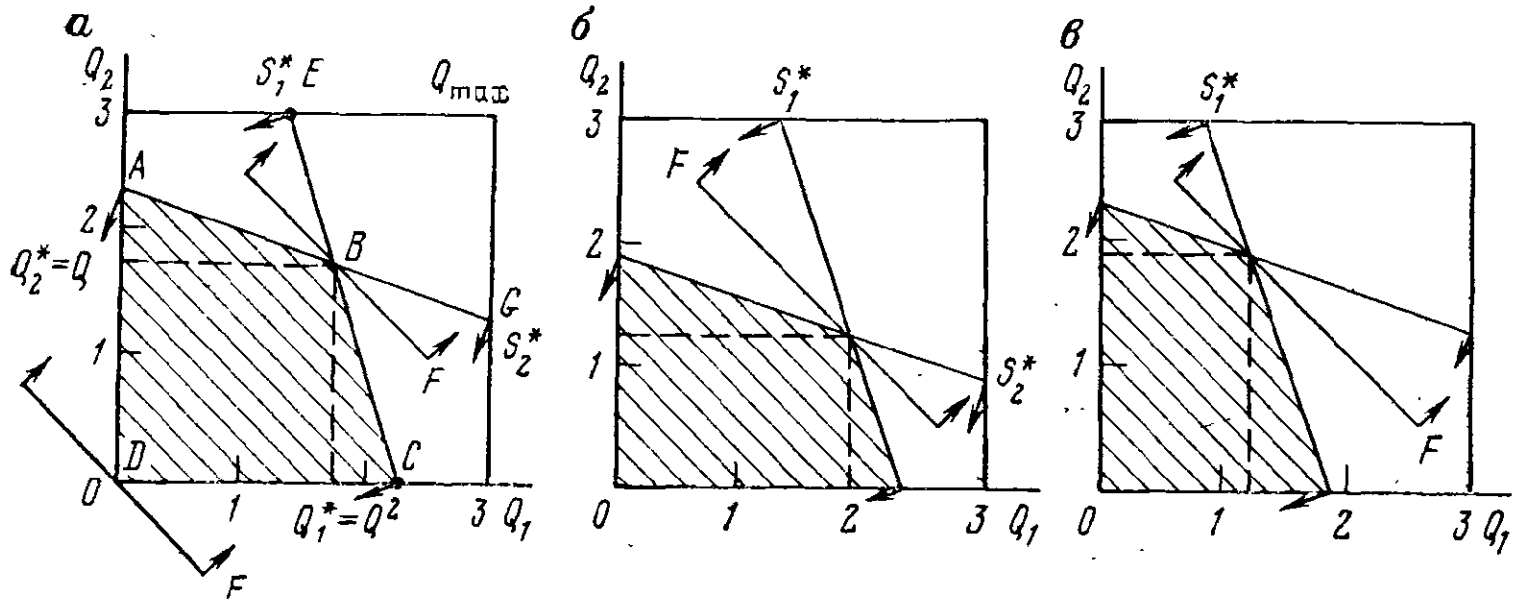


Рис. 16.2. Графическое решение задачи оптимизации (16.19) для двух скважин (по В. И. Угорцу):

а — $S_1^* = S_2^*$; *б* — $S_1^* > S_2^*$; *в* — $S_1^* \vee S_2^*$. Значения Q_1 и Q_2 приведены в тысячах кубических метров в сутки

а ограничения (16.18а) представлены следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 &\leqslant S_1^* \\ a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 &\leqslant S_2^* \\ 0 \leqslant Q_1 &\leqslant Q_{max_1} \\ 0 \leqslant Q_2 &\leqslant Q_{max_2} \end{aligned}\right\} \qquad (16.19а)$$

Для решения задачи в координатах Q_1—Q_2 построим допустимую область решения в следующей последовательности: 1) выделим прямоугольник со сторонами Q_{max_1} и Q_{max_2}, левый нижний угол которого совпадает с началом координат (рис. 16.2). Прямоугольник соответствует двухсторонним ограничениям на возможные дебиты скважин: $0 \leqslant Q_i \leqslant Q_{max_i}$; 2) построим по (16.19а) уравнения прямых

$$Q_1 = \frac{S_1^*}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} Q_2 \text{ и } Q_1 = \frac{S_2^*}{a_{21}} - \frac{a_{22}}{a_{21}} Q_2.$$

Для этого на прямоугольнике соединим по две характерные точки со следующими координатами:

$$C\left(0, \frac{S_1^*}{a_{11}}\right) \text{ и } E\left(Q_{max_2}, \frac{S_1^*}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} Q_{max_2}\right);$$

$$A\left(\frac{S_2^*}{a_{22}}, 0\right) \text{ и } G\left(Q_{max_1}, \frac{S_2^*}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} Q_{max_1}\right);$$

3) внутри прямоугольника выделим область, лежащую ниже прямых CE и AG. Она соответствует ограничениям на предельно допустимые понижения S_1^* и S_2^*. Все ограничения линейны относительно дебитов скважин, поэтому допустимая область представляет собой выпуклый четырехугольник $ABCD$. Любая точка внутри него и на его границах

удовлетворяет заданным ограничениям. Остается найти тv из них. в которой целевая функция будет максимальной.

Целевая функция линейна относительно Q_1, Q_2 и представляет собой прямую, во всех точках которой значения целевой функции одинаковы. Согласно (16.19) коэффициенты при Q_1 и Q_2 одинаковы и равны единице, поэтому при $F = Q_1 + Q_2 = 0$ прямая проходит через начало координат под углом 45° из второй четверти в четвертую (см. рис. 16.2, *а*) и имеет максимальные значения при дебитах, стремящихся к бесконечности.

Чтобы найти максимум целевой функции с учетом принятых ограничений, нужно перемещать прямую F в пределах допустимой области решений параллельно самой себе. При $S_1^* = S_2^*$ максимум целевой функции достигается в точке B (см. рис. 16.2, *а*), являющейся одной из вершин многоугольника $ABCD$. Если перемещать прямую F дальше, то целевая функция F будет возрастать, однако ограничения на S^* выполняться не будут. Таким образом, координаты точки B ($Q_1 = Q_2 = Q$) — это решение задачи (16.19).

При различных величинах S_1^* и S_2^* значения оптимальных дебитов Q_1 и Q_2 неодинаковы. Графическое решение задачи оптимизации (16.19) — (16.19а) при $S_1^* > S_2^*$ приведено на рис. 16.2, *б* пунктиром. Из решения следует, что $Q_1 > Q_2$.

З а д а ч а. Для закрепления изложенного материала читателям предлагается самостоятельно: а) определить, при каком соотношении S_1^* и S_2^* получено графическое решение на рис. 16.2, *в*, б) решить задачу оптимизации, (16.19) — (16.19а) графически при следующих значениях: найти оптимальные дебиты двух водозаборных скважин, работающих в неограниченном напорном пласте($T = 50$ м²/сут; $a^* = 16^6$ м²/сут; радиус скважин $r_0 = 0{,}15$ м; расстояние между ними $r_1 = 1500$ м; $S_1^* = 80$ м; $S_2^* = 100$ м; $Q_{max_1} = Q_{max_2} = 3000$ м³/сут; срок эксплуатацин скважин $t = 25$ лет).

16.7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

При числе переменных $n > 2$ графическое решение невозможно, так как целевая функция и ограничения отображаются гиперплоскостями в пространстве n координат, а допустимая область решений превращается в многогранник. Однако и в этом случае целевая функция достигает максимума в одной из вершин допустимой области или на ребре, параллельном гиперплоскости целевой функции. Поэтому при решении задачи линейного программирования достаточно вычислить целевую функцию лишь в вершинах допустимой области, выбрав ту, в которой достигаются искомые максимум или минимум.

Задача линейного программирования в общем виде может быть записана следующим образом [28, 36]. Требуется найти такие величины x_i, T, $i = 1, \ldots n$, при которых

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min; \qquad (16.20)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{j,i}x_i = b_j,\ i = 1, \ldots m \\ 0 \leqslant x_i \leqslant x_{\max_i}\end{array}\right\}, \qquad (16.20a)$$

где n — число неизвестных; m — число ограничений.

Преобразуем задачу оптимизации (16.18) — (16.18а) к постановке (16.20) — (16.20а) следующим путем: 1) вместо неизвестных x_i будем рассматривать величины Q_i; 2) коэффициенты при неизвестных в целевой функции примем равными $c_i = -1$. В этом случае $F = \Sigma Q_i$ будет стремиться к максимуму, когда $F = \Sigma c_i Q_i = -\Sigma Q_i$ будет стремиться к минимуму; 3) число ограничений m примем равным n; 4) за величину b_j обозначим предельно допустимые понижения S_j^*; 5) ограничения в виде неравенств $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{j,i}Q_i \leqslant b_j$ преобразуем в равенства вида $a_{j1}Q_1 + a_{j,2}Q_2 + \ldots + a_{j,n}Q_n + y_j = b_j$ введением дополнительных переменных y_j. Они определяют недоиспользование запаса величины b_j, что в гидродинамическом отношении отвечает величине, на которую отличается прогнозное понижение уровня от предельно допустимого, т. е. $y_j = S_j^* - S_j = S_j^* - \sum\limits_{i=1}^{n} a_{j,i}Q_i$. После введения дополнительных переменных y_j при $j = 1, \ldots, n$ число неизвестных становится $2n$, что превышает число n равенств. Следовательно, сформированная система линейных уравнений имеет бесконечное число решений, но для нас будут представлять интерес только те, которые соответствуют вершинам допустимой области, т. е. Q_i.

Решение задачи (16.20) — (16.20а) при большом числа переменных осуществляется в два этапа с помощью формализованного алгоритма, называемого с и м п л е к с - м е т о д о м. На первом находится о п о р н о е р е ш е н и е, которое отвечает системе ограничений, а на втором — о п т и м а л ь н о е, при котором величина целевой функции F минимальна [28].

В качестве опорного решения нашей задачи примем $Q_i = 0$ и $y_j = b_j$. Тогда при использовании симплекс-метода условие задачи (16.18) — (16.18а), приведенное к стандартной форме (16.20) — (16.20а), можно отобразить симплекс-таблицей 16.1. В первую строку табл. 16.1 записывают символы оптимизируемых переменных (и единицу в последнем столбце), в следующих r строках — символы дополнительных переменных y (первый столбец), коэффициенты a_{ji}, в последнем столбце — свободные члены b_j, а в нижней F-строке — коэффициенты целевой функции, сохраняя свободной последнюю клеточку таблицы для последующей записи минимизируемых значений целевой функции.

Поиск оптимального решения, соответствующего минимуму целевой функции, обеспечивается следующим алгоритмом.

1. Выбирают столбец с наибольшим по модулю элементом F-строки (без учета последнего элемента, отображающего значение целевой функции). Его называют р а з р е ш а ю щ и м S-столбцом.

Таблица 16.1. Общий вид симплекс-таблицы

y	Q_1	Q_2	. . .	Q_n	1
y_1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}	b_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. .
y_n	a_{n1}	a_{n2}	. . .	a_{nn}	b_n
F	c_1	c_2	. . .	c_n	

2. Для каждого элемента этого столбца вычисляют отношения $b_i/(a_iS)$ и выбирают наименьшее из них. Соответствующий элемент a_{kS} и k-строку называют р а з р е ш а ю щ и м и.

3. Выполняют преобразование таблицы (с записью результатов в новую таблицу), называемое шагом модифицированного жорданова исключения: а) разрешающий элемент a_{kS} заменяют на $a'_{kS} = 1/a_{kS}$; б) элементы разрешающей строки вычисляют по формуле $a'_{ki} = a_{ki}/a_{kS}$; в) элементы разрешающего столбца вычисляют по формуле $a'_{jS} = a_{jS}/a_{kS}$; г) остальные элементы новой таблицы, включая свободные члены и элементы F-строки, вычисляют по формуле $a'_{ji} = a_{ji} - [(a_{jS}a_{ki})/a_{kS}]$; д) меняют местами символы переменных в S-ом столбце и k-й строке.

4. Повторяют операции, описанные в первых трех пунктах, до получения положительных значений элементов F-строки, что отвечает решению задачи оптимизации.

В качестве примера рассмотрим задачу оптимизации водоотбора из трех скважин, работающих в неограниченном в плане и изолированном в разрезе горизонте напорных вод. Параметры пласта $T = 50$ м^2/сут и $a^* = 10$ м/сут. Расстояния между скважинами $r = 1500$ м, их радиус $r_0 = 0{,}15$ м. Требуется найти такое распределение дебитов Q_i ($i = 1, 2, 3$), при которых в течение эксплуатации водозабора ($t = 25$ лет) обеспечивается максимальный суммарный водоотбор, а понижения уровней не превышают допустимых величин ($S_j^* = 100$ м).

Р е ш е н и е 1. Определим величины функций влияния скважин друг на друга при единичном дебите $Q = 1000$ м^3/сут по зависимости (16.17а) для схемы неограниченного пласта. При $r_{11} = r_{22} = r_{33} = r_0$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{Q}{4\pi T} W\left(\frac{r_0^2}{4at}\right) =$$

$$= \frac{1000}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 50} W\left(\frac{0{,}15^2}{4 \cdot 10^6 \cdot 10^4}\right) = 43{,}83 \text{ м},$$

аналогично при $r_{12} = r_{21} = r_{23} = r_{32} = r$

$$a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = \frac{1000}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 50} W\left(\frac{1500^5}{4 \cdot 10^6 \cdot 10^4}\right) = 14{,}51 \text{ м}$$

и при $r_{13} = r_{31} = 2r$

$$a_{13} = a_{31} = \frac{1000}{4 \cdot 3,14 \cdot 50} W\left(\frac{3000^2}{4 \cdot 10^6 \cdot 10^4}\right) = 12,31 \text{ м}.$$

Математическую постановку задачи оптимизации можно представить следующим образом. Необходимо найти такие величины Q_1, Q_2 и Q_3 с размерностью тысячи кубических метров в сутки, при которых выполняются ограничения (16.18а)

$$43,83Q_1 + 14,51Q_2 + 12,31Q_3 \leqslant 100;$$
$$14,51Q_1 + 43,83Q_2 + 14,51Q_3 \leqslant 100;$$
$$12,31Q_1 + 14,51Q_2 + 43,83Q_3 \leqslant 100,$$

а критерий оптимальности (16.18) $F = Q_1 + Q_2 + Q_3 \to \max$.

2. Преобразуем эту постановку к задаче линейного программирования. Введем дополнительные неотрицательные переменные y_j, позволяющие ограничения в виде неравенств представить в форме равенств

$$43,83Q_1 + 14,51Q_2 + 12,31Q_3 + y_1 = 100;$$
$$14,51Q_1 + 43,83Q_2 + 14,51Q_3 + y_2 = 100;$$
$$12,31Q_1 + 14,51Q_2 + 43,83Q_3 + y_3 = 100,$$

а критерий оптимальности представим в виде $F = -Q_1 - Q_2 - Q_3 \to \to \min$.

3. В качестве опорного решения, удовлетворяющего системе ограничений, примем $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$, а $y_1 = y_2 = y_3 = 100$. Тогда начальная симплекс-таблица будет иметь вид, показанный в табл. 16.2.

4. Выберем разрешающий S-столбец с наибольшим по модулю элементом F-строки. Так как все элементы этой строки одинаковы и равны -1, в качестве разрешающего столбца может быть выбран любой, например первый $S = 1$. По наименьшей величине отношения b_j/a_{j1} определяем разрешающий элемент ($a_{11} = 43,83$), который соответствует разрешающий k-строке, это — $k = 1$. В табл. 16.2 (этап 0) он выделен полужирным шрифтом.

5. Выполним первое преобразование исходной симплекс-таблицы в последовательности, изложенной выше, заменив Q_1 на y_1. Разрешающий элемент a_{11} заменим на $a'_{11} = 1/a_{11} = 0,023$ (см. табл. 16.2, этап 1). Элементы разрешающей строки, вычисленные по формуле $a' = a_{1i}/a_{11}$ (при $i = 2,3$; $b'_1 = b_1/a_{11}$), будут равны соответственно 0,331; 0,281 и 2,281. Элементы разрешающего столбца, вычисленные по формуле $a'_{j1} = a_{j1}/a_{11}$ (при $i = 2,3$ и $C'_1 = -C_1/a_{11}$) составят $-0,331$; $-0,281$. Остальные элементы новой таблицы, включая свободные члены b_j и элементы F-строки, вычисляются по формуле $a'_{ji} = a_{ji} - (a_{ji}a_{1i}/a_{11})$. Они представлены в табл. 16.2 (этап 1). Находим в этой таблице разрешающий элемент $a'_{33} = 40,372$, так как c'_3 максимален по модулю, а отношение b'_3/a'_{33} минимально.

6. Последующие преобразования симплекс-таблицы 16.2 (этапы 2, 3 и т. д.) проводим до тех пор, пока все элементы F-строки не будут

Таблица 16.2. Симплекс-таблица для решения задачи оптимизации водоотбора из трех скважин

Номер этапа преобразований	y	Q_1	Q_2	Q_3	1
0	y_1	**43,83**	14,51	12,31	100
	y_2	14,51	43,83	14,51	100
	y_3	12,31	14,51	43,81	100
	F	—1	—1	—1	0
Номер этапа преобразований	y	y_1	Q_2	Q_3	1
1	Q_1	0,023	0,331	0,281	2,281
	y_2	—0,331	39,026	10,435	66,894
	y_3	—0,281	10,435	**40,372**	71,914
	F	0,023	—0,689	—0,719	—2,281
Номер этапа пресбразований	y	y_1	Q_2	y_3	1
2	Q_1	0,025	0,258	—0,007	1,781
	y_2	—0,258	**36,329**	—0,258	48,307
	Q_2	0,007	0,258	0,025	1,781
	F	0,008	—0,504	0,018	—3,562
Номер этапа преобразований	y	y_1	y_2	y_3	1
3	Q_1	0,027	—0,007	—0,005	1,437
	Q_2	—0,007	0,028	—0,007	1,329
	Q_3	—0,005	—0,007	0,027	1,437
	F	0,003	0,014	0,021	—4,203

положительными. Это отвечает минимуму $F = -Q_1 - Q_2 - Q_3$ и максимуму $F = Q_1 + Q_2 + Q_3$ функционала.

7. В результате преобразований в окончательном варианте симплекс-таблицы 16.2 (этап 3) в первом столбце получаем индексы отличающихся от нуля переменных, а в последнем — их оптимальные значения. Решением данной задачи являются дебиты скважины $Q_1 = Q_3 = 1437$ м³/сут и $Q_2 = 1329$ м³/сут при $Q_{сум} = 4203$ м³/сут. Поскольку $y_1 = y_2 = y_3 \approx 0$, максимальный суммарный водоотбор

обеспечивается при одновременном достижении уровнями подземных вод предельно допустимых значений на конец эксплуатации. Симплекс-метод легко программируется на ЭЦВМ.

З а д а ч а. Для лучшего усвоения смысла симплекс-метода самостоятельно решить задачу оптимизации водоотбора из четырех скважин, работающих в условиях, аналогичных условиям в рассмотренном выше примере.

16.8. О ДРУГИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ

Введем ограничение на качество отбираемой воды. Пусть требуется выбрать такой режим работы водозаборных скважин, при котором выполняется условие оптимальности (16.15), а качество отбираемой воды, например ее минерализация, не превышает предельно допустимой величины M^*, и в целом по водозабору выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n} M_i Q_i / \sum_{i=1}^{n} Q_i \leqslant M^*. \tag{16.21}$$

Для учета ограничения (16.21) в задаче оптимизации (16.18) требуется иметь уравнение, связывающее изменение минерализации воды с величиной водоотбора $M_i = f(Q_i)$. Удобно представить эту связь полиномом типа

$$M_i = g_{0i} + g_{1i} Q_i + \ldots + g_{ni} Q_i^n, \tag{16.22}$$

где g — коэффициент.

При $M_i = g_{0i} = \text{const}$ ограничение (16.21) является линейным относительно Q_i.

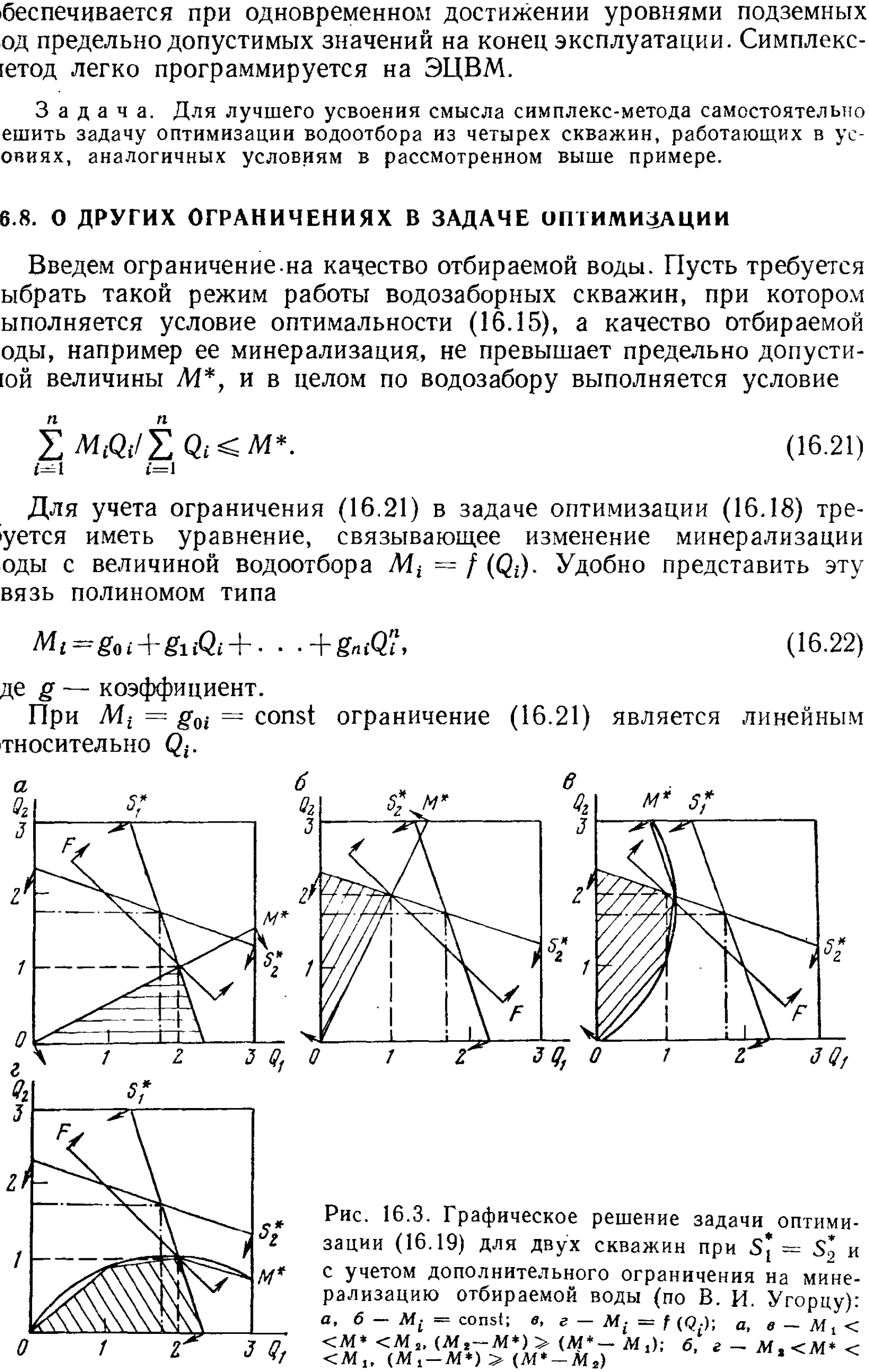


Рис. 16.3. Графическое решение задачи оптимизации (16.19) для двух скважин при $S_1^* = S_2^*$ и с учетом дополнительного ограничения на минерализацию отбираемой воды (по В. И. Угорцу): *а*, *б* — $M_i = \text{const}$; *в*, *г* — $M_i = f(Q_i)$; *а*, *в* — $M_1 < M^* < M_2$, $(M_2 - M^*) \geqslant (M^* - M_1)$; *б*, *г* — $M_2 < M^* < M_1$, $(M_1 - M^*) \geqslant (M^* - M_2)$

Решим графически (как показано в разд. 16.8) задачу для двух скважин по (16.19) — (16.19а) при $S_1^* = S_2^*$ с учетом ограничения по минерализации отбираемой воды

$$\frac{M_1Q_1 + M_2Q_2}{Q_1 + Q_2} \leqslant M^* \text{ или } Q_2 \leqslant Q_1 \frac{M^* - M_1}{M_2 - M^*}. \qquad (16.23)$$

Если M_i не зависит от дебита скважин, то ограничение (16.23) в координатах $Q_1 - Q_2$ представляет собой полуплоскость, граница которой OM проходит через начало координат. Введение ограничения уменьшает допустимую область решения, но позволяет найти такое распределение дебитов скважин, при котором отбирается максимальное количество воды заданного качества. На рис. 16.3 пунктиром представлены графические решения задачи оптимизации: при $M_1 < M^* < M$ и $(M_2 - M^*) \geqslant (M^* - M_1)$ оптимальное значение Q_1 превышает Q_2 (см. рис. 16.3, *а*), а при $M_2 < M^* < M_1$ и $(M_1 - M^*) \geqslant (M^* - M_2)$, наоборот, $Q_2 > Q_1$ (см. рис. 16.3, *б*). Пунктиром с точками показано решение задачи без учета ограничения (16.23). Как видно из рисунка, решения существенно различаются. При других соотношениях M_1, M_2 и M^* дополнительное ограничение, связанное с качеством отбираемой воды, на выбор оптимальных дебитов не влияет. Это объясняется тем, что точка максимума целевой функции F не принадлежит прямой OM^*, являющейся границей этой полуплоскости. Более сложные постановки задач оптимизации рассмотрены, например, в работе [28].

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимают под гидродинамическим расчетом водозабора?
2. Какими типовыми схемами и гидродинамическими особенностями отличаются потоки подземных вод к водозаборам, работающим в речных долинах, крупных артезианских бассейнах и конусах выноса?
3. В чем различие гидродинамических расчетов водозаборных и дренажных скважин?
4. Что понимают под оптимизацией гидродинамических условий водоотбора?
5. Что такое функция цели, ограничения, параметры управления?
6. Укажите, в чем различие понятий «оптимизационная задача водоотбора» и «гидродинамический расчет водозабора»?

ЧАСТЬ IV

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАССО- И ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Глава 17

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАССО- И ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ПОДЗЕМНЫХ ВОДАХ

17.1. ПОНЯТИЕ О МАССО- И ТЕПЛОПЕРЕНОСЕ И ГИДРОГЕОХИМИЧЕСКОЙ МИГРАЦИИ

Геологическая среда (см. главы 1 и 2) — это сложная система, в которой скелет горных пород обычно представляют неподвижной фазой, а жидкую, газообразную и биологическую — подвижными, т. е. перемещающимися, фазами. В палеогидрогеологических задачах все фазы считаются подвижными. В качестве основной фазы в дальнейшем будем рассматривать жидкую подземную воду, т. е. многокомпонентную систему, в которой «чистая» вода является мигрантом-растворителем, а содержащиеся в ней ионы, комплексные неорганические и органические соединения, эмульгированные и суспензированные частицы (нефть, масло, бактерии, вирусы, водоросли, механические взвеси, пузырьки газа) — мигрантами-компонентами.

Рассматривая подземную воду как сложный раствор, м а с с о п е р е н о с в подземных водах можно определить как направленное изменение вещественного состава и количества находящегося в них вещества. Он проявляется в изменении минерализации, химического и газового состава подземных вод. Эти изменения представляются как закономерности гидрогеохимического режима и солевого баланса подземных вод. Массоперенос в подземных водах принято называть миграцией подземных вод [31, 54]. Этот термин нельзя признать удачным. Согласно определению, данному в Геологическом словаре (1978 г.), миграция — это перемещение вещества в земной коре независимо от природы вызывающих его процессов. С этих позиций физическое (механическое) перемещение всей массы воды (без учета изменения ее качества), которое мы называем фильтрацией, также включается в понятие м и г р а ц и я.

А. Е. Ферсман ввел понятие г е о х и м и ч е с к а я м и г р а ц и я, обозначив им перемещение химических элементов в земной коре в результате различных геохимических процессов, приводящих к рассеянию или концентрации этих элементов. Подземные воды как фазовый компонент геологической среды принимают непосредственное участие в физико-химических и других процессах в горных породах и транспортируют химические и другие (биологические, газовые, механические) компоненты. В связи с этим в качестве синонима массопереноса в подземных водах целесообразно использовать по-

нятие гидрогеохимическая миграция, подразумевая под этим перемещение и изменение состава компонентов в подземных водах в результате различных гидрогеохимических процессов, приводящих к изменению минерализации, состава и свойств подземных вод.

Из определения следует, что гидрогеохимические процессы должны быть разделены на процессы (или механизмы) переноса вещества и физико-химические изменения. Основными механизмами перемещения вещества в подземных водах являются *конвективный*, *диффузионный*, и *гидродисперсионный переносы*. Физико-химические изменения обусловливают перемещение вещества между фазами геологической среды и внутри самой жидкой фазы. Между твердой (порода) и жидкой (вода) фазами они проявляются в виде обменных процессов — сорбции и десорбции, ионного обмена, гидратации и дегидратации минералов, растворения, осаждения, кристаллизации, а взаимодействия с биологической фазой — в виде метаболизма, т. е. обмена веществом с живыми организмами. Физико-химические взаимодействия внутри жидкой фазы представлены процессами ассоциации и диссоциации молекул, комплексообразования, окислительно-восстановительными, в том числе и с участием микроорганизмов и газов. Каждой совокупности процессов отвечает своя гидрогеохимическая обстановка, контролируемая определенным соотношением температуры, давления насыщения, химической активности раствора, содержания газов и т. п.

В изучении гидрогеохимической миграции выделяются два аспекта: 1) *гидрогеохимический*, предусматривающий исследование на количественной физико-химической основе геологических условий поступления в подземные воды, форм и устойчивости в растворе различных элементов; 2) *гидродинамический*, включающий выяснение механизмов и закономерностей переноса вещества в подземных водах на основе построенных математических моделей гидрогеомиграционных процессов. Это сложные модели, они включают модель переноса данного компонента в подземной воде и модели физико-химических изменений, сопровождающих этот перенос и приводящих к изменению количества вещества в подземной воде. При этом должна быть принята геофильтрационная модель (распределение напоров и скоростей), определяющая условия массопереноса.

Количественное изучение гидрогеохимической миграции базируется на методах физико-химической термодинамики и математическом аппарате, разработанном в теории тепло- и массопереноса [13, 27, 52]. Необходимость исследования массопереноса диктуется потребностью использовать количественные методы при изучении геологических проблем формирования состава и минерализации подземных вод, а также при решении многих инженерных задач, в частности задач охраны подземных вод от загрязнения при водоснабжении, обосновании подземного захоронения промышленных стоков, составлении прогнозов возможного засоления почв на массивах орошения и т. п. Эти проблемы рассмотрены в работах [8, 13, 28, 29, 32, 33, 51, 52, 54, 63].

Теплоперенос представляет собой направленное изменение количества тепла в подземных водах, проявляется в изменении их температуры и представляется закономерностями гидрогеотермического режима и теплового баланса подземных вод. Гидродинамический ряд задач массо- и теплопереноса решается аналогично, так как они описываются тождественными математическими уравнениями, хотя физически существенно различны. В некоторых работах теплоперенос включался в миграцию подземных вод [54]. Далее мы будем рассматривать его как самостоятельное направление. Изучение теплопереноса важно для исследований массопереноса (оценки температурной обстановки его проявления), а также при решении таких задач, как изучение процессов формирования температурного поля Земли и подземной гидросферы, оценка возможности использования термальных вод в качестве источников энергии и для бальнеологических целей, определение запасов подземных вод в районах многолетнемерзлых пород и т. д. Подробно теплоперенос рассматривается в работе [27].

17.2. ОСНОВНЫЕ МЕХАНИЗМЫ МАССОПЕРЕНОСА

Конвективный перенос — это наиболее распространенный вид миграции в зоне интенсивного водообмена. Он представляет собой перенос вещества движущимся потоком подземных вод (вынужденная конвекция, рис. 17.1). При этом считается, что физико-химических взаимодействий нет и все частицы жидкости перемещаются с одной скоростью, равной средней действительной скорости u, определяемой уравнением (3.3). Теоретически граница между водами разной минерализации представляет собой вертикальную плоскость, называ-

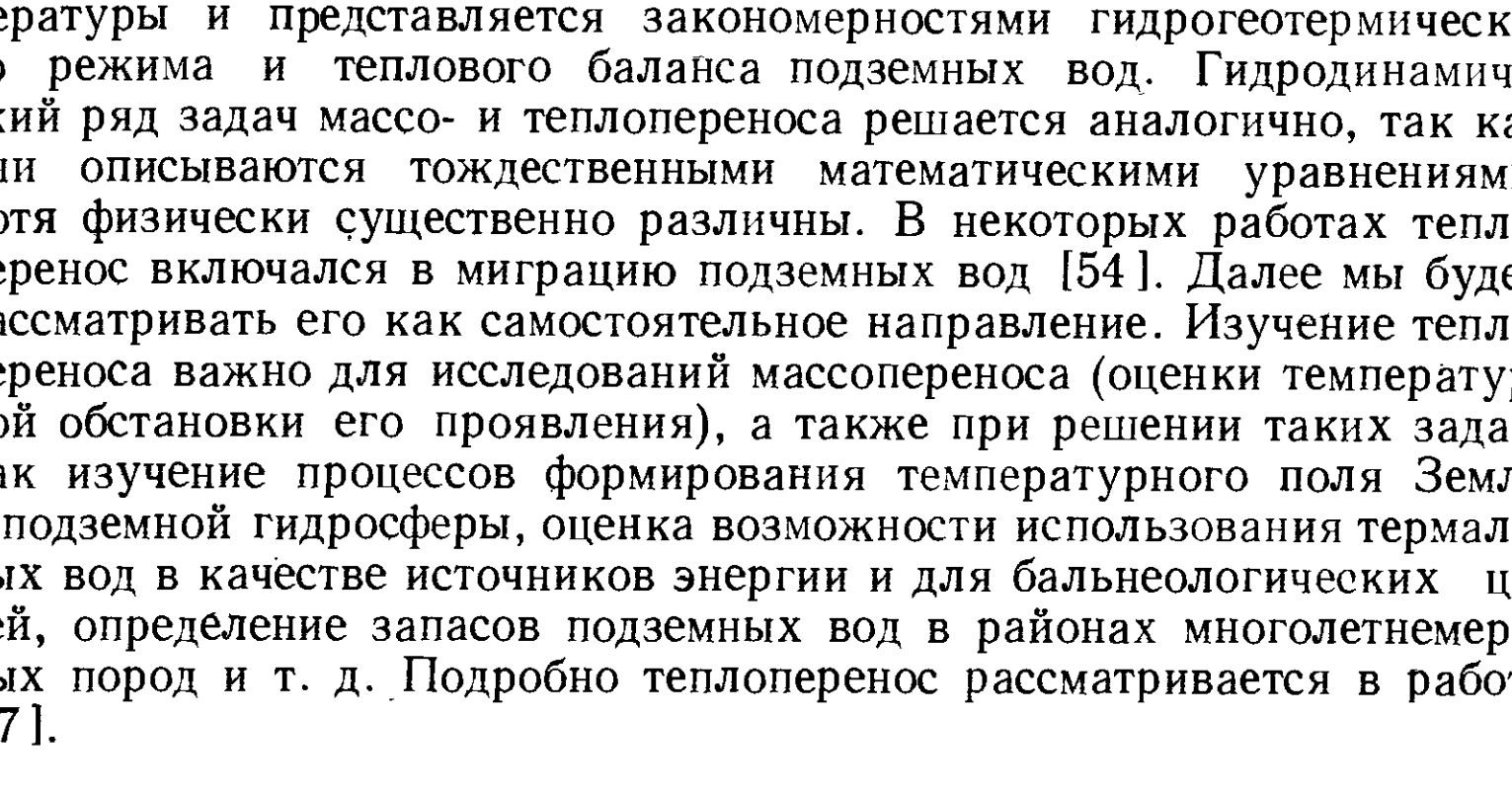


Рис. 17.1. Массоперенос по механизму конвекции (*а*, *б*) и схема к выводу учета сорбции (*в*).

Положение фронта вытеснения на различные моменты времени: *а* — начальный ($t = 0$); *б* — некоторый ($t = t_1$). *1* — загрязненные воды реки ($C_0 = 2$ г/л); *2* — пресные подземные воды ($C_1 = 0{,}5$ г/л); *3* — фронт поршневого вытеснения (граница раздела концентраций)

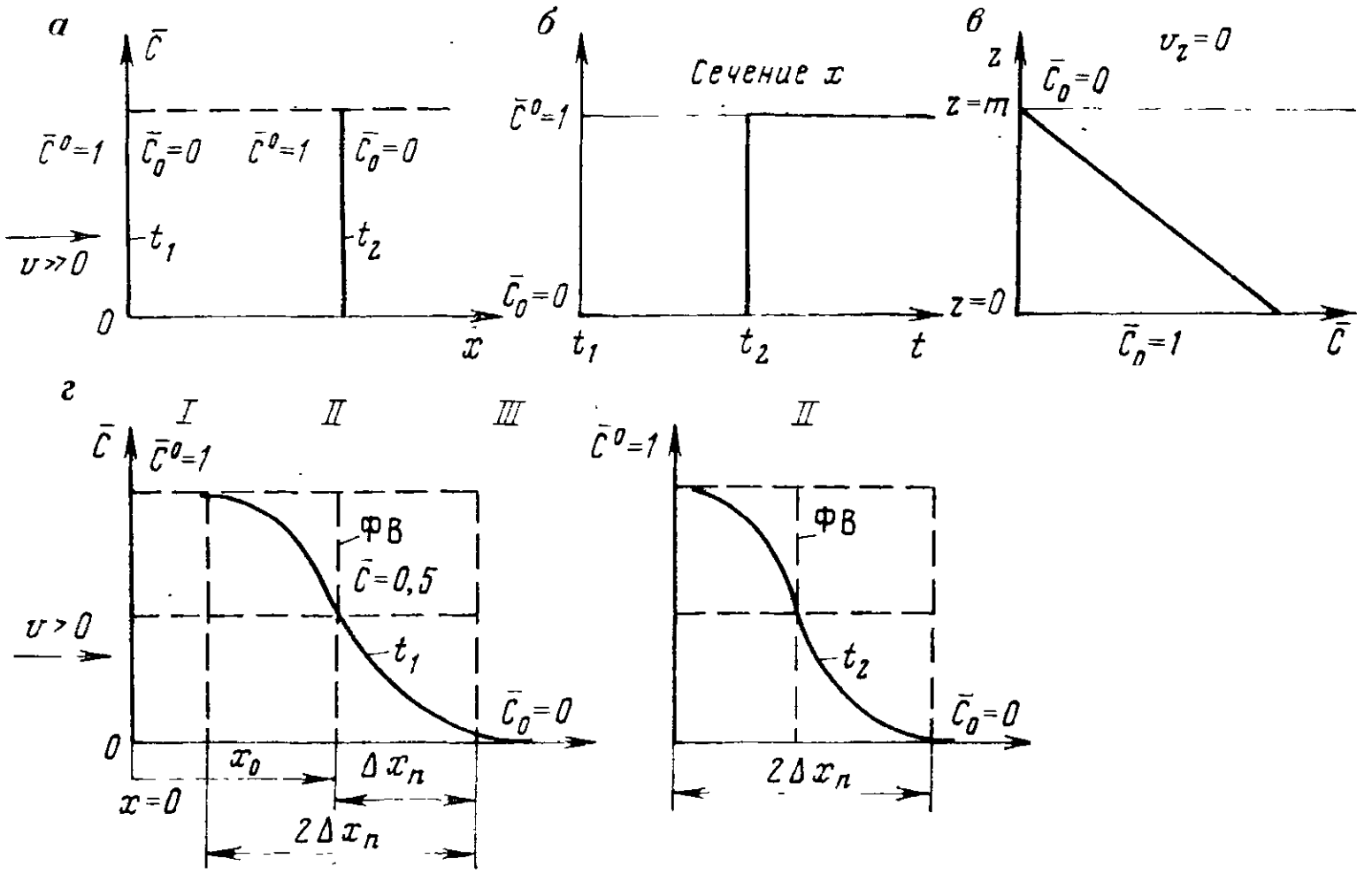


Рис. 17.2. Графики изменения концентрации мигранта при переносе его в подземных водах по механизму поршневого вытеснения (*а*, *б*), молекулярной диффузии (*в*) и гидравлической дисперсии (*г*).

Зоны: I — вытесняющая ($\bar{C}^0 = 1$); II — переходная ($1 > \bar{C} > 0$); III — вытесняемая ($\bar{C}_0 = 0$). ФВ — фронт вытеснения ($\bar{C} = 0{,}5$); t_1 и t_2 — моменты времени; v — скорость фильтрации

емую поршневым фронтом, а сама схема переноса называется поршневым вытеснением. Фронт движется со средней скоростью u, и одна вода полностью вытесняет из пор другую, а на границе наблюдается скачок минерализации (см. рис. 17.1; 17.2, *а*). При поршневом вытеснении любой мигрант считается нейтральным, т. е. не взаимодействующим с породой и другими компонентами. Уравнение движения такой частицы или их совокупности в виде фронта вытеснения по любому направлению l имеет вид

$$\frac{dl}{dt} = \frac{v}{n_0} = \frac{kI}{n_0}, \qquad (17.1)$$

где v — скорость фильтрации по принятому направлению в расчетных точках; k, I, n_0 — соответственно коэффициент фильтрации, градиент потока и активная пористость в расчетном сечении. Из выражения (17.1) видно, что для расчетов конвективного переноса необходимо знать поле скоростей фильтрации, которое определяется решением соответствующей геофильтрационной задачи.

Диффузионный перенос. Этот перенос совершается на молекулярном уровне под действием градиента концентрации C вещества и описывается законом Фика

$$v_c = -D_м \frac{\partial C}{\partial l}, \qquad (17.2)$$

который характеризует плотность диффузионного потока v_c, т. е. количество вещества, прошедшее через единичное сечение потока в единицу времени в направлении l (см. рис. 17.2, *б*). Уравнение (17.2) справедливо для изотермических процессов и при независимой диффузии, когда смеси имеют одинаковые коэффициенты диффузии $D_м$ или смесь состоит из двух компонентов или содержит избыток одного из них. Если эти условия не выполняются, то возникает сложная неизотермическая многокомпонентная диффузия [7, 8, 31].

Коэффициент молекулярной диффузии зависит от типа пород, структуры порового пространства, влажности горных пород и других факторов. Для песчаных пород

$$D_м = \chi n_0 D_м^0, \tag{17.3}$$

где χ — параметр, характеризующий извилистость пор (по опытам Дж. Клинкенберга для несцементированных песков $\chi = 0{,}5—0{,}7$; для сцементированных $\chi = 0{,}25—0{,}5$); $D_м^0$ — коэффициент молекулярной диффузии в свободной среде (порядок его $n \cdot 10^{-4}$ м²/сут) [7, 54]. В глинистых породах диффузионный поток тормозится вследствие уменьшения подвижности ионов у стенок пор и в двойном электрическом слое, поэтому в уравнение (17.3) вводится множителем коэффициент $n_м \cong 0{,}2—0{,}5$.

В процессе молекулярной диффузии происходит рассеивание вещества. Характер распределения концентрации по длине потока l зависит от закона изменения концентраций на границах потока и его строения [в простейшем случае — это прямая (см. рис. 17.2)]. Наиболее интенсивна диффузия в условиях, когда скорости фильтрации весьма малы.

Гидравлическая дисперсия. Это процесс рассеивания вещества, сочетающий диффузию и конвекцию и зависящий от неравномерности поля скоростей во внутрипоровом пространстве (на молекулярном уровне), неоднородности и гетерогенности среды (на макро- и регио-

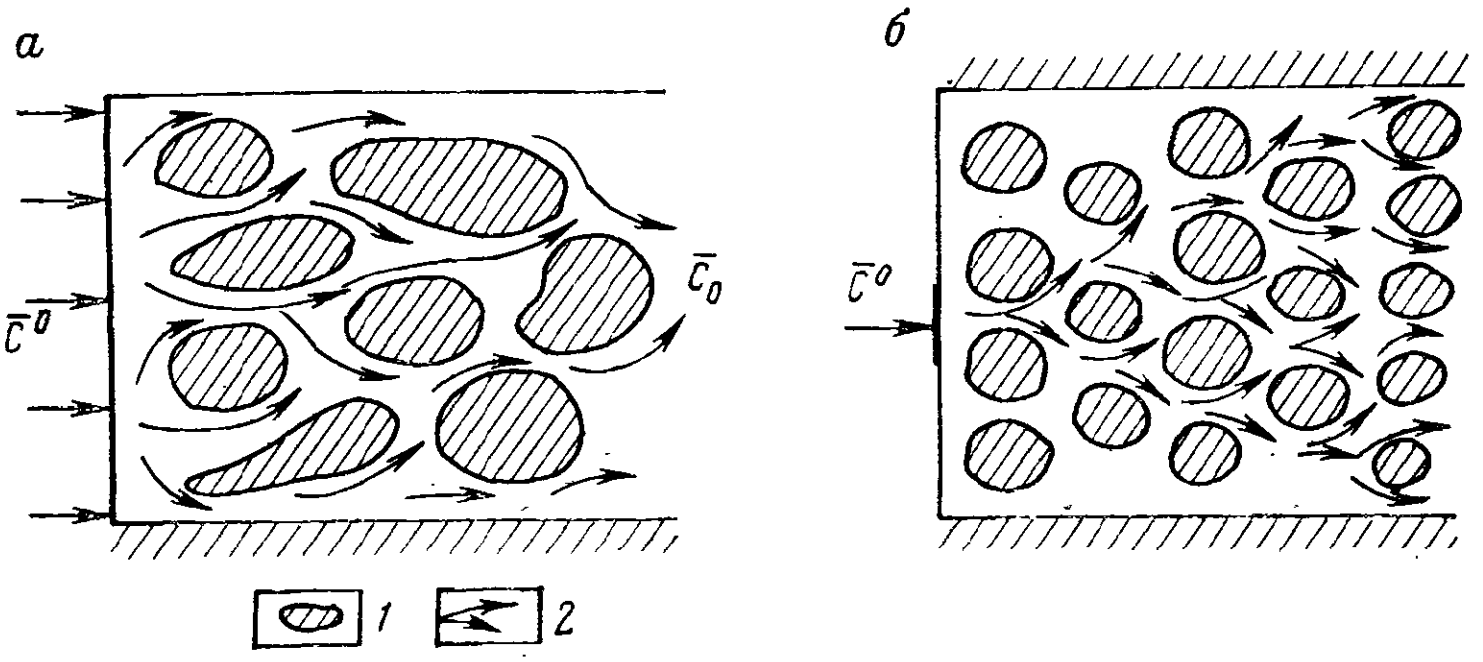


Рис. 17.3. Схемы проявления гидравлической дисперсии при сплошном (*а*) и точечном (*б*) поступлении мигранта в водоносный пласт:

1 — минеральное зерно; *2* — стрелки, величина которых отражает неравномерность поля скорости движения во внутрипоровом пространстве

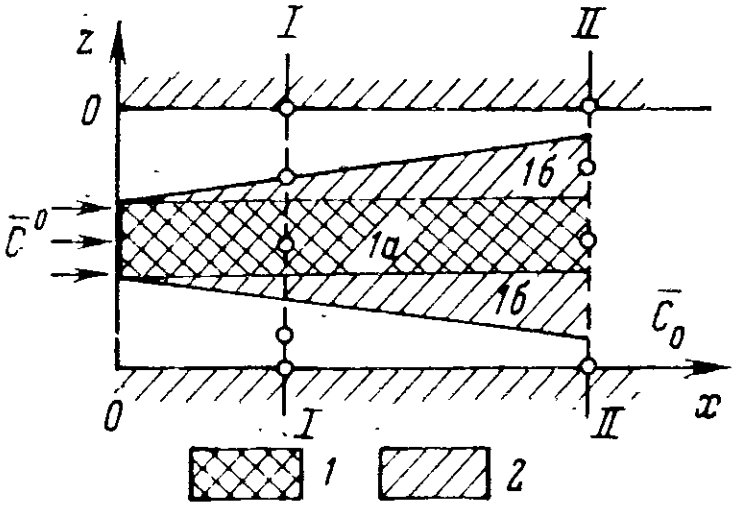


Рис. 17.4. Схема формирования зон продольной (*1*) и поперечной (*2*) дисперсий в гомогенном водоносном горизонте

нальном уровне). В соответствии с этим при гидрогеохимической миграции выделяют микро- и макродисперсию [54].

Микродисперсия обусловлена характером эпюры распределения скорости фильтрации в каждой поре (см. рис. 2.4) и движением воды по порам, имеющим различные ориентацию и размеры. В результате этого происходят отклонение локальных скоростей движения струек от средней по величине и направлению, отставание или ускорение движения элементарных струек, имеющих разную концентрацию мигранта (рис. 17.3, *а*), и рассеивание вещества, т. е. уменьшение его концентрации по направлению переноса (см. рис. 17.2, *г*). Рассеивание может быть и результатом разветвления и слияния элементарных струек при точечном поступлении вещества (см. рис. 17.2, *б*). По мере их движения с одновременным увеличением общего сечения, через которое они идут, наблюдается уменьшение концентрации вещества относительно фиксированного точечного источника его поступления.

В потоке подземных вод формируются *продольная и поперечная дисперсии*. Продольная микродисперсия развивается в направлении средней скорости движения подземных вод и наиболее четко прослеживается в одномерном фильтрационном потоке, ограниченном непроницаемыми контурами, при поступлении воды с концентрацией $\bar{C}^0 = 1$ на всем поперечном сечении (см. рис. 17.3, *а*). Скорость элементарных струек с концентрацией вещества $\bar{C}^0$ отличается от средней скорости всей массы воды, и вблизи поршневого фронта формируется *переходная зона* размером $2\Delta x_n$, или зона микродисперсии, где относительная концентрация уменьшается от 1 до 0 (см. рис. 17.2, *г*; 17.4). Поперечная микродисперсия развивается в одномерном потоке в условиях, когда вещество с концентрацией $\bar{C}^0 = 1$ поступает только на часть входного сечения $x = 0$ (см. рис. 17.4). В этом случае рассеивание происходит в двух направлениях: вдоль оси x и перпендикулярно к ней по оси z. Поперечное рассеивание вещества наблюдается в потоке с двух- и трехмерной структурой движения. Экспериментальными исследованиями установлено, что микродисперсия описывается уравнением (17.5), в котором D представляет собой коэффициент микродисперсии, зависящий от скорости и направления фильтрации

$$D = D_м + \delta_1 v, \qquad (17.4)$$

где δ_1 — коэффициент, характеризующий геометрическую структуру порово-трещинного пространства и зависящий от типа породы, направления и скорости v фильтрационного потока.

Коэффициенты продольной D^x и поперечной D^z микродисперсий определяются экспериментально. В лабораторных условиях лучше изучена продольная микродисперсия [7, 8, 13, 15, 51, 63]. Установлено, что с ростом скорости фильтрации и размеров частиц фильтрующей среды величина D^x и зона дисперсии увеличиваются. Значение параметра δ_1 для однородной среды, представленной крупными песками и гравием, составляет 0,1—3 см, мелкими песками и супесями — 0,1—1 см, для трещиноватых пород по данным полевых опытов $\delta_1 =$ $= 4$—30 см (до 1 м и более) [7, 54]. Поперечная дисперсия изучена слабее, ее коэффициент дисперсии D^z меньше коэффициента D^x [50].

Гидравлическая микродисперсия протекает одновременно с конвективным вытеснением вещества и диффузионным переносом, поэтому массоперенос вещества через единицу площади сечения из балансовых условий неразрывности потока в переходной зоне гидродисперсии может быть описан уравнением

$$v_c = Cv - D\frac{\partial C}{\partial l}, \tag{17.5}$$

где v_c — скорость массопереноса в направлении l; C — объемная концентрация вещества; D — обобщенный коэффициент гидравлической микродисперсии, определяемый экспериментально.

Установлено [31, 54], что в гомогенных средах продольная микродисперсия заметно проявляется лишь в лабораторных условиях. Большее внимание [31, 32] следует уделять изучению поперечной дисперсии в натурных условиях.

В породах с гетерогенно-блоковой структурой, а также при наличии в пластах в плане и в разрезе макронеоднородностей размером 0,1—1 м и более проявляется м а к р о д и с п е р с и я вещества [7, 31, 52, 54]. При упорядоченной неоднородности, например в слоистых пластах, ускоренное продвижение вод с повышенной концентрацией по хорошо проницаемым пластам приводит к появлению концентрационных «языков» внутри слоистой системы (рис. 17.5, *а*). Считается, что в хорошо проницаемых пластах миграция осуществляется продольной гидродисперсией, а при значительной скорости фильтрации ($v \gg 0$) — конвективным путем. В слабопроницаемых разделяющих слоях она протекает путем поперечной дисперсии и диффузии (см. рис. 17.5, *а*). Массоперенос в такой многослоистой толще характеризуется обобщенным коэффициентом дисперсии D, который для случая, когда влияние диффундирующего раствора распространяется на всю мощность слабопроницаемого слоя m_0, определяется выражением

$$D = \delta_2 v^2, \tag{17.6}$$

где δ_2—геометрический параметр, обобщенно характеризующий среду, в которой протекает процесс макродисперсии, и зависящий от соотно-

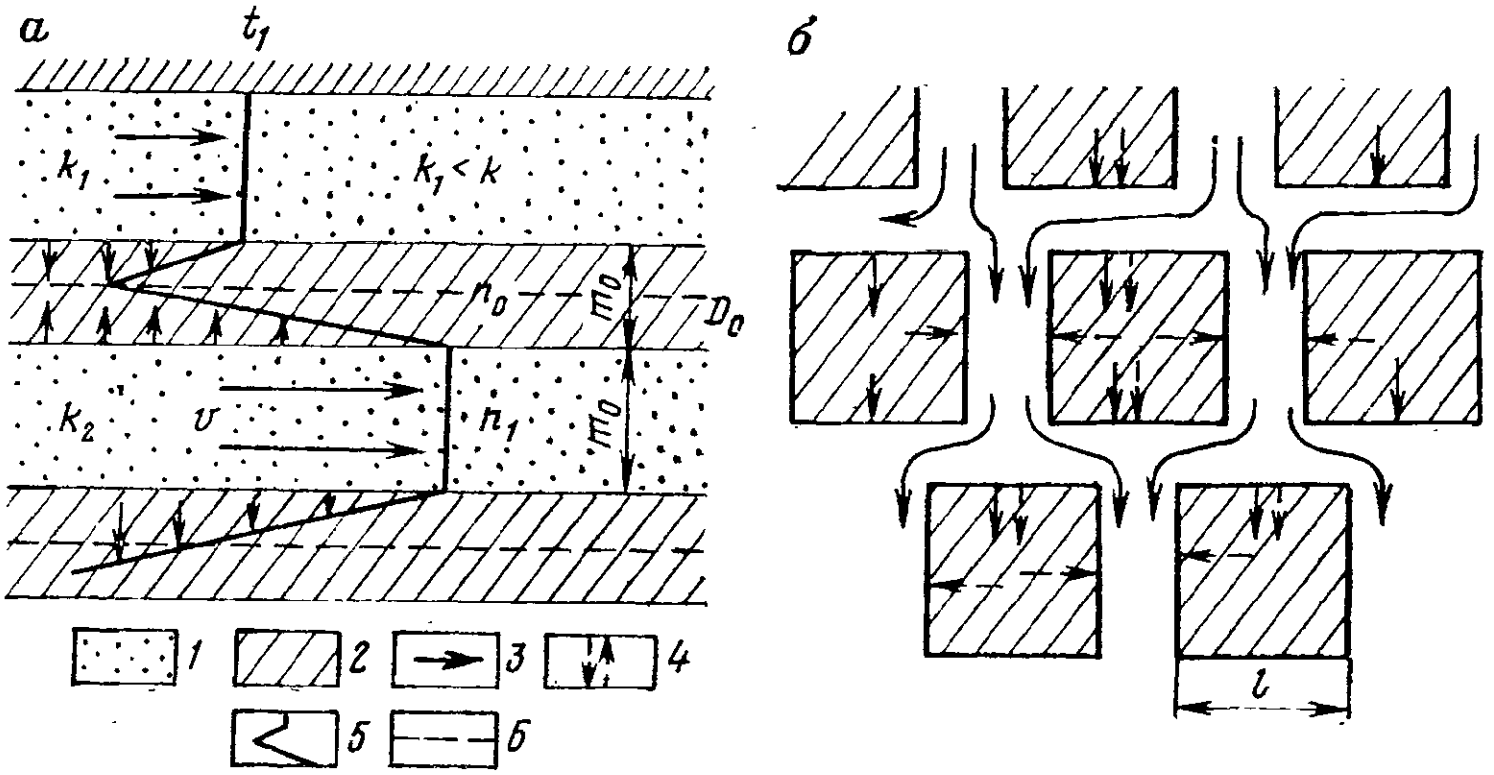


Рис. 17.5. Схемы формирования макродисперсии в многопластовой (слоистой) системе (*а*) и при гетерогенно-блоковой структуре пласта (*б*):

1, *2* — слои (*1* — хорошо проницаемый, *2* — слабопроницаемый); *3*, *4* — направление потоков (*3* — конвективного, *4* — диффузионного); *5* — линия положения концентрационного фронта на момент t_1; *6* — граница расчетного элемента

шения мощностей хорошо- и слабопроницаемых слоев (m, m_0) и их пористостей (n, n_0).

На дисперсию вещества в потоке влияет также гетерогенность пород, которая обусловливается их структурностью, литолого-фациальным замещением, наличием тупиковых пор и разрывных нарушений. Такое строение часто имеют пласты закарстованных известняков, трещиноватых песчаников и аргиллитов, лёссовидные и глинистые породы с зонами повышенной проницаемости разного генезиса. При неупорядоченной гетерогенности пород используют гетерогенно-блоковую модель среды [54], представляя породу как мозаичную квазиоднородную систему из слабопроницаемых блоков, прорезанных крупными хорошо проницаемыми каналами (см. рис. 17.5, *б*). Конвективный перенос вещества осуществляется главным образом по каналам, а обмен веществом между каналами и блоками идет по диффузионному механизму и конвективным путем со скоростью, определяемой относительной проницаемостью блоков. В этом случае параметрами процесса переноса будут активная пористость каналов n, скорость фильтрации v, коэффициент массообмена α и коэффициент макродисперсии D.

Экспериментальные данные [31, 32, 33] указывают, что коэффициент макродисперсии существенно превышает коэффициент микродисперсии, так как δ_2 на два-три порядка больше δ_1. Обзоры экспериментальных данных по параметрам гидродисперсии приведены в работах [41, 52, 63]. Механизм макродисперсии описывается системой уравнений, составляемых для блоков и каналов, но может использоваться и уравнение (17.5) при условии определения D по формуле (17.6). В таком случае говорят о диффузионной модели макродисперсии. Моделированием изучено [7] влияние незакономерных локальных

макровключений на скорость распространения загрязнений в водоносных пластах и подтверждена возможность использования уравнения (17.5). В ряде работ указывается, что процесс макродисперсии может быть и недиффузионного типа [51, 52].

17.3. ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим главные обменные взаимодействия веществом между горной породой и подземной водой (с другими процессами можно познакомиться в работах [7, 28, 29, 32, 52]).

Сорбция. Сорбцией в настоящее время называют процесс совместного действия адсорбции и десорбции, т. е. поглощения и освобождения компонентов, которые происходят на поверхности твердой фазы и имеют различный характер и интенсивность в зависимости от состава, формы нахождения и концентрации примесей, состава воды и породы [7, 28, 52]. Грубодисперсные и коллоидные взвеси, а также некоторые микроорганизмы механически задерживаются в порах породы, вызывая кольматацию. Сорбция проявляется как результат действия поверхностных сил без вещественного изменения мигранта; при химической сорбции процесс необратим.

Если сорбируются ионы, процесс называют ионным обменом. К явлениям, которые подобны сорбционным, относят процесс задержки вещества в «тупиковых» порах и некоторые другие. Высокой сорбционной способностью характеризуются глинистые минералы и породы, а также органические вещества.

Кинетика обратимой сорбции описывается уравнением

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \alpha (C - \beta N), \tag{17.7}$$

где N, C — соответственно адсорбированное породой количество вещества и концентрация его в растворе в момент t; α — коэффициент скорости сорбции; β — коэффициент распределения вещества в равновесных условиях, $\beta = C_0/N_0$ (C_0 и N_0 — соответствующие предельные равновесные концентрации вещества в растворе и в породе). Параметры α и β рассматриваются как обобщенные характеристики процессов поглощения и освобождения и определяются опытным путем [28, 32].

При необратимой сорбции, обусловленной неограниченно большой сорбционной емкостью породы, когда $\beta \ll 1$, уравнение (17.7) принимает вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \alpha C. \tag{17.8}$$

При значительной скорости сорбционного процесса принимается, что равновесие между жидкой и твердой фазами устанавливается мгновенно, и для его описания обычно используют линейную изотерму

$$N = \frac{1}{\beta} C = K_r C, \tag{17.9}$$

где $K_г = 1/\beta$ — константа Генри. Согласно уравнению (17.9) скорость сорбции прямо пропорциональна скорости изменения концентрации вещества в растворе. В работах [7, 15, 28, 33] приводятся другие изотермы и конкретные данные о скорости сорбции различных компонентов. Так, в песках сорбция фосфатов значительна, фенолов — замедленна, тяжелых металлов на тонкозернистых песках — различна, нейтральные и анионные комплексные соединения тяжелых металлов сорбируются плохо. Слабо изучена сорбция пестицидов и других соединений; некоторые данные приведены в [28].

Растворение солей. Растворение солей, содержащихся в водоносных породах, зависит от количества, вида и степени растворимости минералов, состава пластовой воды и длительности ее воздействия на породу, наличия в воде агрессивной углекислоты и других компонентов. Растворение при пленочном засолении может быть описано выражением

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\alpha_р (C_н - C),$$

где N — масса твердых солей в породе в момент времени t; $\alpha_р$ — эмпирическая константа скорости растворения; $C_н$ и C — концентрация соответственно насыщенного раствора и текущая. Другие случаи рассмотрены в работах [7, 28, 51].

Адсорбция микроорганизмов. Адсорбция связана с поглощением породами различных микроорганизмов (водоросли, бактерии, вирусы) из подземных вод и определяется условиями фильтраций (состав пород, скорость фильтрации, состав воды) и самого биологического загрязнения (виды и начальное содержание микроорганизмов, время их выживаемости, условия поступления — кратковременное, длительное). В работах [7, 28] указывается, что дальность продвижения микроорганизмов изменяется от 15 м (в песках) до 1000 м (галечники, известняки) и увеличивается с ростом скорости фильтрации. Природа адсорбции микроорганизмов различна. Интенсивность адсорбции микробов определяется главным образом временем их выжимаемости. Для наиболее распространенных в подземных водах микроорганизмов (санитарно-показательные и патогенные бактерии, вирусы) время выжимаемости при 4—6 °С колеблется от 50 до 400 сут. Скорость перемещения бактерий значительно меньше скорости движения воды, при этом в каждом сечении наблюдается увеличение содержания бактерий во времени вплоть до насыщения сорбционной емкости породы, после чего следующие группы бактерий продвигаются по потоку дальше. Адсорбция бактерий в этом случае описывается уравнением нелинейной кинетики сорбции.

17.4. ОСНОВНЫЕ МЕХАНИЗМЫ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Теплоперенос осуществляется конвекцией, кондукцией (что тождественно диффузии) и гидродисперсией. Тепловая конвекция определяется средней действительной скоростью u движения подземных вод по формуле (17.1). Тепловой фронт перемещается по схеме поршне-

вого вытеснения, граница раздела двух тепловых потоков вертикальна и на ней наблюдается температурный скачок.

В изотермической обстановке скорость теплового потока v_c, развивающегося по механизму кондукции за счет теплопроводности среды и градиента температур θ, описывается уравнением теплопроводности Фурье

$$v_c = -\lambda_0 \frac{\partial \theta}{\partial l}, \tag{17.10}$$

где λ_0 — коэффициент теплопроводности.

Гидродисперсия при теплопереносе развивается аналогично массопереносу. Перенос тепла определяется средней скоростью фильтрации v и кондукцией и сопровождается рассеиванием тепла с образованием переходной зоны. Значение обобщенного коэффициента теплодисперсии можно определить по формуле [27, 31, 54]

$$\lambda = \lambda_0 + \gamma c_в \delta_1 v, \tag{17.11}$$

где $c_в$ — удельная теплоемкость воды плотностью γ.

Тепловой конвективно-дисперсионный поток через единицу площади сечения за счет геотермического градиента и при наличии средней вертикальной скорости фильтрации v_z определяется выражением

$$q_\theta = c_в v_z \theta - \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z}. \tag{17.12}$$

В тепловом потоке проявляются продольная и поперечная дисперсии на микро- и макроуровнях; в последнем случае при резко выраженной гетерогенности среды, в которой движется тепловой поток.

17.5. ПРЕДПОСЫЛКИ ВЫВОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАССО- И ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Исследование гидрогеохимической миграции весьма сложно. Оно базируется на совместном рассмотрении дифференциальных уравнений, характеризующих фильтрацию воды и миграцию вещества. Решение таких задач наталкивается на значительные трудности гидрогеологического и математического плана. Первые объясняются недостаточной разработанностью геомиграционной схематизации и физических процессов переноса вещества в сложных гидрогеологических условиях. Вторые связаны с необходимостью решения сложных систем нелинейных дифференциальных уравнений. Для получения приемлемых решений прибегают к допущениям. Укажем наиболее важные предпосылки, которые принимаются при выводе дифференциальных уравнений миграции вещества и тепла в подземных водах.

1. Используют принятое в гидромеханике понятие сплошной среды со средними статистическими характеристиками, выбирая для этого размеры репрезентативного объема $\Delta V_р$ геомиграционной среды и соответствующего репрезентативного $t_р$ интервала времени. В этом случае твердую, жидкую и газовую фазы геологической среды считают непрерывными, а реальное их пространственное распределение в мак-

роскопическом элементарном объеме, включая границы и параметры фаз,— усредненными в виде некоторой сплошной квазиоднородной среды со средними статистическими характеристиками всех фаз. При этом элементарный объем должен быть достаточно большим, чтобы учитывать макроскопическую неоднородность и гетерогенность среды, и достаточно малым, чтобы быть представительным для решения дифференциальных и конечно-разностных уравнений применительно к полной гидрогеомиграционной модели, учитывающей процессы переноса и физико-химических изменений. Каждый процесс имеет свои $V_р$ и представительный интервал $t_р$, за который внутри объема $V_р$ устанавливаются локальное равновесие и средние статистические значения параметров процесса. Для полной модели определяются некоторый единый элементарный объем и отвечающий ему представительный интервал времени. При гетерогенно-блоковой среде нахождение такого объема — сложная задача, особенно в условиях региональной неоднородности и гетерогенности, поскольку эти вопросы разработаны слабо.

2. Рассматривают миграцию каждого отдельного элемента (например, в задачах загрязнения подземных вод изучают наиболее токсичные элементы, независимо от наличия других составляющих, что справедливо для разбавленных растворов малой концентрации) либо оценивают изменение общей минерализации или содержание отдельного характерного иона в подземных водах (при решении задач формирования подземных вод).

3. Реальные потоки вещества и тепла часто рассматривают в одном из направлений (например, солеперенос в зоне аэрации орошаемого массива изучают только в вертикальном направлении, аналогично поступают при исследовании естественных тепловых потоков).

4. Считают, что фильтрационные показатели и параметры физико-химического и теплового взаимодействия являются независимыми, поэтому решения соответствующих дифференциальных уравнений проводят автономно.

5. В качестве основных законов миграции вещества и тепла в подземных водах для диффузионного и кондуктивного переноса, развивающегося в изотермических условиях, принимают соответственно законы Фика (17.2) и Фурье (17.10), для конвективного переноса (17.1) и дисперсии (17.5) и (17.8).

6. Реальные водоносные и относительно водоупорные пласты и слоистые толщи при аналитическом решении задач рассматривают как условно однородные, а при моделировании — как дискретно неоднородные с различными, но усредненными в пределах каждого слоя или зоны параметрами. Границы между пластами и зонами принимают простые геометрические очертания.

Дифференциальные уравнения и условия однозначности, записанные для исследуемого процесса массо- и теплопереноса, представляют собой его теоретическую модель. Входящие в эти уравнения скорости фильтрации v определяются предварительно независимым решением геофильтрационной задачи для той области потока подземных вод, для которой решается гидрогеомиграционная задача.

17.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МИГРАЦИИ ВЕЩЕСТВА В ПОДЗЕМНЫХ ВОДАХ

Рассмотрим вывод дифференциального уравнения гидродисперсии для одномерного потока вещества по координате x в гомогенной среде без учета сорбции и переноса вещества в кровлю и подошву (рис. 17.6). Баланс вещества с концентрацией C исследуем для потока единичного (при $m = 1$ м) сечения за время dt. При скорости массопереноса v_c, определяемой уравнением (17.5), количество вещества, поступающего в элемент, равно $v_c dt$, выходящего из элемента $-\left(v_c + \frac{\partial v_c}{\partial x} dx\right) dt$. Приращение вещества за время dt на расстоянии dx равно $\frac{\partial v_c}{\partial x} dx dt$. Вместе с тем изменение содержания вещества в элементе потока может быть представлено выражением $n_0 \frac{\partial C}{\partial t} dt dx$. Общий баланс вещества после преобразований равен

$$\frac{\partial v_c}{\partial x} + n_0 \frac{\partial C}{\partial t} = 0. \qquad (17.13)$$

Зависимость (17.13) представляет собой уравнение неразрывности солевого потока с концентрацией C. Подставив в него v_c по (17.5), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Cv - D \frac{\partial C}{\partial x}\right) + n_0 \frac{\partial C}{\partial t} = 0. \qquad (17.14)$$

Принимая фильтрационные и миграционные параметры постоянными, продифференцируем зависимость (17.14) по x и получим дифференциальное уравнение гидродисперсии

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x} = n_0 \frac{\partial C}{\partial t}, \qquad (17.15)$$

где за малостью член $C \frac{\partial v}{\partial x}$ опущен.

Рассмотрим сорбцию, растворение N и отвод компонента через кровлю $w_к$ и подошву $w_п$ пласта (см. рис. 17.6). В этом случае в уравнение (17.15) добавляются три члена: первый учитывает отвод компонента C конвекцией с интенсивностью $w_{гл}$ перетекания $\left[C\left(w_{гл}^к - w_{гл}^п\right)\right]$, второй — сорбцию и растворение по формулам (17.7), (17.8) или (17.9) $\left[n_0 \frac{\partial N}{\partial t}\right]$, третий — солевые потоки через кровлю и подошву путем диффузии и конвекции

$$\left[w_к = -D_к \frac{\partial C_к}{\partial t} + C_к w_{гл}^к \text{ и } w_п = -D_п \frac{\partial C_п}{\partial t} + C_п w_{гл}^п\right].$$

Уравнение (17.15) принимает вид

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x} - v \frac{\partial C}{\partial x} - w_{гл}^к (C - C_к)\Big|_{z=z_к} +$$

$$+ w_{гл}^п (C - C_п)\Big|_{z=z_п} = n_0 \frac{\partial C}{\partial t} + n_0 \frac{\partial N}{\partial t} -$$

$$-D_{\text{к}}\frac{\partial C_{\text{к}}}{\partial t}\bigg|_{z=z_{\text{к}}}+D_{\text{п}}\frac{\partial C_{\text{п}}}{\partial t}\bigg|_{z=z_{\text{п}}}. \qquad (17.16)$$

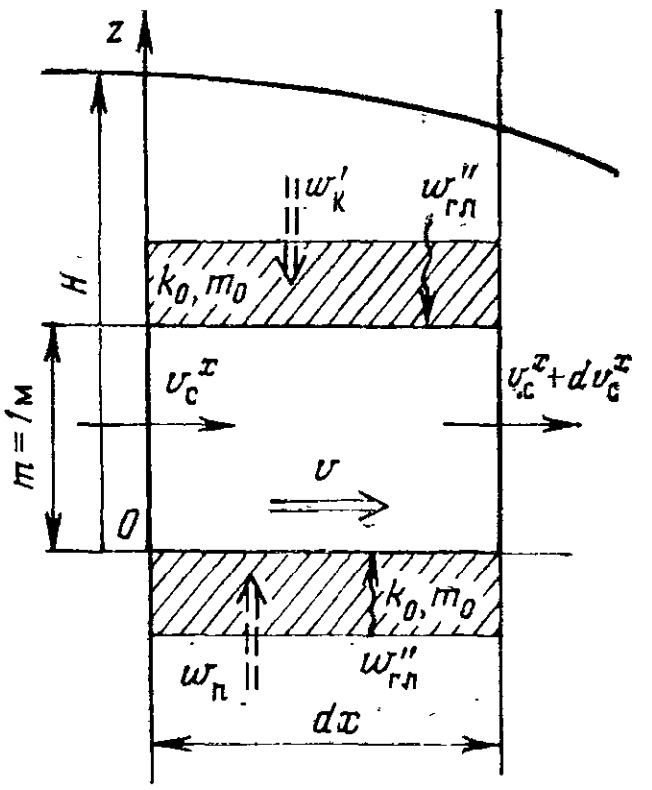


Рис. 17.6. Схема к выводу дифференциального уравнения массопереноса для напорных вод

В слоистой системе на контакте водоносного и разделяющих слоев в силу неразрывности солевого потока $C = C_{\text{к}}$ и $C = C_{\text{п}}$, поэтому члены с интенсивностью перетекания $w_{\text{к}}$ и $w_{\text{гл}}^{\text{п}}$ из уравнения (17.16) исключаются, т. е. отвод солей через разделяющие слои идет диффузионным путем. Если все слои хорошо проницаемы, а верхний получает инфильтрационное питание $w_{\text{а}}$ или связан с водами реки, то диффузионные члены становятся весьма малыми, и в уравнении (17.16) остаются только члены, учитывающие перетекание, и $w_{\text{а}}C_{\text{а}i}$. В результате на контакте слоев, а для грунтовых вод на контакте с зоной аэрации (с атмосферой), имеет место скачок концентраций $(C—C_i)$.

За начальные условия принимают естественное (фоновое) распределение концентрации вещества в подземной воде: $t = 0$, $C = C_0(x)$ или $C_0 = 0$, или $C_0 = \text{const}$. На границах пласта L задают условие первого рода

$$C|_{x=L} = C_{\text{вх}}(t) \text{ или } C|_{x=L} = \text{const},$$

единичный поток вещества, т. е. условие второго рода

$$q_{\text{с}}|_{x=L} = D\frac{\partial C}{\partial x} \text{ или } q_{\text{с}}|_{x=L} = \text{const или } 0$$

и условие третьего рода

$$q_{\text{с}}|_{x=L} = \left[-D\frac{\partial C}{\partial x} + vC\right]_{x=L} \text{ при } q_{\text{с}}|_{x=L} = vC_{\text{вх}}|_{x=L},$$

что обобщенно имеет вид

$$D\frac{\partial C}{\partial x}\bigg|_{x=L} = v(C—C_{\text{вх}})|_{x=L}.$$

Сложные уравнения массопереноса рассматриваются в работах [7, 13, 52].

17.7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАКРОДИСПЕРСИИ В ГЕТЕРОГЕННЫХ ПОРОДАХ

Рассмотрим солевой баланс в элементе гетерогенно-блоковой породы с двойной емкостью, в котором наблюдается массоперенос по схеме макродисперсии. В этом случае конвективный перенос осущест-

вляется по каналам, а обмен между каналами и блоками идет диффузионным и конвективным путями (см. рис. 17.5, *б*). Примем блок с объемом $V_б$, площадью поверхности $\omega_б$ и средней площадью поперечного сечения $\omega_{бп}$. Обозначая концентрацию солей в каналах через C, а в блоке — через C^* и используя выражение (17.2), запишем расход поступления солей в блок диффузионным путем [54]

$$Q_D = D^*_м \omega_б \frac{C - C^*}{l_б}, \tag{17.17}$$

где $l_б$ — расчетное расстояние от поверхности до центра блока; $D^*_м$ — коэффициент молекулярной диффузии в блоке [см. формулу (17.3)].

Примем скорость конвективного переноса в блоке равной $v_б = \bar{k}v$ (где $\bar{k}$ — относительная проницаемость блока), тогда расход поступления солей в блок определяется уравнением

$$Q_к = v_б \omega_{бп}(C - C^*) = \bar{k} v \omega_{бп}(C - C^*). \tag{17.18}$$

Уравнение баланса солей в блоке будет иметь вид

$$Q_D + Q_к = n^* V_б \frac{\partial C}{\partial t}, \tag{17.19}$$

где n^* — активная пористость блока. Подставляя зависимости (17.17) и (17.18) в (17.19), получим дифференциальное уравнение внутреннего солеобмена

$$n^* \frac{\partial C^*}{\partial t} = \alpha (C - C^*), \tag{17.20}$$

где $\alpha = \alpha_D + \alpha_к$ — коэффициент массообмена, составляющие которого α_D и $\alpha_к$ отражают действие диффузионного и конвективного переноса в блоке, причем

$$\alpha_D = D^*_м \frac{\omega_б}{l_б V_б}, \quad \alpha_к = \bar{k} \frac{\omega_{бп}}{V_б} v. \tag{17.21}$$

В такой модели коэффициент массообмена линейно зависит от скорости фильтрации v.

Если принять, что блоки имеют кубическую форму с размером l_*, то $V_б = l^3_*$, $\omega_{бп} = l^2_*$, $\omega_б = 6\, l^2_*$, $l_б = 0{,}25\, l_*$, и вместо (17.21) получим:

$$\alpha_к = \frac{1}{\lambda} v; \quad \alpha_D = \frac{24 D^*_м}{l^2_*}.$$

Получим общее уравнение солепереноса в проницаемых каналах и блоках. Для этого составим баланс солей в представительном элементе потока объемом V, включающем блок объемом $V_б$ и относящиеся

к нему каналы объемом $V_к$ (см. рис. 17.6, *б*). Пренебрегая дисперсией солей в каналах, запишем балансовое уравнение [54]

$$V_к n \frac{\partial C}{\partial t} + V_б n^* \frac{\partial C^*}{\partial t} + \Delta Q_с = 0, \tag{17.22}$$

где n — активная пористость каналов; $\Delta Q_с$ — изменение расхода солепереноса в пределах рассматриваемого элемента, причем

$$Q_с = \omega_к v_к C + \omega_{бп} v_б C^*, \tag{17.23}$$

где $\omega_к$ — площадь поперечного сечения каналов; $v_к$ — скорость фильтрации в каналах.

Рассмотрим одномерный поток в направлении l. Обозначая через $\varkappa$ относительное содержание каналов по площади поперечного сечения, имеем:

$$v = \varkappa v_к + (1-\varkappa) v_б, \quad \omega_к = \varkappa\omega, \quad \omega_{бп} = (1-\varkappa)\omega, \tag{17.24}$$

и тогда выражение (17.23) приводится к виду

$$Q_с = \omega v [C + \bar{k}(1-\varkappa)(C^* - C)].$$

Подставляя это выражение в балансовое уравнение (17.22) и имея в виду, что $\Delta Q_с \cong (\partial Q_с/\partial l)\,\Delta l$ и $\Delta l = V/\omega$, а также считая $V_к = \varkappa V$ и $V_б = (1-\varkappa)\,V$, получим

$$\varkappa n \frac{\partial C}{\partial t} + (1-\varkappa) n^* \frac{\partial C^*}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial l} [C + \bar{k}(1-\varkappa)(C^* - C)] = 0. \tag{17.25}$$

При малой проницаемости блоков, считая $\bar{k} = 0$, уравнение (17.25) упрощается

$$\varkappa n \frac{\partial C}{\partial t} + (1-\varkappa) n^* \frac{\partial C^*}{\partial t} + v \frac{\partial C}{\partial l} = 0. \tag{17.26}$$

В этом случае, как следует из сопоставления уравнений (17.26) и (17.15), переход от гомогенной среды к гетерогенной производится следующей заменой:

$$n \frac{\partial C}{\partial t} \to \varkappa n \frac{\partial C}{\partial t} + (1-\varkappa) n \frac{\partial C}{\partial t},$$

где $\varkappa$ определяется по формуле (17.24).

17.8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МИКРОДИСПЕРСИИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

Суммарная скорость теплопереноса, развивающегося по механизму микродисперсии определяется по формуле (17.12). Тогда изменение количества тепла в водонасыщенной породе в рассматриваемом бесконечно малом элементе за время dt может быть представлено [54] как

$$(C_{ск}\gamma_{ск} + n_0 C_в \gamma) \frac{\partial \theta}{\partial x} dx dt,$$

где $C_{ск}$ — удельная теплоемкость скелета породы плотностью $\gamma_{ск}$. Поскольку изменение количества тепла в элементе должно компенси-

роваться изменением теплового потока по его длине, уравнение не разрывности теплового потока выразится

$$\frac{\partial q_\theta}{\partial x} + (C_{ск}\gamma_{ск} + n_0 C_в \gamma)\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0.$$

Подставив в это уравнение зависимость (17.12), получим уравнение микродисперсии теплового потока

$$\left(n_0 + \frac{C_{ск}}{C_в}\frac{\gamma_{ск}}{\gamma}\right)\frac{\partial \theta}{\partial t} + v\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\lambda}{C_в \gamma}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \qquad (17.27)$$

Уравнения (17.27) и (17.15) аналогичны. От поля концентраций можно перейти к температурному полю, для этого следует заменить C на θ, вместо коэффициента дисперсии D подставить коэффициент температуропроводности $a_т = \lambda/(C_в\gamma)$. Используя аналогичную замену, можно получить и более общие уравнения теплопереноса, которые рассматриваются в работе [27].

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимают под массо- и теплопереносом в подземных водах?
2. Что такое гидрогеохимическая миграция, ее гидрогеохимический и гидродинамический аспекты?
3. Какие процессы относят к механизмам переноса? Что понимают под физико-химическими изменениями?
4. Что такое поршневое вытеснение? Почему фронт вытеснения представляется вертикальной границей? Какие допущения приняты в схеме поршневого вытеснения?
5. Действие каких факторов вызывает рассеивание вещества? Каким законом описывается этот процесс? Что такое переходная зона?
6. Что такое продольная и поперечная дисперсии? В каких условиях они проявляются?
7. Что такое микро- и макродисперсия? С действием каких факторов связано проявление последней?
8. В каких гидрогеологических условиях может возникнуть поперечная макродисперсия?
9. Какие параметры характеризуют конвективный, диффузионный и гидродисперсионный массоперенос?
10. Что такое коэффициент массообмена? В какой схеме массопереноса он используется?
11. Что такое гетерогенно-блоковая мозаичная схема среды и какая схема массопереноса ей отвечает?
12. Каким уравнением описывается скорость массопереноса при гидравлической дисперсии?
13. По каким из рассмотренных в гл. 17 схемам может идти массоперенос в потоках, имеющих однопластовое, двухпластовое и двухслойное строение, в зависимости от соотношения проницаемостей, мощностей слоев и скорости фильтрации в них?
14. Что такое изотерма Генри? Какой гидрогеохимический процесс она описывает?
15. В чем аналогия процессов тепло- и массопереноса? Подтвердите ее сопоставлением соответствующих уравнений.
16. Какие допущения принимаются при выводе дифференциальных уравнений массо- и теплопереноса?
17. Что такое репрезентативный элементарный объем и репрезентативный интервал времени применительно к гидрогеомиграционным исследованиям?

18. В чем схожесть и отличие понятий сплошной среды, используемых при геофильтрационных и гидрогеомиграционных исследованиях?

19. Запишите в общем виде начальные и граничные условия для массо- и теплопереноса.

20. Чем различаются дифференциальные уравнения массопереноса (17.15) и (17.26)?

Глава 18

ГИДРОГЕОХИМИЧЕСКАЯ МИГРАЦИЯ И ТЕПЛОПЕРЕНОС В РАЗЛИЧНЫХ ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

Закономерности гидрогеохимической миграции различны для водоносных пластов зон активного и замедленного водообмена и для слабопроницаемых разделяющих слоев, поскольку в первом случае решающую роль обычно играет конвективный перенос вещества, а в двух других этот перенос может иметь подчиненное значение.

18.1. ПОРШНЕВОЕ ВЫТЕСНЕНИЕ ПОДЗЕМНЫХ ВОД ОДИНАКОВОЙ ПЛОТНОСТИ

Эта схема — самая простая постановка гидрогеомиграционной задачи (см. рис. 17.1), так как мигрант движется со средней действительной скоростью u, связанной со скоростью фильтрации v соотношением (3.3), которое принимает вид

$$u_e = v_e/n_0 = kI_e/n_0, \tag{18.1}$$

где I_e — градиент в зоне фронта поршневого вытеснения. Опыт показывает [28, 31, 32], что активная n_0 пористость (трещиноватость) породы, через которую идет перенос несорбируемого мигранта, изменяется в зависимости от скорости фильтрации и времени контакта раствора с породой, так как при высоких скоростях перенос происходит по наиболее крупным порам, а при малых в процесс переноса вовлекаются мелкие и «тупиковые» поры и n_0 стремится к общей пористости.

Уравнение движения границы раздела жидкостей (фронта вытеснения) находится путем решения уравнения (17.1) относительно l или t

$$t = \int \frac{n_0 dl}{v_l} + A, \tag{18.2}$$

где A — произвольная постоянная.

Для конкретного решения уравнения (18.2) надо знать аналитическую зависимость v_l. В работах [7, 16] приведены аналитические решения некоторых задач при плоскопараллельной и планово-радиальной фильтрации.

Более просто решать уравнения (18.2) методом конечных разностей, по которому в v_l градиент I_l усредняется в пределах интервала

времени Δt на заданном участке Δl. При единичной ширине ленты тока (18.2) представляется в виде

$$\Delta t = \frac{n_0 \Delta l}{v_l} = \frac{n_0 \Delta l}{k I_l}, \tag{18.3}$$

где $I_l = \Delta H / \Delta l$ (здесь ΔH — известная разность напоров на длине Δl). Можно определить расстояние Δl, на которое переместится граница с заданным компонентом за принятый интервал Δt:

$$\Delta l = \frac{k}{n_0} I_l \Delta t. \tag{18.3а}$$

З а д а ч а. Запишите уравнения (18.3) и (18.3а) для ленты тока шириной $B_{ср}$.

В сложных условиях трубки тока строят по результатам моделирования и на модели определяют все исходные данные. Такие расчеты выполнены, например, в работах [11, 27].

В горизонтальнослоистых пластах, где соблюдается критерий (4.35) и не учитывается поперечная дисперсия между слоями мощностью m_i, стационарный перенос мигранта с концентрацией C_i в каждом слое идет независимо от переноса в соседних и определяется параметрами k_i, v_i и $n_{0,i}$ данного слоя. Общее количество мигранта $C_{об}$, проходящее через все сечение потока $m = \sum_1^p m_i$ (где p — число слоев), определяется как сумма $C_{об} = \sum_1^p C_i = \frac{1}{q} \sum_1^p v_i m_i C_i$ (здесь q — единичный расход потока; $q = \sum_1^p q_i$).

Конвекция с учетом сорбции. При поршневом вытеснении можно учесть наличие сорбции. Рассмотрим для этого баланс соли в трубке тока (см. рис. 17.1, *в*). Выделим согласно [54] бесконечно малый элемент трубки dl и составим элементарный баланс соли за время dt. В элемент трубки поступает с расходом Q некоторое количество солей $CQdt$, уходит — C^0Qdt, остается в результате взаимодействия порового раствора с породой (в порах элемента с площадью поперечного сечения $\omega - n_0\omega\,(C - C^0) = n_0\omega\Delta C$, сорбируется на породе — $\omega\Delta N dl$ (где $\Delta N = N - N^0$ — изменение сорбционной емкости породы). В итоге имеем:

$$\Delta C Q dt = n_0 \omega \Delta C dl + \omega \Delta N dl.$$

Используя эту зависимость, найдем скорость движения фронта вытеснения как $u_l = dl/dt$:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{Q}{\omega\,(n_0 + \Delta N/\Delta C)} = \frac{v_l}{n_0 + k_г} = \frac{v_l}{n_э}, \tag{18.4}$$

$n_э$ — эффективная пористость породы, характеризующая удельную суммарную емкость породы с учетом сорбции для рассматриваемого компонента раствора,

$$n_э = n_0 + k_г; \tag{18.4а}$$

здесь $k_г$ — коэффициент распределения, вычисленный согласно (17.9), $k_г = 1/\beta$ (для несорбируемых компонентов $k_г \approx 0$, для хорошо сорбируемых — это десятки и сотни относительных единиц и более).

Сопоставление выражений (18.4) и (18.1) показывает следующее: а) сорбция увеличивает емкость пласта и тем самым замедляет перенос; б) структуры конвективного потока с учетом и без учета сорбции аналогичны, и, следовательно, при учете сорбции в формулах (18.1), (18.3) и (18.3а) следует вместо n_0 принимать $n_э$ [см. (18.4а)].

Конвекция разновесомых жидкостей. Если плотности вытесняемой и вытесняющей жидкостей различны, то фронт вытеснения отклоняется от вертикали, причем более тяжелая жидкость вблизи фронта занимает нижнюю часть пласта. Такая картина наблюдается при вторжении соленых морских вод в поток пресных. Задача о нахождении границы их раздела рассмотрена в работах [31, 54]. Значительна роль плотностной конвекции и при вертикальном перемещении, например, когда тяжелые стоки из бассейна-накопителя поступают на поверхность водоносного горизонта и быстро распространяются вниз по его мощности со скоростью [31]

$$v_\rho = k_z \Delta\bar{\rho}/n_0, \tag{18.5}$$

где k_z — коэффициент фильтрации в вертикальном направлении; $\Delta\bar{\rho}$ — величина, которая, как видно из сравнения формул (18.5) и (18.1), играет роль вертикального градиента, $\Delta\bar{\rho} = (\rho_с - \rho_п)/\rho_п$ (здесь $\rho_с$, $\rho_п$ — плотности стоков и пресной воды).

Вертикальная плотностная конвекция возникает в зоне гидротерм, когда более холодные воды по зонам разломов опускаются на глубину, прогреваются и разгружаются восходящим потоком. Задачи плотностной конвекции исследуются в нефтяной гидрогеологии [8, 31]. Далее будем рассматривать процессы массопереноса для вод близких плотностей.

18.2. ДИФФУЗИОННЫЙ ВЫНОС СОЛЕЙ ЧЕРЕЗ РАЗДЕЛЯЮЩИЕ СЛОИ

Рассмотрим вынос соли из водоносного горизонта (зоны затрудненного водообмена), перекрытого слабопроницаемым разделяющим слоем (рис. 18.1), над которым находятся пресные воды зоны активного водообмена. Примем, что вынос солей из глубокого горизонта, уменьшающий со временем концентрацию его воды, происходит через разделяющий слой m_0 диффузионным переносом при $v \approx 0$. Процесс считаем квазистационарным. Тогда, согласно В. М. Шестакову [54], поток соли через разделяющий слой определяется уравнением (17.2) при $dC/dl = (C^0 - C)/m_0$, где C — текущая концентрация раствора в глубоком горизонте; C^0 — концентрация этого раствора в зоне активного водообмена (считается постоянной во времени).

Поскольку диффузионный поток поддерживается уменьшением содержания солей в глубоком горизонте, балансовое уравнение в эле-

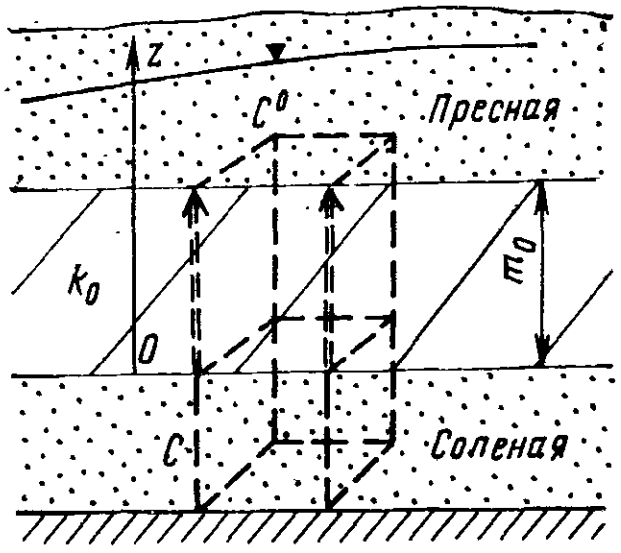


Рис. 18.1. Схема к задаче о диффузном рассолении пласта с соленой водой

менте этого горизонта для единичной площади горизонтального сечения будет

$$D_м \frac{C^0 - C}{m_0} = n_0 m \frac{dC}{dt}. \qquad (18.6)$$

Разделив в выражении (18.6) переменные и имея в виду, что $C > C^0$, после интегрирования получим

$$-\ln (C - C^0) = \frac{D_м}{n_0 m m_0} t + A.$$

Постоянную A для глубокого горизонта найдем из начального условия $t = 0$, $C = C_0$. Тогда $A = -\ln (C_0 - C^0)$, откуда окончательно имеем:

$$\ln \frac{C_0 - C^0}{C - C^0} = \frac{D_м}{n_0 m m_0} t$$

или

$$\bar{C} = \frac{C_0 - C^0}{C_0 - C^0} = e^{-\beta t}, \qquad (18.7)$$

где $\beta = D_м/(n_0 m m_0)$.

Используем выражение (18.7) для определения времени практически полного опреснения глубокого горизонта, когда относительная концентрация $\bar{C} \leqslant 0{,}02$. Этому значению $\bar{C}$ соответствует $\beta t \approx 4$, тогда $t_р \approx 4 n_0 m m_0 / D_м$. Приняв $D_м = 10^{-5}$ м^2/сут; $n_0 = 0{,}2$; $m = 100$ м и $m_0 = 100$ м, получим $t_р > 2$ млн. лет, что указывает на возможность серьезных качественных изменений в составе глубокозалегающих вод за счет молекулярной диффузии за геологическое время.

З а д а ч а. Приняв концентрацию вод глубокозалегающего водоносного горизонта постоянной (за счет растворения солей) и равной $C = C_0$ и используя зависимость (17.2), вывести уравнения единичного расхода потока солей через разделяющий слой и характеризующее распределение концентрации C_z несорбируемого компонента по мощности этого слоя, которые по форме были бы аналогичны уравнениям (9.8) и (9.9).

18.3. ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНО-ДИСПЕРСИОННОГО ПЕРЕНОСА В ГОМОГЕННОМ ОДНОМЕРНОМ ФИЛЬТРАЦИОННОМ ПОТОКЕ

В силу неравномерности поля скоростей фильтрации внутри порового пространства граница раздела между вытесняющими и вытесняемыми водами теряет четкую геометрическую форму, «размазывается», происходит дисперсия границы раздела, в результате образуется переходная зона, в которой наблюдается закономерное изменение концентрации мигранта (или минерализации воды) от $C = C_{вх}$ до $C = C_0$. Условия образования существования границы во времени зависят от закона изменения концентраций на границах зоны, фильтрационных и миграционных параметров пласта, его строения, наличия или отсутствия процессов сорбции и растворения и т. п. С геологической дисперсией мы встречаемся при изучении горизонтальной и вертикальной гидрогеохимических зональностей в водоносных пластах, формирования ореолов рассеяния вещества в подземных водах и т. п. Зоны дисперсий надо уметь выявлять и прогнозировать условия их образования в связи с оценкой возможных изменений качества подземных вод, охраной их от загрязнения и т. д.

Рассмотрим наиболее простые, но часто встречающиеся условия гидрогеохимической миграции однокомпонентного мигранта в гомогенном одномерном фильтрационном потоке, направленном по оси x со скоростью v, без учета поперечной дисперсии и физико-химических взаимодействий. Такую задачу называют фундаментальной и решают ее для условий полубесконечного миграционного потока, в котором при $t = 0$ $C_{x,0} = C_0$, на границах $x = 0$ концентрация мгновенно возрастает до $C_{0,t} = C^0$, а на удаленной границе $x = \infty$ $C_{\infty,t} = C_0$. Введем безразмерную переменную $\overline{C} = (C - C_0)/(C^0 - C_0)$, для которой краевые условия примут вид: $t = 0$, $\overline{C}_{0,t} = 0$; $x = 0$, $\overline{C}^0_{0,t} = 1$; $x = \infty$, $\overline{C}_{\infty,t} = 0$.

Решим задачу, используя интегральное преобразование по Лапласу—Карсону [24]. Введем [54] в исходное дифференциальное уравнение (17.15) вместо концентрации C ее изображение C_p согласно зависимости (13.12)

$$C_p = p\int_0^\infty C(t)e^{-pt}dt,$$

где p — параметр преобразования, $p = 1/t_p$. В результате пространственные производные сохраняют то же значение, что и для оригинала, а временная производная $\partial C/\partial t$ заменяется величиной $p(C_p - C_0)$. После преобразований получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$D\frac{d^2C_p}{dx^2} - v\frac{dC_p}{dx} = n_0 p(C_p - C_0). \qquad (18.8)$$

Решение уравнения (18.8) при условии $x = 0$, $\bar{C}_p = 1$ и $x = \infty$, $\bar{C}_p = 0$ имеет вид

$$\bar{C}_p = \frac{C_p - C_0}{C^0 - C_0} = e^{-ax},$$

где a находится из уравнения $a^2D + av = n_0p$ и равно

$$a = \sqrt{\left(\frac{v^2}{2D}\right) + \frac{n_0p}{D}} - \frac{v}{2D}.$$

Переход от изображения к оригиналу выполняется по справочнику [24]:

$$\bar{C} = \frac{C - C_0}{C^0 - C_0} = 0{,}5\,(\operatorname{erfc}\xi + e^{\eta}\operatorname{erfc}\xi') \qquad (18.9)$$

при

$$\xi = \frac{n_0x - vt}{2\sqrt{n_0Dt}}; \quad \xi' = \frac{n_0x + vt}{2\sqrt{n_0Dt}}; \quad \eta = \frac{vx}{D}, \qquad (18.9а)$$

где erfc ξ — табличная функция (см. гл. 10 и прил.).

При длительном процессе второй член в уравнении (18.9) становится малым, и с погрешностью $\varepsilon = 0{,}3/\eta$ решение принимает вид

$$\bar{C} = 0{,}5 \operatorname{erfc}\xi. \qquad (18.10)$$

Расчет по формуле (18.10) показывает, что формируются три миграционные зоны (см. рис. 17.2): I — вытесняющая, где $\bar{C} = 1$; II — переходная, где $1 > \bar{C} > 0$; III — вытесняемая, где $\bar{C} = 0$.

Из выражения (18.10) найдем значение $\bar{C}$ на фронте поршневого вытеснения. Его координата согласно формуле (18.1) равна $x = x_0 = vt/n_0$. Из выражения (18.9а) следует, что $\xi = 0$, тогда (см. прил.) erfc (0) = 1 и $\bar{C} = 0{,}5$, т. е. положение фронта соответствует середине переходной зоны со средней концентрацией между вытесняющим и вытесненным растворами.

Размер переходной зоны характеризуется величиной $\Delta x_п = x - x_0$, на которую передняя граница зоны обгоняет фронт поршневого вытеснения. Считая, что эта граница соответствует относительной концентрации $\bar{C} = 0{,}08$, согласно формуле (18.10) по таблице функции erfc значению $2C = 0{,}16$ соответствует аргумент $\xi_п = 1$. Тогда из уравнения (18.9а) имеем:

$$1 = \frac{x_0 + \Delta x_п - (v/n_0)\,t}{2\sqrt{Dt/n_0}},$$

отсюда половина ширины переходной зоны равна

$$\Delta x_п = 2\sqrt{Dt/n_0} = 2\sqrt{Dx_0/v}, \qquad (18.11)$$

где D определяется по формуле (17.4), а $x_0 = vt/n_0$.

Представим уравнение (18.11) иначе:

$$\Delta x_{\text{п}}/x_0 = 2/\sqrt{\text{Pe}}, \qquad (18.11а)$$

где Pe — безразмерный критерий Пекле:

$$\text{Pe} = vx_0/D. \qquad (18.11б)$$

Оценим условия, при которых можно пренебречь наличием переходной зоны в сравнении с продвижением фронта x_0. Учтем зависимость (17.4) и запишем выражение (18.11б) следующим образом:

$$\text{Pe} = vx_0/D_{\text{м}} + \delta_1 v \approx vx/(\sigma_1 v) = x_0/\sigma_1.$$

Тогда из уравнения (18.11а) $\Delta x_{\text{п}}/x_0 \approx 2\sqrt{\delta_1/x_0}$, и ориентировочно устанавливаем, что с погрешностью ε продольной дисперсией можно пренебречь [31]

$$\sqrt{\delta_1/x_0} < \varepsilon. \qquad (18.12)$$

Полагая в выражении (18.12) ε = 1 %, имеем:

$$\delta_1 < 0{,}0001 x_0. \qquad (18.12а)$$

Из условия (18.12а) видно, что при лабораторных работах, когда длина колонки $l_k = x_0 \approx 1$ м, оно не выполняется (для песков $\sigma_1 \approx 0{,}03$—$0{,}1$ м) и дисперсией пренебрегать нельзя. В натурных условиях при расстояниях $x_0 \approx 10^3$—10^4 м в однородных песках продольной дисперсией можно пренебречь, однако в трещиноватых породах этого делать нельзя, так как σ_1 может достигать 10 м и более. Дисперсия учитывается при проведении экспериментальных полевых работ в любых породах.

18.4. ОСНОВНЫЕ СХЕМЫ МАССОПЕРЕНОСА В ГЕТЕРОГЕННЫХ ГГС

Реальные ГГС характеризуются гетерогенностью строения, что существенно сказывается на массопереносе. Рассматривают две основные расчетные схемы:

1) с упорядоченной фильтрационной неоднородностью, когда согласно критерию (3.34) толща представлена чередованием хорошо- и слабопроницаемых слоев. В первых массоперенос развивается по механизму конвекции (поршневого вытеснения), во вторых — по молекулярно-диффузионному);

2) с неупорядоченной фильтрационной неоднородностью, когда в пласте имеются незакономерно расположенные трещинно-пористые блоки и крупные трещины или линзы слабопроницаемых пород и не выдержанные по разрезу и простиранию слои хорошо проницаемых пород.

В таких системах перемещение фронта вытеснения в слоях (трещинах) тормозится наличием молекулярно-диффузионного обмена со слабопроницаемыми слоями (блоками), в результате чего возникает дисперсия массового потока, и вблизи фронта вытеснения появляется переходная зона. Эффект макродисперсии внешне схож с эффектом микродисперсии, но масштабы его проявления значительно больше

и вызван он другими причинами. Если трещинно-пористые трещиноватые блоки и крупные трещины располагаются в пласте систематично, то такая среда условно отождествляется с первой расчетной схемой и называется мозаичной.

Рассматривают две предельные расчетные модели.

а) неограниченной емкости в слабопроницаемом слое (блоке). Это означает, что влияние молекулярно-диффузионного переноса за исследуемое время не достигает внешней границы слоя (блока);

б) макродисперсии в пределах всей слоистой системы. Это означает, что диффундирующий раствор заполнил всю мощность слабопроницаемого слоя (блока) и в пределах обеих систем (блоков и трещин) процесс развивается по модели конвективно-дисперсионного переноса, в которой используются параметры макродисперсии D^* и n^*.

Получим критерий для определения времени $t_н$, в течение которого можно пользоваться моделью неограниченной емкости. В данном случае массоперенос в слабопроницаемом слое описывается дифференциальным уравнением (17.15), в котором $v = 0$ и $D = D_м$. Начало координат принято на кровле, а ось z направлена вверх по мощности слоя m_0. Тогда полученное уравнение эквивалентно уравнению фильтрации (6.56), в котором вместо ΔH_{xt} следует полагать ΔC_{xt} или $\bar{C} = C/C_0$ (где C_0 — граничная концентрация на кровле хорошо проницаемого слоя, через которую в слабопроницаемый слой поступает диффундируемое вещество), а вместо коэффициента уровнепроводности a использовать аналогичный ему коэффициент молекулярной диффузии $D_м/n_0$ (где n_0 — пористость слабопроницаемого слоя). Для таких условий в гл. 10 уже оценивалось влияние внешней границы на процесс фильтрации и был получен критерий (10.5), по которому определяется время, в течение которого можно пользоваться схемой полубесконечного потока, т. е. $z_t \leqslant m_0$. В данном случае решается аналогичная задача. Следовательно, заменяя в выражении (10.5) длину потока $L_{гр}$ на мощность слабопроницаемого слоя, критерий можно переписать в таком виде

$$t^*_н \leqslant 0{,}25 \frac{m_0^2 n_0}{D_м}. \qquad (18.13)$$

Принимая для глинистых пород $D_м = 2 \cdot 10^{-5}$ м²/сут, $n_0 = 0{,}4$ и $m_0 = 1$ м², получаем по формуле (18.13) критическое время более 25 лет, и, следовательно, такая модель имеет широкую область применения.

18.5. МАКРОДИСПЕРСИЯ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМАХ

Представим массоперенос в двухслойном пласте (хорошо проницаемый слой — m, n и слабопроницаемый — m_0, n_0). В хорошо проницаемом слое поток воды с концентрацией C движется со средней скоростью v, через кровлю слоя наблюдается отток вещества с концентрацией C_0

(см. рис. 17.5). Составим дифференциальное уравнение массопереноса при использовании модели *неограниченной емкости*. Выделим в хорошопроницаемом слое элемент длиной dx и рассмотрим для него солевой баланс за dt (как это было выполнено при выводе дифференциального уравнения (17.15)). Принимаем в хорошопроницаемом слое конвективный перенос и пренебрегаем дисперсией, т. е. членом $D\,(\partial C/\partial x)$. Интенсивность оттока вещества через кровлю пласта на участке dx определяется согласно уравнению (17.2)

$$q_c = -D_м (dx \cdot 1) \left.\frac{\partial C_0}{\partial z}\right|_{z=0}.$$

Тогда, принимая параметры n, m и $D_м$ постоянными, аналогично выводу уравнения (17.15) получаем

$$mn\frac{\partial C}{\partial t} + mv\frac{\partial C}{\partial x} = D_м \left.\frac{\partial C_0}{\partial z}\right|_{z=0}.$$

В слабопроницаемом слое идет молекулярно-диффузионный перенос, и дифференциальное уравнение, аналогичное (6.38), имеет вид

$$n_0\frac{\partial C_0}{\partial t} = D_м\frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2},$$

где $C_0 = f(x, z, t)$.

Решим полученную систему уравнений операционным методом, применив преобразование Лапласа — Карсона (13.12), как это сделано в работе [31]. Получим для хорошо проницаемого слоя

$$\frac{mn\tilde{C}}{t_р} + mv\frac{\partial\tilde{C}}{\partial z} = D_м \left.\frac{\partial C_0}{\partial z}\right|_{z=0},$$

где $\tilde{C}$ — изображение функции C. Для слабопроницаемого слоя имеем:

$$n_0\frac{\tilde{C}_0}{t_р} = D_м\frac{d^2\tilde{C}_0}{dz^2}.$$

Решим его при граничных условиях $\tilde{C}_0|_{z=0} = \tilde{C}$ и $\tilde{C}_0|_{z\to\infty} = \tilde{C}|_{z=m} = 0$ (что отвечает схеме неограниченной емкости) и получим [24]

$$\tilde{C}_0 = \tilde{C}\exp\left[-z\sqrt{n_0/(D_м t_р)}\right].$$

Отсюда находим

$$\left.\frac{\partial\tilde{C}}{\partial z}\right|_{z=0} = -\tilde{C}\sqrt{n_0/D_м t_р}.$$

Подставив это в выражение для хорошо проницаемого слоя, получим

$$\left(\frac{mn}{t_р} + \sqrt{\frac{D_м n_0}{t_р}}\right)\tilde{C} + m\tilde{v}\frac{d\tilde{C}}{dx} = 0.$$

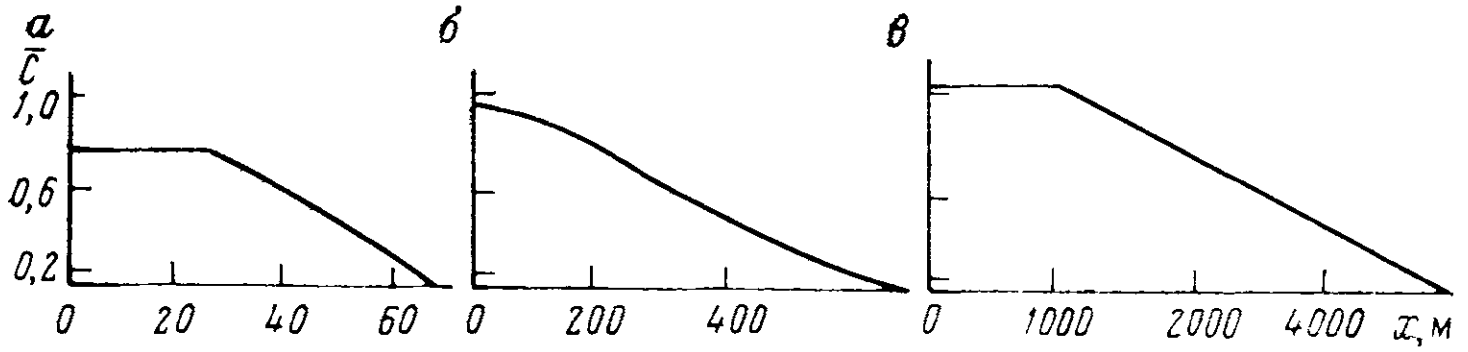


Рис. 18.2. Характерные графики изменения концентраций по направлению переноса в гетерогенной среде (по В. А. Мироненко):
а, б, в — положения, отвечающие увеличению времени переноса

Решение этого уравнения находим при граничных условиях $\tilde{C}|_{x=0} = \tilde{C}_0$, $\tilde{C}|_{x\to\infty} = 0$ путем разделения переменных

$$\tilde{C} = \tilde{C}_0 \exp\left[\left(-\frac{n}{vt_p} - \frac{1}{mv}\sqrt{\frac{D_м n_0}{t_p}}\right)x\right].$$

По таблице изображений [24] находим оригинал

$$\bar{C}(x, t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2mv}\sqrt{\frac{n_0 D_м}{t - t_0}}\right), \qquad (18.14)$$

где $x < vt/n$; $\bar{C}$ — относительная концентрация; $t_0 = xn/v$.

Формула (18.14) известна как решение Ловерье; при двухсторонем оттоке в ней опускается коэффициент 2. Характерные графики изменения $\bar{C}$ в пределах всей слоистой системы показаны на рис. 18.2 [31]. Размеры переходной зоны определяются оттоком вещества в слабопроницаемый слой и могут быть сопоставимы с общей длиной переноса, что существенно отличает процесс дисперсии в слоистой системе от аналогичного процесса в гомогенной системе (см. рис. 17.2,*в*)

Для модели *предельной макродисперсии* имеем другую картину переноса. В этом случае скорость $v_п^*$ движения фронта в пределах всей системы определяется по формуле (18.1) как скорость поршневого вытеснения $u_п^* = v/n^*$, где n^* характеризует суммарную емкость системы, приведенную к мощности m, т. е. $n^* = n + n_0 (m_0/m)$. Как показано в работе [31], процесс переноса $\bar{C}$ вещества описывается уравнением (18.10), в котором вместо D следует ввести D^* по уравнению (17.6). Полуширина переходной зоны $\Delta x_п$ определяется по формуле (18.11) с заменой D на D^* и n_0 на n^*.

Критерий применимости предельной модели макродисперсии имеет вид [31]

$$t_м^* = \frac{8m_0 (m_0 n_0 + mn)}{D_м}; \quad x \leqslant \frac{vt_м^*}{n^*}. \qquad (18.15)$$

Первое условие связано с требованием, чтобы для всех точек, удовлетворяющих второму условию, соблюдалось достаточно полное насыщение слабопроницаемого слоя. Второе условие обосновывает

достоверное описание процесса распределения концентраций для зоны, где $\bar{C} \geqslant 0{,}5$. В зоне, где $\bar{C} < 0{,}5$, практически всегда сохраняется недонасыщение слабопроницаемого слоя данным компонентом относительно хорошо проницаемого.

Возникает вопрос, можно ли схемой упорядоченного строения пользоваться в слоистой системе с близкими значениями геофильтрационных параметров? Наличие таких слоев создает дополнительный эффект макродисперсии в формировании переходной зоны. Кроме того, между слоями возникает поперечная гидродисперсия, которая выравнивает во времени концентрации вещества между слоями. Анализ этого эффекта подробно рассмотрен в работах [31, 33, 54], где показано, что время $t_{\text{п}}$, в течение которого можно в каждом слое массоперенос рассматривать независимо, определяется по формуле

$$t_{\text{п}} = \varepsilon \left[\frac{(m_0 n_0)^2}{(4 n_0 D_{\text{м}})} \right],$$

где ε — принятая погрешность оценки $\bar{C}$. При близких значениях проницаемостей рекомендуется заменять $D_{\text{м}}$ на коэффициент поперечной гидродисперсии, который уменьшает время $t_{\text{п}}$.

Если породы с *двойной трещиноватостью* (пористостью) характеризуются относительно регулярным расположением трещин и блоков, то для описания массопереноса справедливо пользоваться формулами для двухслойного пласта и под n понимать активную трещиноватость среды (наличие в объеме пласта крупных трещин), под n_0 — пористость (трещиноватость) блоков, а под m и m_0 — половину некоторого приведенного усредненного размера блока $m_{\text{б}}$, отражая в нем возможную форму блока. Для этого рассматривается соотношение между объемом $V_{\text{б}}$ насыщения веществом блока и площадью $\omega_{\text{б}}$, через которую идет массообмен блока и трещин. Дифференциальное уравнение, описывающее массоперенос в такой среде, приведено в гл. 17 (см. рис. 17.6).

Если принять согласно уравнению (18.13) для блоков модель неограниченной емкости, то в качестве решения используют уравнение (18.14) в таком виде [31]:

$$\bar{C}(x, t) = \operatorname{erfc}\left[\frac{x S_{\text{б}}}{2v} \sqrt{\frac{n_0 D_{\text{м}}}{t - (xn/v)}} \right],$$

где $S_{\text{б}} = 2/m_{\text{б}}$ для пластинчатых блоков и $S_{\text{б}} = 6/m_{\text{б}}$ для кубических при $V_{\text{б}}/\omega_{\text{б}} = 1/S_{\text{б}}$. Для пластинчатых блоков можно принять $m_0 = 0{,}5\ m_{\text{б}}$; для блоков кубической формы при $n_0 = 0{,}1$—$0{,}4$ $t^*_{\text{н}} < 0{,}05\ m^2_{\text{б}}$ ($m_{\text{б}}$ измеряется в сантиметрах, $t^*_{\text{н}}$ — в сутках). Безразмерный критерий (18.13) имеет вид

$$\tau_{\text{н}} = \frac{S^2_{\text{б}} D_{\text{м}} t}{n_0} < 0{,}5—1.$$

При длительном переносе, когда время $\tau_{\text{н}}$ полного диффузионного насыщения блока в данной точке значительно меньше времени подхода фронта вытеснения к этой точке, справедлива *предельная схема*

макродисперсии. В этом случае пользуются решением (18.10), где D заменяют на D^* при $\sigma_2 = m_б^2/8D_м$ (для блоков кубической формы). При этом критерий (18.15) принимает вид

$$\tau_н = \frac{D_м t}{m_б^2 n_0} > 2; \quad x \leqslant \frac{vl}{n_0}.$$

При неупорядоченной гетерогенно-блоковой среде пользуются схемой макродисперсии, определяя экспериментально основные параметры модели. Другие схемы массопереноса рассмотрены в работах [7, 13, 27, 28, 29, 32, 41, 51], результаты зарубежных исследований приведены в работах [52, 63].

Анализ показывает, что факторы и механизмы массопереноса, как и элементы неоднородности, проявляются в зависимости от характерного масштаба изучения (принятых сфер взаимодействий по пространству и времени). С изменением этого масштаба одни факторы становятся главными, другие теряют свое значение. Для оценки действия факторов и механизмов массопереноса особое значение приобретают длительные натурные наблюдения и диагностический анализ формирующихся гидродинамического и гидрогеохимического режимов. Важная роль в этом анализе принадлежит математическому моделированию (особенно в сложных случаях массопереноса). Используя данные наблюдений на построенной модели объекта, можно эпигнозным моделированием и факторно-диапазонным анализом выявить альтернативные расчетные схемы и модели переноса, которыми могут быть представлены геофильтрационные и гидрогеохимические условия объекта, и на них в последующем выполнить прогнозные расчеты. Примеры решения таких задач для диагностики опытно-миграционных работ (ОМР) и использование имитационного моделирования рассматриваются в работах [28, 31, 32].

18.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МИГРАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ

К миграционным параметрам относятся показатели, которые входят как коэффициенты в дифференциальные уравнения массопереноса: активная и эффективная пористость (трещиноватость), коэффициенты молекулярной диффузии, микро- и макродисперсии, параметры сорбции и массообмена, геометрические характеристики гетерогенно-блоковой структуры среды. В рассмотренных выше уравнениях физико-химические взаимодействия не были представлены самостоятельными процессами. Отсюда следует, что миграционные параметры, полученные на основе этих уравнений, являются обобщенными или эффективными характеристиками принятой для описания реального процесса массопереноса математической модели. Эти показатели включают как бы наше «незнание» сути гидрогеохимических взаимодействий и процессов, сопровождающих массоперенос в природной ГГС. Вместе с тем при опытном определении этих показателей в их числовые значения входят все погрешности экспериментальной оценки (погрешности измерения, интерполяции и др.), а также методические погреш-

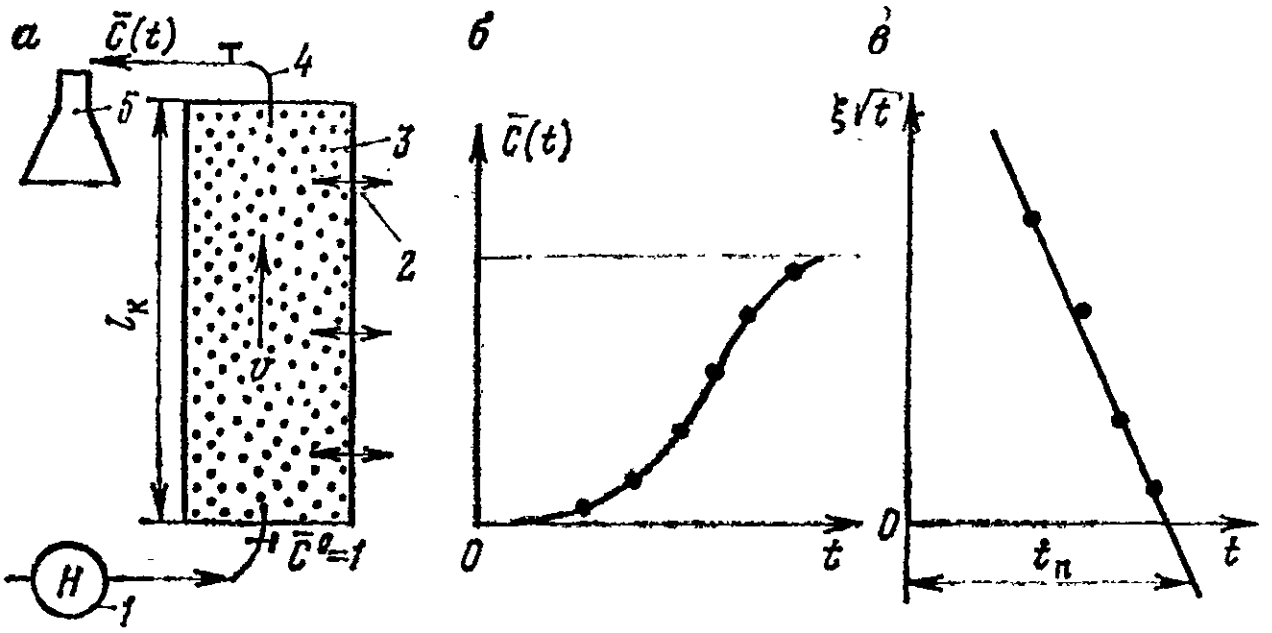


Рис. 18.3. Графоаналитическое определение миграционных параметров по данным лабораторных работ:

а — схема лабораторной установки; *б* — опытная выходная кривая; *в* — опытный график в координатах $\xi\sqrt{t}-t$. *1* — микронасос для подачи воды с мигрантом; *2* — трубки для отбора проб и резистивиметрических измерений; *3* — трубка с фильтрующей средой; *4* — шланг с регулирующим краном; *5* — измерительная колба

ности миграционной схематизации, связанные с выбором расчетной схемы и модели массопереноса.

Рассмотренные выше модели практически являются двухпараметрическими (содержат n_0, D или n_0^*, D_0^*). Небольшое число параметров позволяет разработать не очень сложные лабораторные и полевые методы их определения. В случае многопараметрических моделей получение необходимых параметров становится трудной задачей. Отсюда ясно стремление гидрогеологов описать сложный процесс компактной моделью. Но при этом возникает проблема использования обобщенных параметров в миграционных прогнозах и в первую очередь необходима оценка области их применения: а) какое время (относительно всего периода прогноза) можно использовать обобщенные параметры; б) как доказать, что модель, для которой они получены, «работает» весь период прогноза; в) сохраняется ли при этом одна и та же гидрогеохимическая обстановка (т. е. идет ли один и тот же комплекс гидрогеохимических процессов). Вопросы эти решить не просто, некоторые соображения приведены в работах [28, 31].

Параметры определяют в лабораторных и полевых условиях. В качестве индикаторов при нахождении n_0 чаще всего используют ион хлора как практически несорбируемый компонент. Характеристика разных индикаторов дана в работах [28, 32]. Для изучения пористых пород проводят опыты в лаборатории, при этом методика экспериментов при исследовании песков и слабопроницаемых пород различна, так как в первых доминирует конвекция, а во вторых — диффузия. Подробно такие исследования рассмотрены в работах [29, 32, 51], в частности в работах [28, 41] изложена методика опытов, проводимых на крупных монолитах для решения задач мелиорации.

Рассмотрим определение параметров с помощью конвективно-дисперсионной модели, отвечающей фундаментальной задаче и уравнению (18.10), согласно которому на вход фильтрационной колонки

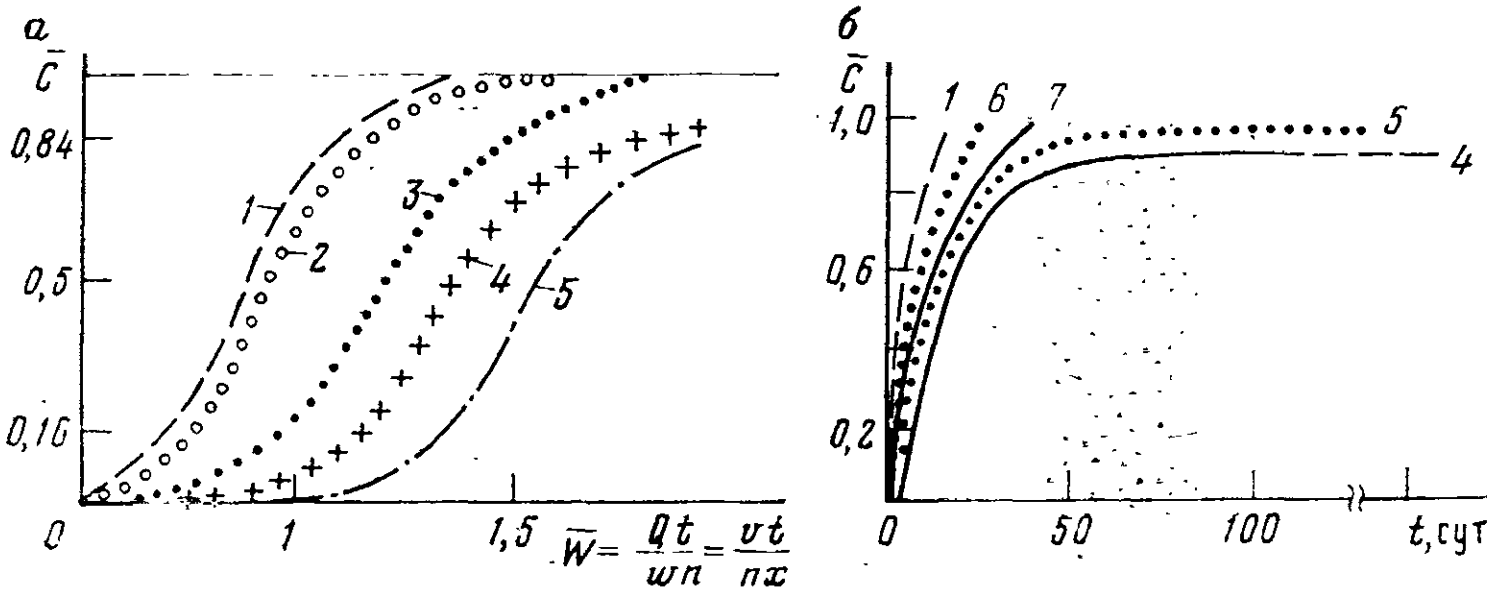


Рис. 18.4. Экспериментальные выходные кривые $\bar{C}$ для некоторых мигрантов по лабораторным данным Б. Великова (*а*) и кривые рассоления (*1*, *4*, *5*) и засоления (*6*, *7*) по данным А. П. Белоусовой для опытного участка Восточного Предкавказья (*б*):

1 — Cl^-; *2* — NO_3; *3* — HPO_4^{-2}; *4* — Na^+: *5* — F^-; *6* — SO_4^{-2}; *7* — Na^+

(рис. 18.3) непрерывно подается индикатор с постоянной концентрацией $\bar{C}^0 = 1$. В приборе устанавливается постоянная скорость фильтрации v и через определенные интервалы времени t на выходе из колонки отбираются пробы раствора, по которым строится выходная кривая $\bar{C}(t)$ (см. рис. 18.3, *б* и 18.4). По форме выходной кривой можно качественно оценить влияние сорбции (см. рис. 18.4). Миграционные параметры n_0 и D могут быть определены из выражения (18.9а). Представим зависимость (18.9а) в виде прямой линии в координатах $\xi\sqrt{t} - t$ (см. рис. 18.3, *в*):

$$\xi\sqrt{t} = \frac{l_к}{2\sqrt{D/n_0}} - \frac{v}{2n_0\sqrt{D/n_0}} \cdot t. \qquad (18.16)$$

Анализ выражения (18.16) показывает, что по отрезку t_n, отсеченному прямой на оси t, определяется значение

$$n_0 = vt_n/l_к, \qquad (18.17)$$

где $l_к$ — длина колонки при лабораторных опытах или расстояние от пусковой скважины до наблюдательной при полевых экспериментах. По углу наклона прямой к оси t с учетом зависимости (18.17) определяют коэффициент D. Значения аргумента ξ находят по данным выходной кривой $\bar{C}(t)$, которую строят в процессе опыта. Для каждого момента t_i определяют концентрацию $\bar{C}(t)$, затем согласно уравнению (18.10) по таблице функции erfc ξ находят значение функции и соответствующий ей аргумент ξ. Прямолинейность графика является важным диагностическим показателем того, что опытные данные отвечают принятой модели переноса.

При проведении опыта необходимо соблюдать постоянство граничного условия $x = 0$, $C^0 = \text{const}$. Скорость фильтрации также должна быть постоянной и не слишком большой, иначе будут получены за-

ниженные значения n_0 в силу неполного заполнения емкости (при высоких значениях v часть пор является тупиковыми). Для выяснения зависимости n_0 от v проводят опыт при нескольких значениях v. В лабораторных опытах длина колонки $l_к$ выбирается так, чтобы число Пекле $Pe = vl_к/D > 50—100$. Для однородных песчаных пластов определять коэффициент продольной дисперсии нецелесообразно [см. разд. 18.4, формулу (8.13)].

Можно использовать и пакетный запуск индикатора. В этом случае расчетную зависимость находят методом сложения течений на основе решения (18.10) [29, 31, 32]. Если в опытах используют несорбируемые компоненты, например Cl, то по результатам эксперимента определяют активную пористость, а по (18.4а) во всех случаях — эффективную. Постановка и проведение полевых ОМР подробно описаны в работах [33, 41], а также в учебниках [31, 54].

18.7. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Тепло в водоносных пластах переносится конвективным или кондуктивным путем, при этом, как и при массопереносе, развиваются процессы механической дисперсии. При конвекции движение теплового фронта вытеснения оценивается по формулам (18.3) и (18.3а), если в них вместо I_l и ΔH использовать температурный градиент I_l^θ и перепад температур $\Delta\theta$ в пределах выделенной части Δl ленты теплового потока, а k заменить на λ. Для песчано-глинистых и карбонатных пород характерны значения $\lambda = 0{,}5—3{,}5$ Вт/(м·К), удельной теплоемкости воды $c_в = 4{,}2 \cdot 10^6$ Дж/(кг·К) и пород $c_п = (3— — 3{,}7) \cdot 10^6$ Дж/(кг·К) [31].

Задание. Рассмотрите аналогичио массопереносу (см. разд. 18.1) тепловой баланс для трубки тока и получите формулу, связывающую эффективную пористость с теплоемкостью водонасыщенной породы $C_п$ [31, 53].

$$n_\theta = \frac{c_п}{c_в} = n_0 + (1 — n_0)\frac{c_{ск}}{c_в}, \qquad (18.18)$$

где $c_{ск}$ и $c_в$ — удельные теплоемкости минерального скелета и воды. Разъясните физический смысл величины n_θ; какие выводы следуют из сравнения формул (18.4а) и (18.18)?

Теплоперенос с учетом микродисперсии для гомогенной среды описывается уравнением (17.27), которое принимает вид

$$D_\theta \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} — v\frac{\partial\theta}{\partial x} = n_\theta \frac{\partial\theta}{\partial t}, \qquad (18.19)$$

где D_θ — коэффициент тепловой гидродисперсии, $D_\theta = \lambda/c_в$; n_θ — определяется по формуле (18.18). Излучением тепла пренебрегают.

Сопоставление уравнений (18.19) и (17.15) показывает их формальную аналогию по математическому описанию механизмов тепло- и массопереноса и обобщенных параметров, характеризующих эти процессы. Распространяя аналогию на уровень макродисперсии в гетерогенных системах, можно принять, что между элементами этих систем (слоями или трещинами и блоками) происходит кондуктивный теплообмен,

описываемый, как это следует из уравнений (17.27) и (18.19), при $v = 0$ (нет конвекции) зависимостью

$$\lambda_i \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = c_{\text{п}, i} \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

в которой коэффициент температуропроводности $a_i = \lambda_i / c_{\text{п}, i}$ становится аналогом коэффициента $D_{\text{м}, i}/n_i$ (см. разд. 18.5). Однако в абсолютных значениях этих коэффициентов аналогии нет [31]: $a_i = 0{,}02—0{,}1$ м^2/сут, $D_\theta = 0{,}01—0{,}08$ м^2/сут, что на два-три порядка выше, чем значения аналогичных параметров массопереноса. Это резко меняет соотношение между конвективной и кондуктивной составляющими, значения параметра Ре уменьшаются, размер зоны дисперсии $2\Delta x_{\text{п}}$ оказывается соизмеримым с длиной фронта вытеснения, и необходимость учета продольной дисперсии в тепловом потоке возрастает. Повышается также и роль макродисперсии теплового потока в гетерогенно-блоковой среде.

Рассмотрим использование закономерностей распределения температуры в разделяющем глинистом слое, где на кондуктивный тепловой поток (возникший вследствие влияния геотермического градиента) накладывается вертикальный водообмен, для определения скорости v_z последнего. Имеем [54] два водоносных пласта с температурой θ_1 и θ_0, разделенных слабопроницаемым слоем глин m. Напоры в пластах различны, и существует перетекание с неизвестной скоростью v_z. Примем единичный тепловой поток q_θ стационарным. Он описывается уравнением (17.12), которое при объемной теплоемкости $c_{\text{в}}$ после разделения переменных имеет вид

$$\frac{d\theta}{c_{\text{в}} v_z \theta - q_\theta} = \frac{dx}{\lambda}.$$

Принимая $\lambda = \text{const}$, после интегрирования получаем

$$\frac{1}{c_{\text{в}} v_z} \ln\left(\theta - \frac{q_\theta}{c_{\text{в}} v_z}\right) = \frac{z}{\lambda} + A. \qquad (18.20)$$

По граничным значениям температуры на кровле ($z = m$, $\theta = \theta_1$) и подошве ($z = 0$, $\theta = \theta_0$) глин найдем постоянную интегрирования

$$A = \frac{1}{c_{\text{в}} v_z} \ln\left(\theta_0 - \frac{q_\theta}{c_{\text{в}} v_z}\right)$$

и после подстановки ее в уравнение (18.20) и преобразований получим выражение для теплового потока

$$q_\theta = c_{\text{в}} v_z \left[\theta_0 - \frac{\theta_1 - \theta_0}{\exp\left(c_{\text{в}} q_\theta m/\lambda\right) - 1}\right]$$

Подставив затем значения A и q_θ в зависимость (18.20) и вводя относительную температуру $\Delta\theta = \frac{(\theta - \theta_0)}{(\theta_1 - \theta_0)}$, получим уравнение

$$\Delta\theta = \frac{\exp\left(c_{\text{в}} v_z z/\lambda\right) - 1}{\exp\left(c_{\text{в}} v_z m/\lambda\right) - 1}, \qquad (18.20\text{а})$$

которое было получено С. Бредхофом [8] и используется в практике для определения скорости перетекания v_z и проницаемости глинистого слоя по данным термометрии [26, 31, 54]. При отсутствии перетекания распределение температур отвечает прямой линии. При вогнутой термограмме v_z перетекание направлено вниз, при выпуклой — вверх. Неоднородность разделяющего слоя искажает термограмму. Решение других важных для практики задач рассмотрено в работе [27].

18.8. ОСОБЕННОСТИ МИГРАЦИОННОЙ СХЕМАТИЗАЦИИ И ИЗУЧЕНИЯ МАССОПЕРЕНОСА В ГГС

Завершая рассмотрение массопереноса, поговорим о двух важных с нашей точки зрения аспектах, с которыми связано дальнейшее развитие теории массопереноса в ГГС. Первый связан с проблемой достоверности решения прогнозных и обратных задач массопереноса и, в частности, определения типа моделей массопереноса и их миграционных параметров. Второй аспект является следствием первого и касается физических основ феноменологического обоснования математического анализа процессов массопереноса в ГГС разных уровней.

Проблема достоверности количественного изучения массопереноса в ГГС значительно сложнее, чем аналогичная проблема в теории фильтрации, так как требует обоснования двух как минимум совместно «работающих» моделей — гидрогеодинамической и гидрогеохимической, а если учитывать и температурный фактор, то и третий — гидрогеотермический. Достоверность в первую очередь связана с миграционной схематизацией.

В процессах массопереноса роль различных факторов изменяется со временем. Это означает смену во времени различных моделей, которыми реальный процесс может быть аппроксимирован. Оценивать это явление целесообразно путем сравнения природной обстановки с расчетной схемой. Для этого по данным натурных наблюдений строят безразмерные диагностические графики выходных кривых и, сравнивая их с эталонными, устанавливают закономерности процесса и адекватность типовой модели массопереноса. Как показывают исследования, такая идентификация часто бывает неоднозначной в силу малого различия выходных кривых $C(t)$. Примеры такого анализа приведены в работах [28, 32]. Заметим, что нередко на одном и том же объекте геофильтрационная схематизация, принятая для исследования процесса фильтрации, оказывается неприемлемой при изучении процессов массопереноса [28, 31, 54].

В миграционной схематизации особое внимание должно уделяться обоснованию тех гидрогеохимических процессов, которые наблюдаются на изучаемом объекте и являются так называемыми начальными миграционными условиями, а также тех, которые возникают под влиянием факторов прогноза.

Модели массопереноса содержат обобщенные параметры, и не всегда известны вид, число и роль тех гидрогеохимических (физико-химических) процессов, которые могут появиться в прогнозной гидрогеохимической обстановке. Поэтому базирующаяся на обобщенных па-

раметрах инженерная оценка процесса миграции может оказаться неверной. При гидрогеохимической схематизации требуется глубокое проникновение в физическую, т. е. гидрогеохимическую, сущность исследуемого математически процесса массопереноса, чтобы яснее видеть те гидрогеохимические допущения, которые принимаются при схематизации и выборе модели, и представлять те погрешности или неоднозначности, которые могут возникнуть в связи с этим в инженерных оценках. Один из путей решения проблемы связан с повышением уровня гидрогеохимической обоснованности моделей массопереноса. Для этого задачи массопереноса должны решаться совместно гидрогеологами, работающими в области гидрогеодинамики и в области гидрогеохимии. Особое внимание должно быть уделено постановке и проведению целенаправленных натурных гидрогеохимических режимных наблюдений (мониторинг), по данным которых можно не только проверить оправдываемость принятых для прогноза моделей и миграционной схематизации, но и выявить необходимый объем и содержание той информации, которая будет обеспечивать надежное инженерное решение задач с учетом экологических требований.

Перечисленные выше задачи массопереноса основаны на представлениях механики сплошных сред. Имеется и другой подход, в котором перенос вещества в подземных водах рассматривается с позиций молекулярно-кинетической теории. Такой подход изложен в следующем параграфе, который не является обязательным при изучении основного курса лекций.

18.9. МИГРАЦИЯ ХИМИЧЕСКИХ КОМПОНЕНТОВ В ПОДЗЕМНЫХ ВОДАХ С ПОЗИЦИЙ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ

Молекулярно-кинетическая модель миграции. Рассмотрим движение подземного раствора в поровом пространстве с учетом взаимодействия частиц раствора со скелетом породы и общих закономерностей, изложенных в разделах 2.4 и 2.5.

На рис. 2.6 приведена условная схема сечения порового пространства. Гидродинамический поток направлен перпендикулярно к плоскости чертежа. В этом сечении в соответствии с интенсивностью взаимодействия молекул воды и частиц растворенных веществ со скелетом породы выделено четыре зоны. Однако, учитывая плавный переход между зонами, в принципе можно выделить множество эквипотенциальных зон, в каждой из которых (см. рис. 2.6, зоны n, $n + 1$, . . .) энергия связи с твердой фазой E_i частиц сорта i будет постоянной величиной [25, 43, 44]. Стремление системы к равновесному состоянию приводит к выравниванию встречных потоков частиц между зонами [43], в частности поток J_n из зоны n выравнивается со встречным потоком J_{n+1} из зоны $n + 1$, т. е. на границе зон $J_n \approx J_{n+1}$. Учитывая [28], что $J_n = kc_n j_n$ и $J_{n+1} = kc_{n+1} j_{n+1}$, запишем: $kc_n\ j_n = kc_{n+1} j_{n+1} = \ldots = J_i$ (где k — коэффициент пропорциональности; c_n, c_{n+1} — концентрации частиц соответственно в зонах n и $n + 1$; j_n, j_{n+1} — трансляционные подвижности частиц i в тех же зонах;

J_i — поток (масса) частиц через границу между зонами). Таким образом, поток из любой зоны в соседнюю будет описываться уравнением

$$J_i = kc_i j_i. \tag{18.21}$$

Трансляционная подвижность j_i определяется из соотношения [28]

$$j_i = j_0 \exp\left(-\frac{E_i}{RT}\right), \tag{18.22}$$

где j_0 — предэкспоненциальный коэффициент подвижности; E_i — энергия активации или потенциального барьера, характеризующая энергию связи частицы i с твердой фазой в данной зоне *; R — газовая постоянная; T — температура по Кельвину.

Из формул (18.21) и (18.22) следует, что концентрация частиц i в любой зоне равна

$$c_i = \frac{J_i}{kj_i} \exp \frac{E_i}{RT}. \tag{18.23}$$

В условиях квазистационарной одномерной фильтрации при движении i частиц вместе с потоком их полная энергия E тратится на преодоление сил связи с твердой фазой E_i (на преодоление потенциального барьера) и поступательное движение $E_к$ рассматриваемых частиц вместе с потоком:

$$E = E_i + E_к = \text{const}. \tag{18.24}$$

Для анионов (и дипольных молекул воды) величина E_i значительно меньше, чем для катионов. Взаимодействие анионов с твердой фазой проявляется лишь на очень небольших расстояниях от поверхности твердых частиц, поэтому в большей части порового пространства величиной E_i для анионов можно пренебречь, и равенство (18.24) примет вид

$$E \approx \dot{E}_к = \text{const}, \tag{18.24а}$$

где $\dot{E}_к$ — кинетическая энергия анионов и других слабо взаимодействующих с твердой фазой частиц.

Из сказанного вытекает, что катионы в гидродинамическом потоке через пористую среду некоторый путь l проходят с различной в разных зонах средней статистической скоростью поступательного перемещения v_i, определяемой из соотношения

$$E_к = E - E_i = Mv_i^2/2, \tag{18.25}$$

где M — масса комплекса, в который входит данная частица.

---

* Используемая здесь величина энергии активации представляет собой переменную составляющую (зависящую от взаимодействия с породой) полной энергии активации частицы; другая составляющая (не связанная с влиянием твердой фазы) является в среднем постоянной.

Для катионов величины $E_к$ и v_i зависят от зоны, в которой происходит перемещение, так как в разных зонах величина E_i различная. Анионы на том же пути l через пористую среду имеют в основном постоянную кинетическую энергию, определяемую по формуле (18.24а), независимо от зоны. Лишь на очень небольшом расстоянии от поверхности твердой фазы $E_к$ быстро падает. В то же время анионы и катионы, взаимодействуя, образуют незаряженные комплексы или «внешние» ионные пары (аквакомплексы, состоящие из катионов, анионов и молекул воды [25]). Такие комплексные частицы, концентрация которых соответствует растворенной соли, имеют наблюдаемую скорость поступательного перемещения $\tilde{v}_i$;

$$\tilde{v}_i = v_i + \dot{v}, \tag{18.26}$$

где v_i — переменная составляющая, определяемая величинами $E_к$ и E_i; $\dot{v}$ — постоянная составляющая, определяемая величиной $E_к = \text{const}$.

Отметим, что в соответствии с законом сохранения количества движения, строго говоря, величины v_i и $\dot{v}$ не являются поступательными скоростями движения катионов и анионов, но $v_i = k' v_i'$ и $\dot{v} = k'' \dot{v}'$ (где v_i' и $\dot{v}'$ — скорости соответственно катионов и анионов; k', k'' — коэффициенты, связанные с соотношением масс внутри аквакомплексов, $k' < 1$, $k'' < 1$).

Таким образом, скорость $\tilde{v}_i$, о которой можно судить по изменению концентрации соответствующей соли в фильтрующемся растворе, фактически определяется характером изменения величины v_i.

Определим теперь концентрацию катионов c_i в одной из эквипотенциальных зон (см. рис. 2.6), принадлежащих выходному сечению, в котором регистрируется изменение концентрации соли в процессе массообмена. В соответствии с формулами (18.23) — (18.25) имеем:

$$c_i = \frac{J_i}{kj_0} \exp\left(\frac{E - Mv_i^2/2}{RT}\right) = \frac{J_i}{kj_0} \exp\frac{E}{RT} \exp\frac{-Mv_i^2}{2RT}.$$

Введем обозначения:

$$A = \frac{J_i}{kj_0} \exp\frac{E}{RT} \quad \text{и} \quad z_i = v_i \sqrt{\frac{M}{2RT}}.$$

Тогда

$$c_i = A \exp\left(-z_i^2\right). \tag{18.27}$$

Обозначим концентрацию катионов i во всем сечении C_i, тогда концентрация c_i в одной из эквипотенциальных зон будет: $c_i = dC_i/dz_i$. Разделив переменные и используя зависимость (18.27), имеем:

$$dC_i = A \exp\left(-z_i^2\right) dz_i.$$

Проинтегрировав это выражение, получим значение C_i с помощью интегральной функции

$$C_i = \int_{\infty}^{v_i\sqrt{M/(2RT)}} c_i dz_i = A \int_{\infty}^{v_i\sqrt{M/(2RT)}} \exp\left(-z_i^2\right) dz_i. \qquad (18.28)$$

Если на расстоянии $l = \text{const}$ от источника поступления катионов i в подземную воду наблюдать за их накоплением в потоке, то с увеличением времени t в сечении накапливаются частицы от самых быстрых (имеющих максимум кинетической энергии) до самых медленных. Следовательно, при $v_i = l/t$, если $l = \text{const}$ и $t \to \infty$, то $v_i \to 0$ и $v_i\sqrt{M/2(RT)} \to 0$. Из уравнения (18.28) получим:

$$C_i = -A \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{v_i\sqrt{M/(2RT)}}^{\infty} \exp\left(-z_i^2\right) dz_i.$$

Учитывая, что

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{v_i\sqrt{M/(2RT)}}^{\infty} \exp\left(-z_i^2\right) dz_i = \operatorname{erfc}\left(v_i\sqrt{\frac{M}{2RT}}\right),$$

будем иметь

$$C_i = A \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}\left(v_i\sqrt{\frac{M}{2RT}}\right). \qquad (18.29)$$

Это выражение справедливо для любого сечения потока. Для входного сечения $C_i = C_i^0$ и $l = 0$ (граничные условия) и любого момента $t > 0$ $v_i = 0$. Для всех сечений, находящихся на расстоянии $l > 0$ от входного при $t = 0$, $C_i = 0$ (начальные условия) и $v_i = 0$. Естественно, что реальные частицы не могут двигаться с бесконечной скоростью, и выражение $v_i = \infty$ — это математическая абстракция, вытекающая из начальных условий. Укажем также, что в соответствии со свойствами функции (18.29) при значении аргумента, лишь в 3 раза превышающем его среднее квадратическое значение, функция практически обращается в нуль, т. е. $C_i = 0$ (подробнее о роли средних квадратических значениях аргумента и скорости частиц v_i^* см. ниже).

Используя формулу (18.29), определим концентрацию во входном сечении

$$C_i^0 = -A \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(0) = -A \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Введем значение относительной концентрации $\bar{C}_i$

$$\bar{C}_i = \frac{C_i}{C_i^0} = \operatorname{erfc}\left(v_i\sqrt{\frac{M}{2RT}}\right). \qquad (18.30)$$

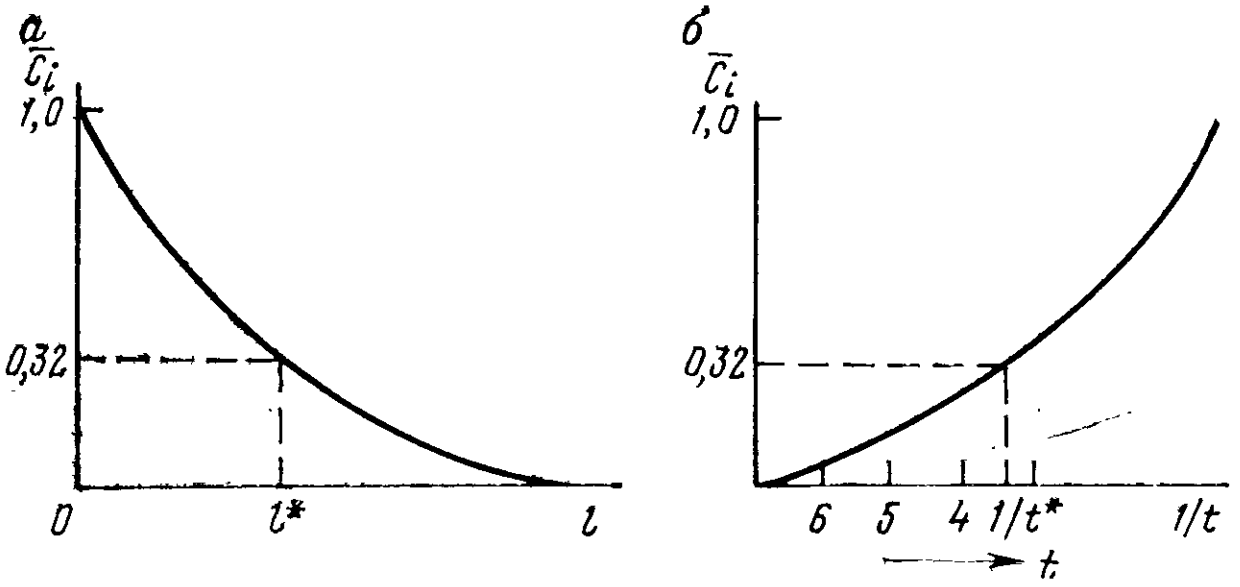


Рис. 18.5. Индикаторные кривые:

а — изменения относительной концентрации компонента по длине потока, $\bar{C} = f(l)$, на определенный момент времени; *б* — то же, в зависимости от времени, $\bar{C} = f(1/t)$, на определенном расстоянии l от входного сечения

Упростим полученное выражение

$$\mu = \sqrt{\frac{M}{2RT}}\ ; \quad \bar{C}_i = \operatorname{erfc}(\mu_i v_i). \tag{18.31}$$

Зависимости (18.30) и (18.31) являются математической моделью миграции химических компонентов (частиц i) в потоке подземных вод для случая, когда мигрирующее вещество задерживается (сорбируется) из гидродинамического потока водовмещающей породой (модель массообмена первого типа). Преобразуем формулу (18.31), учитывая, что $v_i = l/t$:

$$\bar{C}_i = \operatorname{erfc}\left(\frac{\mu_i}{t} l_i\right) \text{ при } t = \text{const}; \tag{18.32}$$

$$\bar{C}_i = \operatorname{erfc}\left(\mu_i l \frac{1}{t_i}\right) \text{ при } l = \text{const}. \tag{18.33}$$

Важно подчеркнуть, что μ_i — это обобщенный параметр, который зависит от химического состава воды, свойств водовмещающих пород и порового пространства, скорости потока, температуры и других факторов.

Графическим выражением математической модели процесса массопереноса являются так называемые индикаторные кривые (рис. 18.5) $\bar{C}_i = f(l_i)$ и $\bar{C}_i = f(1/t_i)$, соответствующие выражениям (18.32) и (18.33). Представим, что во входное сечение поступает компонент i, а в выходном сечении на расстоянии l от первого измеряется относительная концентрация этого компонента. Суммарная концентрация компонента i сначала мала, но со временем она стремится к единице: $\bar{C}_i \to 1$ при $v_i \to 0$ или, учитывая зависимость (18.26), при $\tilde{v}_i \to v$. Если в момент $t > 0$ замерить $\bar{C}_i$ в ряде сечений, отстоящих от входного на расстояния $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$, то получим кривую (см. рис. 18.5) $\bar{C}_i = f(l_i)$. Если же на заданном расстоянии l в течение времени t

измерять концентрацию $\bar{C}_i$, то получим кривую $\bar{C}_i = f\,(1/t_i)$ (аргумент функции $1/t_i$ на рис. 18.5 для удобства оценки развития процесса массопереноса во времени уменьшается слева направо).

Основные параметры молекулярно-кинетической модели массопереноса. Определим понятие скорости химического компонента в гидродинамическом потоке. *Под феноменологической скоростью некоторого компонента в фильтрационном потоке следует понимать среднюю квадратическую скорость поступательного перемещения частиц данного компонента* v_i^* [28]. Для нахождения v_i^* следует иметь в виду, что среднему квадратическому значению аргумента $\mu_i v_i^* = 1/\sqrt{2}$ в функции $\bar{C}_i = \operatorname{erfc}(\mu_i v_i)$ соответствует значение

$$\bar{C}_i^* = \operatorname{erfc}(1/\sqrt{2}) = 0{,}32, \tag{18.34}$$

что вытекает из свойств функции erfc x.

Исходя из (18.26), $v_i = \tilde{v}_i - \dot{v}$, тогда выражение (18.31) можно переписать

$$\bar{C}_i = \operatorname{erfc}[\mu_i(\tilde{v}_i - \dot{v})]. \tag{18.35}$$

Следовательно, среднему квадратическому значению аргумента $[\mu_i(\tilde{v}_i - \dot{v})]^* = 1/\sqrt{2}$ в функции (18.35), как и в (18.34), соответствует значение $\bar{C}_i^* = 0{,}32$. Заметим, что среднему квадратическому значению $[\mu_i(\tilde{v}_i - \dot{v})]^*$ соответствует при $\mu_i = \text{const}$ и $\dot{v} = \text{const}$ среднее квадратическое $\tilde{v}_i^*$:

$$[\mu_i(v_i - \dot{v})]^* = \mu_i(\tilde{v}_i^* - \dot{v}) = 1/\sqrt{2}. \tag{18.36}$$

Для определения $\tilde{v}_i^*$ на практике необходимо по экспериментальной кривой $\bar{C}_i = f\,(l_i)$ при фиксированном t (см. рис. 18.5) найти точку, соответствующую значению $\bar{C}_i^* = 0{,}32$, на оси абсцисс получить значение $\tilde{l}_i^*$, а затем рассчитать $\tilde{v}_i^*$:

$$\tilde{v}_i^* = \tilde{l}_i^*/t. \tag{18.37}$$

По экспериментальной кривой $\bar{C}_i = f\,(1/t_i)$ при фиксированном l (см. рис. 18.5) тем же способом находят величину $(1/\tilde{t}_i)^*$, а затем $\tilde{v}_i^*$:

$$\tilde{v}_i^* = l\,(1/\tilde{t}_i)^*, \tag{18.38}$$

где $\tilde{l}_i^*$ и $(1/\tilde{t}_i)^*$ — наблюдаемые параметры (соответственно путь и обратная величина времени) миграции условной точки, соответствующей концентрации изучаемой соли $\bar{C}_i^* = 0{,}32$.

Важно подчеркнуть, что каждый компонент (соль или другое вещество), мигрирующий в подземных водах, в данных условиях имеет свою индивидуальную среднюю квадратическую скорость $\tilde{v}_i^*$, которую следует называть *эффективной скоростью*. Эта скорость характеризует движение аквакомплексов, в которые входят катионы и анионы данной соли, а также молекулы воды.

Логично и физически оправдано считать, что миграция различных компонентов подземных вод протекает в *едином поровом пространстве*, характеризуемом общей пористостью n. В то же время каждый компонент раствора испытывает свое тормозящее влияние твердой фазы, т. е., используя аналогию с законом Дарси, каждый компонент имеет свой коэффициент фильтрации k_i в данной породе: $v_i^{\Phi} = k_i I$ (где v_i^{Φ} — скорость фильтрации i-го компонента (соли, вещества)). Экспериментальная проверка подтвердила теоретическое предположение о том, что можно использовать зависимость, аналогичную закону Дарси, для описания процесса миграции различных компонентов в подземных водах и прогнозирования [28]. Опытным путем, определив $\tilde{v}_i^*$ и зная общую пористость n, можно найти k_i

$$v_i^{\Phi} = \tilde{v}_i^* n \quad \text{и} \quad k_i = v_i^{\Phi}/I = \tilde{v}_i^* n/I. \tag{18.39}$$

Теоретическое и практическое изучение параметра k_i показало, что он удобен для общей оценки способности компонентов к массопереносу или массообмену (например, чем меньше k_i, тем активнее данный компонент сорбируется в гидродинамическом потоке, и наоборот), сравнительной оценки способности разных пород к массообмену по отношению к данному компоненту i и прогнозирования. Подытоживая все сказанное, дадим определение параметра k_i: коэффициент фильтрации компонента — это произведение эффективной скорости его частиц и общей пористости водовмещающей породы при напорном градиенте, равном единице.

Для более точного описания процесса миграции различных компонентов и удобства прогнозирования, учитывая согласно (18.26) смысл наблюдаемой скорости миграции компонента $\tilde{v}_i$, введем другой важный параметр миграции — *коэффициент дисперсии скорости* i-го компонента δ_i:

$$\delta_i = v/\tilde{v}_i^* \quad \text{или} \quad v = \tilde{v}_i^* \delta_i. \tag{18.40}$$

Коэффициент δ_i, как и k_i, легко определяется экспериментально (см. ниже). Исходя из зависимостей (18.39) и (18.40), имеем:

$$v = k_i I \delta_i / n. \tag{18.41}$$

Тогда из уравнения (18.36) с учетом (18.39) и (18.41) получим

$$\mu_i = \frac{1}{(\tilde{v}_i^* - v)\sqrt{2}} = \frac{n}{k_i I (1 - \delta_i)\sqrt{2}}. \tag{18.42}$$

Подставляя зависимости (18.42) и (18.41) в уравнение (18.35), получим удобную для практических расчетов формулу

$$\bar{C}_i = \operatorname{erfc}\left[\frac{1}{(1-\delta_i)\sqrt{2}}\left(\frac{\tilde{v}_i n}{k_i I} - \delta_i\right)\right]. \tag{18.43}$$

Зная параметры k_i и δ_i, можно прогнозировать изменение $\bar{C}_i$ в зависимости от скорости $\tilde{v}_i$, которая определяется временем $\tilde{t}_i$ при $l =$

$= \text{const}$, т. е. $\tilde{v}_i = l/\tilde{t}_i$, или расстоянием $\tilde{l}_i$ при $t = \text{const}$, т. е. $\tilde{v}_i = \tilde{l}_i/t$.

Аналогично рассмотренной выше модели массообмена первого типа (сорбции) можно получить выражение для массообмена второго типа (десорбции)

$$\bar{C}_i^{\partial} = (C_i^0 - C_i)/C_i^0 = 1 - C_i/C_i^0 = 1 - \bar{C}_i,$$

где $\bar{C}_i^{\partial}$ — относительная концентрация компонента i в процессе десорбции.

Используя выражение (18.35), получим

$$\bar{C}_i^{\partial} = 1 - \operatorname{erfc}[\mu_i(\tilde{v}_i - v)] = \operatorname{erfc}[\mu_i(\tilde{v}_i - v)]. \quad (18.44)$$

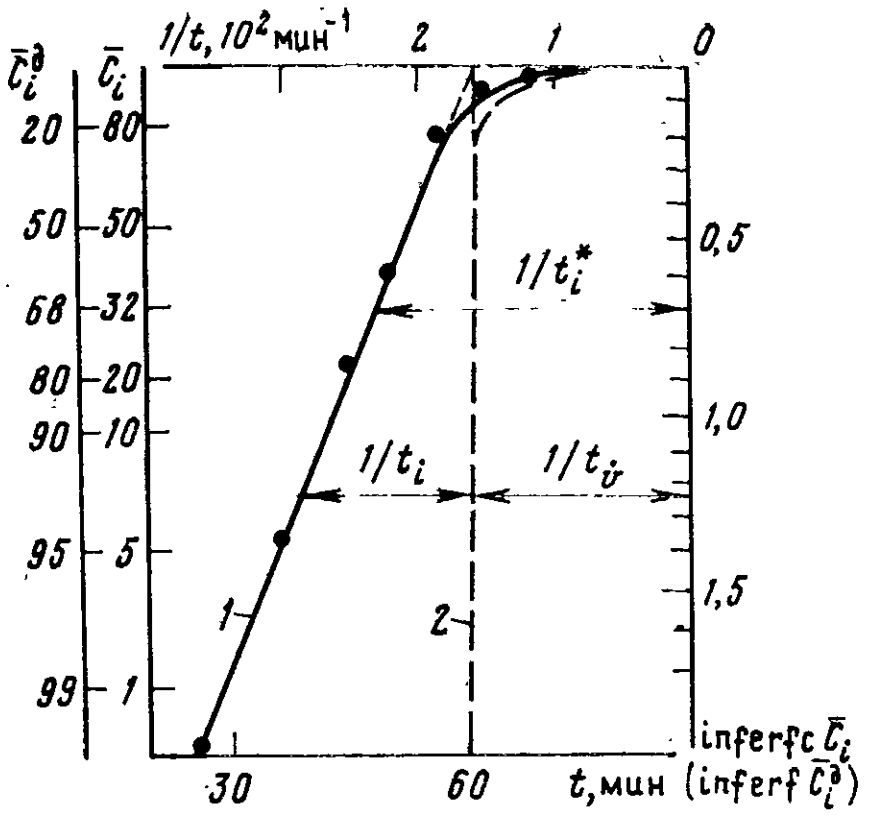


Рис. 18.6. Индикаторные кривые относительной концентрации компонента в координатах inferfc $\bar{C}$—$1/t$.

Кривые: *1* — наблюдаемая, $\bar{C}_{NaCl} = f(1/\tilde{t})$; *2* — изменения величины $1/t_v$

С учетом зависимостей (18.41) и (18.42) имеем:

$$\bar{C}_i^{\partial} = \operatorname{erf}\left[\frac{1}{(1-\delta_i)\sqrt{2}}\left(\frac{\tilde{v}_i n}{k_i I} - \delta_i\right)\right]. \quad (18.45)$$

Экспериментальное определение параметров миграции в соответствии с молекулярно-кинетической моделью. Параметры миграции k_i и δ_i легко определяются по результатам экспериментов. Одновременно оценивается соответствие теоретической модели экспериментальным данным. Для этих целей удобно построить спрямляющие диаграммы функции $\bar{C}_i = f(\mu_i, v_i)$ или $\bar{C}_i = f(\mu_i, \tilde{v}_i - v)$ (см. рис. 18.5). В соответствии с уравнением (18.35) можно записать

$$\mu_i(\tilde{v}_i - v) = \text{inferfc} \text{ или } \tilde{v}_i = (1/\mu_i)\,\text{inferfc}, \quad (18.46)$$

где inferfc $\bar{C}_i$ — обозначение функции, обратной erfc $[\mu_i(\tilde{v}_i - v)]$.

Следовательно, если реальный процесс описывается уравнением (18.35) и мы построим экспериментальную кривую в координатах $\tilde{v}_i$ — inferfc $\bar{C}_i$, то получим прямую линию. Отсюда, если $\mu_i = \text{const}$, $v = \text{const}$ и $t = \text{const}$, а $\tilde{v}_i = \tilde{l}_i/t$, то и график в координатах $\tilde{l}_i$ — inferfc $\bar{C}_i$ должен быть прямолинейным. Или, если $\mu_i = \text{const}$, $v = \text{const}$ и $l = \text{const}$, а $\tilde{v}_i = l/\tilde{t}_i$, то и график в координатах $1/\tilde{t}_i$ — inferfc $\bar{C}_i$ должен быть прямым. Отметим при этом, что в соответствии с зависимостью (18.46) на оси абсцисс, где откладываются $\tilde{l}_i$ или $1/\tilde{t}_i$, графиком отсекается отрезок, соответствующий v.

В качестве примера приведем полученную экспериментально диаграмму миграции NaCl для массообмена первого типа в среднезернистых песках ($n = 0{,}36$) при $C_i^0 = 0{,}01$ н, $t^0 = 25$ °С, $l = 0{,}43$ м, и $I = 0{,}23$ (рис. 18.6). С помощью индикаторной кривой $\bar{C}_i = f(1/t_i)$, построенной в спрямляющих координатах, на указанной диаграмме, определим миграционные параметры k_i и δ_i графоаналитическим методом, предварительно проанализировав распределение экспериментальных точек. Оно показывает хорошее соответствие молекулярно-кинетической модели миграции фактическому ходу процесса в пределах $\bar{C}_i$ от 0,01 до 0,85, что устанавливается по прямолинейности графика. При $\bar{C}_i = 0{,}85$—1,0 экспериментальные точки отклоняются от прямой линии и асимптотически приближаются к оси абсцисс. Такой ход процесса может быть объяснен следующим образом. В соответствии с зависимостью (18.26) наблюдаемая скорость $\tilde{v}_i$ перемещения комплексных частиц (внешних ионных пар ионов Na^+ и Cl^-) имеет две составляющие: 1) переменную v_i, связанную с движением катионов Na^+; 2) постоянную для большей части порового пространства $\dot{v}$, определяемую характером перемещения анионов Cl^-. Если $l = \text{const}$, как в нашем эксперименте, и $v_i = l/t_i$, то величина v_i определяется величиной $1/t_i$, а $\dot{v}$ — величиной $1/t_{\dot{v}}$. На графике (см. рис. 18.6) хорошо видно, что наблюдаемая скорость $\tilde{v}$ может быть получена из уравнения

$$1/\tilde{t}_i = 1/t_i + 1/t_{\dot{v}}. \qquad (18.47)$$

Логично полагать, что в пределах $0{,}01 < \bar{C}_i < 0{,}85$ сохраняется условие $\dot{v} = \text{const}$ и $1/t_{\dot{v}} = \text{const}$. При $\bar{C}_i > 0{,}85$ в вытеснение дистиллированной воды раствором соли вовлекаются анионы, находящиеся вблизи твердой фазы, внутреннего, отрицательно заряженного слоя. На небольшом расстоянии от поверхности твердых частиц начинает проявляться торможение в конвективном потоке и для анионов Cl^-. При этом $\dot{v} \neq \text{const}$ и $1/t_{\dot{v}} \to 0$. В то же время продолжает уменьшаться и величина $1/t_i$, связанная со скоростью торможения катионов Na^+, т. е. $1/t_i \to 0$. В результате быстро снижается величина $1/\tilde{t}_i$, что определяется уменьшением двух ее составляющих [см. зависимость (18.47)]. Такое уменьшение мы и наблюдаем в верхней части графика, соответствующей $\bar{C}_i > 0{,}85$.

Для определения k_i необходимо с графика снять значение $1/\tilde{t}_i^*$ на уровне $\bar{C}_i = 0{,}32$. Оно оказывается равным $1/\tilde{t}_i^* = 0{,}023$ мин$^{-1}$. Следовательно, $\tilde{u}_i^* = l/\tilde{t}_i^* = 14{,}2$ м/сут, и в соответствии с уравнением (18.39) $k^{25°} = \tilde{v}_i^* n/I = 21{,}2$ м/сут. Для нахождения δ_i снимем с графика значение $1/t_{\dot{v}}$ в точке пересечения продолжения прямой *1* с осью абсцисс: $1/t_{\dot{v}} = 0{,}016$ мин$^{-1}$. Далее $\dot{v} = 9{,}91$ м/сут, и в соответствии с уравнением (18.40) $\delta_i = \dot{v}/\tilde{v}_i^* = \tilde{t}_i^*/t_{\dot{v}} = 0{,}7$.

Для массообмена второго типа спрямляющие диаграммы строят следующим образом. В соответствии с зависимостью (18.44) можно записать

$$\mu_i(\tilde{v}_i - \dot{v}) = \text{inferf}\,\bar{C}_i^{\partial} \tag{18.48}$$

или

$$\tilde{v}_i = (1/\mu_i)\,\text{inferf}\,\bar{C}_i^{\partial} + v. \tag{18.48а}$$

Следовательно, если реальный процесс развивается в соответствии с уравнением (18.44) и мы построим экспериментальную кривую в координатах $\tilde{v}_i$ — inferf $\bar{C}_i^{\partial}$, то получим прямую линию. Отсюда, если $\mu_i = \text{const}$, $v = \text{const}$, $t = \text{const}$ и $\tilde{v}_i = l_i/t$, то и график в координатах l_i — inferf $\bar{C}_i^{\partial}$ будет прямолинейным. Или, если $\mu_i = \text{const}$, $v_i = \text{const}$ и $l = \text{const}$, а $\tilde{v}_i = l/\tilde{t}_i$, то и график в координатах $1/\tilde{t}_i$ — inferf $\bar{C}_i^{\partial}$ прямолинеен. Отметим, что в этом случае так же, как и для массообмена первого типа, в соответствии с зависимостью (18.48) на оси абсцисс графиком отсекается отрезок, соответствующий v. В связи с тем, что функция (18.35) является дополнительной к функции (18.44), т. е. erf $x = 1 - \text{erfc}\,x$, удобно использовать один и тот же график для обоих типов массообмена (см. рис. 18.6), только надо иметь две шкалы — для $\bar{C}_i$ и $\bar{C}_i^{\partial}$.

Определение k_i и δ_i производится по графику для массообмена второго типа аналогично описанному выше, лишь величина $\tilde{v}^*$ находится по значению $1/\tilde{t}_i$ на уровне $\bar{C}_i^{\partial} = 1 - 0{,}32 = 0{,}68$.

Таким образом, используя молекулярно-кинетический подход, можно анализировать природу и специфику миграции каждого компонента, что позволяет более детально изучать гидрогеохимические процессы, связанные с гидродинамикой; упрощается и прогнозирование миграции компонентов в подземных водах.

Молекулярно-кинетическая модель миграции приведена для условий квазистационарной одномерной фильтрации при постоянстве концентрации мигрирующего вещества на входе и может рассматриваться как базовое решение. Она может быть выведена и для многомерной фильтрации с переменной концентрацией компонентов на входе.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем различаются математические постановки задач массопереноса по схемам поршневого вытеснения, молекулярной диффузии и гидравлической дисперсии? Нарисуйте типовые графики изменения концентрации мигранта для этих постановок.
2. Что такое выходная кривая и для решения каких задач она используется?
3. Требуется определить, за какое время фронт вытеснения переместится на расстояние Δl. Укажите, какая исходная информация требуется для решения задачи.
4. Что такое эффективная пористость? Приведите вывод формулы.
5. Докажите, что при гидродисперсии на фронте поршневого вытеснения $\bar{C} = 0{,}5$.

6. Что такое критерий Пекле? При каких оценках он используется? Поясните, почему при определении длины опытной колонки $Pe > 50$.

7. Определите полуширину переходной зоны для случая, когда внешняя граница этой зоны определяется погрешностью в значении относительной концентрации 1 %.

8. Что такое предельная модель макродисперсии? При соблюдении каких условий можно этой моделью пользоваться?

9. Дайте полный математический вывод критерия (18.13).

10. Почему при изучении теплопереноса в песчаных водоносных пластах в большей мере, чем при массопереносе, необходим учет продольной гидродисперсии?

11. Как определить по графику, построенному в координатах $\xi \sqrt{t} \div t$, параметры n_0 и D?

12. По какому морфологическому признаку выходной кривой $\bar{C}$ можно определить, что мигрант несорбируемый?

13. Запишите формулу, используемую при определении ширины переходной зоны $\Delta x_{\text{п}}$ для предельной схемы макродисперсии. Что такое поперечная дисперсия? В каких расчетных схемах массопереноса ее следует учитывать?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заканчивая книгу, автор надеется, что студент, проработавший изложенный материал, получил представление о теоретических основах и методах количественного изучения главных форм движения подземных вод в земной коре, сумел понять значение ДПВ в решении различных народнохозяйственных задач, а также в разработке теоретических проблем гидрогеологии, в первую очередь в области гидрогеохимии и региональной гидрогеологии, где количественные методы еще используются слабо. Гидрогеодинамика — одна из фундаментальных дисциплин гидрогеологии, развивающаяся на стыке многих наук. Методы исследований, применяемые в гидрогеодинамике, постоянно совершенствуются, появляются новые, среди которых количественный анализ — ведущий.

К наиболее перспективным направлениям, в которых должны внедряться методы ДПВ, относятся гидрогеохимические и региональные исследования, связанные с проблемами формирования подземных вод, их месторождений и гидролитосферы в целом. Актуальны проблемы повышения качества исходной информации и достоверности решения инженерных задач гидрогеологии. Решение этих проблем базируется на оптимизации гидрогеологических работ и изысканий. В первом случае теория и методы ДПВ позволяют найти наиболее рациональные и информативные схемы состава опытных узлов, схем их размещения на площади объекта и методики обработки полученной информации. Во втором развитие методов ДПВ направлено на совместное решение гидрогеодинамических, гидрогеохимических и гидрогеотермических задач на единой модели, отображающей влаго- и солеперенос в зонах аэрации и полного насыщения с учетом неизотермической обстановки, включающей сложные взаимосвязи подземных вод с поверхностными, атмосферой, растительностью и т. п. Такие постановки должны стать теоретической основой постоянно действующих моделей ГГС, предназначенных для управления ресурсами и качеством подземных вод. Они позволят сделать гидрогеологические прогнозы одним из важных элементов гидрогеологических изысканий на основе принципов адаптации и обратных связей, тем самым существенно улучшится качество получаемой исходной информации, появится возможность управлять разведочными процессами. Развитие оптимизационных задач — это одно из важнейших направлений ДПВ.

В настоящее время теория и методы ДПВ разработаны главным образом применительно к изучению движения подземных вод в области активного водообмена и для локальных объектов. Требуется развивать физические основы динамики глубинных вод, где представления механики сплошных сред могут не соблюдаться, и роль эндогенных факторов становится ведущей.

Много нерешенных проблем и в области количественных исследований динамики региональных потоков, охватывающих крупные бас-

сейны подземных вод. Это ГГС существенно иного порядка, чем те, для которых разработана существующая математическая теория ДПВ.

Необходимо дальнейшее развитие теории и методов гидрогеодинамики как научной дисциплины. К основным направлениям могут быть отнесены:

1) изучение физики процессов движения в слабопроницаемых слоях;

2) исследование миграции с проявлением различных физико-химических процессов в неизотермических условиях (с учетом биологической составляющей);

3) создание математических моделей, позволяющих решать трехмерные задачи фильтрации и тепло-массопереноса;

4) разработка эффективных методов решения на ЭВМ обратных и прямых задач с оценкой достоверности результатов на основе данных натурных наблюдений, методов решения оптимизационных задач и задач управления поведением исследуемой системы, методов имитационного моделирования.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица функций $\mathrm{erf}(\lambda)$, $\mathrm{erfc}(\lambda)$, $R^{\upsilon}(\lambda)$, $1-R^{\upsilon}(\lambda)$ и показателей $\varkappa$, ρ

λ	f_0	$\mathrm{erf}(\lambda)$	$\mathrm{erfc}(\lambda)$	$R^{\upsilon}(\lambda)$	$1-R^{\upsilon}(\lambda)$	$\varkappa$	$\rho=\upsilon_{нс}/\upsilon_{у}$
∞	0	1	0	0	1,00	∞	0
10	0,002	1	0	0	1,00		0
5	0,01	1	0	0	1,00	5,64	0
3	0,03	1	0	0	1,00	3,26	0,013
2	0,06	0,996	0,004	0,001	1,00	2,31	0,298
1,50	0,11	0,966	0,034	0,01	0,99	1,80	0,840
1,20	0,17	0,911	0,089	0,03	0,97	1,50	0,925
1,10	0,20	0,881	0,119	0.04	0,96	1,42	0,903
1,00	0,25	0,843	0,157	0,05	0,95	1,34	0,830
0,90	0,31	0,797	0,203	0.08	0,92	1,27	0,740
0,80	0,39	0,742	0,258	0,11	0,89	1,21	0,590
0,70	0,51	0,677	0,333	0,15	0,85	1,16	0,480
0,60	0,69	0,604	0,396	0,21	0,79	1,12	0,340
0,50	1,0	0,521	0,479	0,28	0,72	1,08	0,220
0,40	1,6	0,424	0,576	0,37	0.63	1,05	0,120
0,34	2,2	0,366	0,634	0,42	0,58	1,04	0,080
0,30	2,8	0,328	0,672	0,48	0,52	1,03	0,050
0,25	4,0	0,276	0,742	0,53	0,47	1,02	0,030
0,20	6,2	0,223	0,777	0,62	0,38	1,01	0,020
0,15	12	0,168	0,838	0,66	0,34	1,01	0,010
0,10	25	0,112	0,888	0,79	0,21	1,00	0,002
0,05	100	0,056	0,944	0,90	0,10	1,00	0
0,01	—	0,011	0,989	0,99	0,01	1,00	0
0	∞	0	1	1	0	1,00	0

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аверьянов С. Ф.* Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод. М., Колос, 1982.

2. *Арье А. Г.* Физические основы фильтрации подземных вод. М., Недра, 1984.

3. *Аравин В. И., Нумеров С. Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемых пористых средах. М., Гостехтеориздат, 1953.

4. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. И.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М., Недра, 1984.

5. *Боревский В. В., Самсонов Б. Г., Язвин Л. С.* Методика определения параметров водоносных горизонтов по данным откачек. М., Недра, 1979.

6. *Бочевер Ф. М.* Теория и практические методы расчетов эксплуатационных запасов подземных вод. М., Недра, 1968.

7. *Бочевер Ф. М., Лапшин Н. Н., Орадовская А. Е.* Защита подземных вод от загрязнения. М., Недра, 1979.

8. *Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С.* Физико-математические основы фильтрации воды. М., Мир, 1971.

9. *Гавич И. К.* О движении подземных вод в неоднородном пласте при наличии равномерной инфильтрации. Изв. вузов, Геология и разведка, 1964, № 5, с. 134—137.

10. *Гавич И. К.* Определение параметров анизотропного пласта по данным опытных работ в условиях неустановившейся фильтрации.— В кн.: Тр. Коорд. совещ. по гидротехнике, т. 48. Л., Энергия, 1969, с. 102—116.

11. *Гавич И. К.* Теория и практика применения моделирования в гидрогеологии. М., Недра, 1980.

12. *Гавич И. К., Лучшева А. А., Семенова-Ерофеева С. М.* Сборник задач по общей гидрогеологии. М., Недра, 1985.

13. *Гидрогеологические* основы охраны подземных вод. М., Центр международных проектов. ГКНТ, 1984.

14. *Гидродинамические* основы прогноза режима грунтовых вод/Г. Н. Каменский, И. К. Гавич, Н. А. Мясникова, С. М. Семенова — Тр. Лабор. гидрогеол. пробл. М., Изд-во АН СССР, 1960.

15. *Гидродинамические* и физико-химические свойства горных пород/Под ред. Н. Н. Веригина.— М., Недра, 1977.

16. *Гольдберг В. М., Газда С.* Гидрогеологические основы охраны подземных вод от загрязнения. М., Недра, 1984.

17. *Жернов И. Е., Шестаков В. М.* Моделирование подземных вод. М. Недра, 1970.

18. *Ивахненко А. Г.* Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. Киев, Наук. думка, 1982.

19. *Каменский Н. Г.* Основы динамики подземных вод. М.-Л., ОНТИ, 1-е изд., 1933—1935.

20. *Каменский Г. Н.* Основы динамики подземных вод. М.-Л., Госгеолтехиздат, 2-е изд., 1943.

21. *Каменский Г. Н., Гавич И. К., Семенова С. М.* Гидродинамическая характеристика различных видов потоков подземных вод. Изв. вузов, Геология и разведка, 1960, № 10, с. 81—88.

22. *Ковалевский В. С.* Исследование режима подземных вод в связи с их эксплуатацией, М., Недра, 1986.

23. *Коноплянцев А. А., Семенов С. М.* Изучение, прогноз и картирование режима грунтовых вод. М., Недра, 1979.

24. *Корн Г., Корн К.* Справочник по математике. М., Наука, 1978.

25. *Кульчицкий Л. И., Усьяров О. Г.* Физико-химические основы формирования свойств глинистых пород. М., Недра, 1981.

26. *Лукнер Л., Шестаков В. М.* Моделирование геофильтрации. М., Недра, 1976.

27. *Лялько В. И., Митник М. М.* Исследование процессов переноса тепла и вещества в земной коре. Киев, Наук. думка, 1978.

28. *Методы* охраны подземных вод от загрязнения и истощения/Под ред. И. К. Гавич.— М., Недра, 1985.

29. *Методы* прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод/Под ред. Н. Н. Веригина.— М., Колос, 1979.

30. *Методы* фильтрационных расчетов гидромелиоративных систем/Под ред. Н. Н. Веригина.— М., Колос, 1970.

31. *Мироненко В. А.* Динамика подземных вод. М., Недра, 1983.

32. *Мироненко В. А., Румынин В. Г.* Опытно-миграционные работы в водоносных пластах. Л., Недра, 1986.

33. *Мироненко В. А., Румынин В. Г., Учаев В. К.* Охрана подземных вод в горнодобывающих районах. Л., Недра, 1980.

34. *Мироненко В. А., Шестаков В. М.* Основы гидрогеомеханики. М., Недра, 1974.

35. *Мироненко В. А., Шестаков В. М.* Теория и методы интерпретации опытно-фильтрационных работ. М., Недра, 1978.

36. *Муртаф Б.* Современное линейное программирование. М., Мир, 1984.

37. *Огильви Н. А.* Физические и геологические поля в гидрогеологии. М., Недра, 1972.

38. *Основы* гидрогеологии. Гидрогеодинамика. Новосибирск, Наука, 1983.

39. *Плотников Н. И.* Поиски и разведка пресных подземных вод. М., Недра, 1985.

40. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М., изд. 1-е, Гостехтеориздат, 1952; изд. 2-е, Наука, 1977.

41. *Рошаль А. А.* Методы определения миграционных параметров. М., 1980 (ВИЭМС).

42. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М., Наука, 1977.

43. *Самойлов О. Я., Соколов Д. С.* Влияние ионов Na и Ca на миграцию бора в подземных рассолах. Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 6, с. 1428—1430.

44. *Сергеев Е. М.* Грунтоведение. М., Изд-во МГУ, 1971.

45. *Системный* подход к управлению водными ресурсами/Под ред. А. Бисваса.— М., Наука, 1985.

46. *Ситников А. Б.* Динамика влаги и солей в почвогрунтах зоны аэрации. Киев, Наук. думка, 1986.

47. *Судницин И. И.* Движение почвенной влаги и водопотребление растений. М., Изд-во МГУ, 1979.

48. *Уемов А. И.* Системный подход и общая теория систем. Л., Изд-во ЛГИ, 1977.

49. *Файбишенко Б. А.* Водно-солевой режим грунтов при орошении. М., Агропромиздат, 1986.

50. *Форхгеймер Ф.* Гидравлика. М.-Л., ОНТИ, 1935.

51. *Формирование* и строение ореолов рассеяния вещества в подземных водах/В. А. Грабовников, В. З. Рубейкин, Л. М. Самсонова, Б. Г. Самсонов — М., Недра, 1977.

52. *Фрид Ж.* Загрязнение подземных вод., М., Недра, 1981.

53. *Щелкачев В. Н.* Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостоптехиздат, 1959.

54. *Шестаков В. М.* Динамика подземных вод. М., Изд-во МГУ, 1979.

55. *Шестаков В. М., Кравченко И. П., Пашковский И. С.* Практикум по динамике подземных вод. 3-е изд. Изд-во МГУ, 1979.

56. *Шестаков В. М., Пашковский И. С., Сойфер А. М.* Гидрогеологические исследования на орошаемых территориях. М., Недра, 1982.

57. *Язвин Л. С.* Достоверность гидрогеологических прогнозов при оценке эксплуатационных запасов подземных вод. М., 1972, (ВСЕГИНГЕО).

58. *Bear Y.* Dynamics of Fluids in Porous Media N. Y. 1972.

59. *Domenico P. A.* Concepts and models in groundwater hydrology. 1972, N 4, p. 14—20.

60. *Freese R. A., Cherry J. A.* Groundwater Ottawa New-York, 1979.

61. *Гълъбов М.* Хидродинамика на подземните вододобивани и дренажна съоръжения. София. Държавна. Изд. Техника, 1985.

62. *Hantush M. S.* Hydraulies of Well Advances in Hydroscience, 1964, vol. 1, p. 201—293.

63. *Ogata A.* Theory of Dispersion in Granular Media U. S. Geol. Survey. Proffes. Paper, 1—411, 1970.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Анализ факторно-диапазонный 98

Барьер потенциальный 38

Вариант оптимальный 277
Взаимодействия
  диполь-дипольное 38
  ион-дипольное 38
  капиллярные 38
  молекулярные 36
  скважин 221
Влагоперенос 136
Вода
  капиллярная 38
  свободная 36
  физически связанная 36
Водоемкость дифференциальная 144
Водоотдача
  гравитационная 55
  упругая 58
Водопроводимость 58
Время
  запаздывания 256
  стабилизации процесса 113
Высота
  всасывания 137
  геометрическая 28
  пьезометрическая 28
  скоростная 28
Вязкость 26

Гидролитосфера 12
Гидросфера подземная 12
Градиент
  гравитационного потенцнала 30
  напора 31
  начальный 33, 52
Границы
  геологическая 11
  гидрогеологическая 12
  непроницаемые 77
  проницаемые 77
Графики
  диагностические 173, 323
  инвариантные 179
  индикаторные 259
  эталонные 178

  временно́го прослеживания 262
  комбинированного прослеживания 264
  площадного прослеживания 263

Давление
  всасывания 137
  гидростатическое 26
  геостатическое 40, 41
  гидродинамическое 40
  капиллярное 40
  полное общее 39
Дебит удельный 229
Дисперсия
  гидравлическая 294
  поперечная 295
  продольная 295
Достоверность геологическая 98

Емкость
  гравитационная 55
  упругая 55

Задачи
  диагностическая 183
  граничные 119
  инверсные 118
  индуктивные 119
  прогнозная 182
  эпигнозно-прогнозная 182
Законы
  вязкопластичного движения 50
  Гука 26, 36, 61
  Дарси 44, 167, 189, 194, 197, 227
  Паскаля 26
Зона
  аэрации 38
  высачивания 79
  капиллярная 38, 56
  квазистационарной фильтрации 231

  переходная 311
Интервал представительный 301
Интерпретация 259

Константа Генри 299
Контроль диагностический 178
Коэффициент
анизотропии 103, 105
влагопереноса 54
влагопроводности 145
водообмена 95
гравитационной емкости 58
динамической вязкости 46
дисперсии скорости 330
извилистости 34
массообмена 304
микродисперсии 295, 297
молекулярной диффузии 294
перетекания 249
подвижности 325
приведенной пористости 34
проницаемости 46
пьезопроводности 59
сжимаемости 36, 58
тепловой гидродисперсии 321
теплопроводности 300
упругой емкости породы 57, 104
упругой емкости пласта 58
уровнепроводности 59
фильтрации 46
Критерии
гидродинамические 272
глубинного водообмена 114
инфильтрационного водообмена 114
определяемый 134
определяющий 134
оптимизации 277
Пекле 313

Линеаризация 109, 110
Лента тока 70, 72
Линии
напора 69, 72
тока 69, 72
Литосфера 110

Макродисперсия 296
Мерность потока 73
Методы
аналитические 117
аналогий 133
«большого колодца» 234
гидравлические 117
графические 117
зеркальных отображений 235
недеформируемых лент тока 73, 117
суперпозиции 235
фрагментов 117
Микродисперсия 295
Модели
аналоговая 133
детерминированные 4
физическая 133
макродисперсии 314
молекулярно-кинетическая 324
неограниченной емкости 314, 315
предельной макродисперсии 316
разностные 133
стохастические 4
Модель 7
Модуль Юнга 26
Мониторинг 178, 324

Напор
геостатический 41
гидродинамический 28
гидростатический 27
приведенный 30
Напряжения
касательное 29
нейтральное 39
полное 40
эффективные 39
Неоднородность
геофильтрационная 95
неупорядоченная фильтрациониая 313
упорядоченная фильтрационная 313

Область допустимых значений 278
Объем
представительный (репрезентативный) 42
элементарный 42
Основная гидрофизическая характеристика 138
Параметры
влагопереноса 138
инфильтрационного перетекания 95
молекулярно-кинетической модели 329
пород 258
преобразования 225, 311
проводимости 130
пласта 258
скважины 258
управления 278
Перенос
гидродисперсный 291
диффузионный 291, 293

конвективный 291, 292
Перетекание 66
Питание
рассеянное 20
сосредоточенное 20
Пласт
водоносный 18
неограниченный 91
ограниченный 91
полуограниченный 91
Плотность 26
Поверхность свободная 79
Погрешности схематизации 163
Подпор
нестационарный 186
стационарный 184
Показатель гидродинамического несовершенства 95
Поле 17
Поля
геологические 18
физические 18
Пористость
активная 35
двойная 34
общая 35
открытая 35
эффективная 308
Потенциал
влаги 137
гравитационный 29
скорости фильтрации 66
Потоки
грунтовые 83
линейные 73
напорно-безнапорные 83, 85
напорные 83
ограниченные 73
планово-радиальный 62
плоские 73
плоскопараллельный 62
полуограниченные 166
пространственные 73
радиальные 62, 65
стационарные 62
субнапорные 83, 84
техногенные 20
Предпосылка
Дюпюи 74, 228
перетекания 69, 75
Принцип сложения течений 198
Процессы
инфильтрации 71
гидрогеохимической миграции 7
обратимые 16
необратимые 16
Радиус
влияния 232
приведенный 230
приведенный водозабора 234
Размеры эффективные 90
Расход
потока 46
единичный 46
Режимы движения 33
Решения
Ловерье 316
общее 253
Тейса 229
фундаментальные 165
Связи
обратные 16
прямые 12, 13
косвенные 12, 13
непрямые 12, 13
Сжимаемость 26
Системы
закрытые 16
открытые 16
уравнений 112
Скважина обобщенная 219
Скорость
действительная 45
массопереноса 296
феноменологическая 329
фильтрации 45
эффективная 329
Слой
водоупорный 19
относительно водоупорный 19
разделяющий 19
Сопротивление
полное 253
удельное фильтрационное 75
Сорбция 298
Среда
геологическая 14, 88
гетерогенно-блоковая 102, 107, 29
однородная 87
миграционная 18
Стадия
свободной фильтрации 187, 189, 190
капиллярно-грунтового потока 190
подпертой фильтрации 191
Сток
линейный 224
точечный 243
Структура 15
Структура гидрогеологическая 18
Сфера
взаимодействия 14, 90, 193
влияния 167
Схемы явно-неявные 124

Тело
геологическое 11
гидрогеологическое 12
Типизация гидродинамических условий 82
Точка узловая 121
Трещиноватость 34
Универсальность 112
Упругость горных пород 35
Уравнения
Бернулли 28
Буссинеска 109
Дарси 153
Дюпюи 153
Каменского 154, 157, 185
Лапласа 103
Пуассона 103
связи масштабных коэффициентов 134
Условия
граничные 77
начальные 77
однозначного решения 111
Формула
Гагена Пуазейля 32
Лапласа 27
Функция
Бесселя 249
Гиринского 149, 155
напорная 116
тока 70
целевая 277

Число Рейнольдса 33

Шаг сетки 121

Энергия
активации 37, 325
кинетическая 28
механическая 28
полная 28
потенциальная 28

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Введение 7

Часть I. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД 11

Глава 1. Гидрогеологические основы исследования движения подземных вод 11

1.1. Природные и природно-техногенные гидрогеологические системы. Исходные определеиия 11
1.2. Свойства и категории ГГС 14
1.3. Понятие о системном подходе 17
1.4. Гидрогеодинамические системы и их свойства 17
1.5. Потоки подземных вод и их гидрогеологическая характеристика . . . 19

Контрольные вопросы 25

Глава 2. Физические основы изучения движения подземных вод 26

2.1. Свойства воды как жидкости 26
2.2. Силы давления и вязкости 26
2.3. Действующие силы и режимы движения в реальной жидкости 29
2.4. Геометрия и свойства порово-трещинного пространства 34
2.5. Виды воды, молекулярные и капиллярные взаимодействия в системе ГП ⇄ ПВ 36
2.6. Напряжения в водонасыщенных горных породах и геостатическое давление 39
2.7. Понятие о сплошной геофильтрационной среде 42

Контрольные вопросы 43

Глава 3. Гидродинамические основы фильтрации в ГДС 44

3.1. Феноменологические предпосылки закона фильтрации 44
3.2. Закон фильтрации и его обобщенные выражения 45
3.3. Проницаемость горных пород 53
3.4. Емкостные свойства горных пород 55
3.5. Фильтрационные и емкостные свойства пластов как ГДС 58
3.6. Геофильтрационная среда и основные уравнения ее состояния 60

Контрольные вопросы 61

Глава 4. Гидродинамические свойства потоков 62

4.1. Типы геофильтрационных потоков 62
4.2. Дифференциальное представление уравнений движения 62
4.3. Закон преломления фильтрационных токов и его следствия 67
4.4. Гидродинамическая сетка, ее свойства 69
4.5. Гидродинамическая структура потока 73
4.6. Область фильтрации и краевые условия 77

Контрольные вопросы 80

Глава 5. Прииципы схематизации гидрогеологических условий 81

5.1. Понятие о гидродинамическом расчете. Задачи схематизации 81
5.2. Виды потоков и их гидродинамические особенности 83
5.3. Принципы схематизации и ее основные критерии. Последовательность схематизации 90
5.4. Понятие о расчетной схеме 98

Контрольные вопросы 99

Глава 6. Математические основы изучения процессов фильтрации подземных вод в ГГС 99
6.1. Основные предпосылки при выводах дифференциальных уравнений движения подземных вод 99
6.2. Вывод уравнения неразрывности потока 100
6.3. Вывод дифференциальных уравнений стационарной фильтрации . . . 102
6.4. Вывод дифференциальных уравнений нестационарной упругой фильтрации 103
6.5. Вывод дифференциальных уравнений нестационарной фильтрации при наличии перетекания 106
6.6. Дифференциальные уравнения нестационарной фильтрации для гетерогенно-блоковой среды 107
6.7. Вывод дифференциальных уравнений нестационарной фильтрации грунтовых вод 108
6.8. Понятие о математической постановке задачи и условиях однозначного решения дифференциальных уравнений 111
6.9. Свойства дифференциальных уравнений 112
6.10. Краткая характеристика основных методов решения дифференциальных уравнений 117
6.11. Понятие о прямых и обратных задачах 118
Контрольные вопросы 119

Глава 7. Численные методы решения дифференциальных уравнений . . . 120
7.1. Понятие о методе сеток 120
7.2. Вывод уравнения в конечных разностях 121
7.3. Решение уравнений в конечных разностях по явной схеме 125
7.4. Решение уравнений в конечных разностях методом прогонки по неявной схеме 127
7.5. Моделирование как метод изучения ГДС 132
Контрольные вопросы 135

Глава 8. Гидродинамические осиовы теории влагопереиоса в ГГС 136
8.1. Постановка задач изучения влагопереноса 136
8.2. Действующие силы и параметры влагопереноса 137
8.3. Основной закон влагопереноса 140
8.4. Исследование направленности вертикального водообмена 140
8.5. Дифференциальные уравнения влагопереноса и методы их решения . . 143
8.6. Расчетные схемы процессов питания, насыщения и осушения 145
Контрольные вопросы 147

Часть II. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ, ПЛАНОВОЙ И ПЛОСКОВЕРТИКАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ГГС 148

Глава 9. Одиомерная плоскопараллельная стациопариая фильтрация . . . 148
9.1. Типы расчетных схем и особенности фильтрации 148
9.2. Потоки в однородных пластах 152
9.3. Потоки в неоднородных пластах 154
9.4. Инфильтрационные потоки 156
9.5. Вертикальная стационарная фильтрация 159
9.6. Изучение гидродинамики естественных потоков 160
9.7. Определение гидрогеологических параметров по наблюдениям за стационарным режимом потока 163
Контрольные вопросы 165

Глава 10. Одномериая нестационарная фильтрация 165
10.1. Математическая постановка и основные типы расчетных схем 165
10.2. Одномерные потоки без инфильтрационного питания 166
10.3. Инфильтрационные потоки 174

10.4. Учет сложных граничных условий 175
10.5. Исследование закономерностей нестационарной фильтрации 176
10.6. Принципы диагностики режима грунтовых вод 178
10.7. Исследование одномерной фильтрации численными методами 180
10.8. Единая модель «зона аэрации — грунтовые воды» 180
Контрольные вопросы 182

Глава 11. Изучение гидродинамики потоков подземных вод в зоне влияния инженерных сооружений 182
11.1. Понятие о гидродинамике потоков в зоне влияния инженерных сооружений 182
11.2. Особенности фильтрации воды из водохранилищ и каналов 183
11.3. Исследования подпора и фильтрационных потерь в зоне водохранилищ 184
11.4. Исследование фильтрации воды из каналов 187
11.5. Особенности фильтрации подземных вод в зоне плотин 192
11.6. Фильтрация под плотиной 194
11.7. Обходная фильтрация 197
11.8. Особенности фильтрации на массивах орошения 200
11.9. Исследование динамики потока при полосовом орошении 201
Контрольные вопросы 204

Глава 12. Гидродинамические основы изучения режима и баланса подземных вод 205
12.1. Гидродинамическая связь режима и баланса подземных вод 206
12.2. Исследование режима и баланса грунтовых вод численным методом . . 207
12.3. Определение гидрогеологических параметров по аналитическим зависимостям 210
12.4. Расчет по уравнению в конечных разностях 211
12.5. Определение параметров графоаналитическим методом на основе уравнения в конечных разностях 211
12.6. Определение параметров методом численного интегрирования 213
Контрольные вопросы 217

Часть III. ИССЛЕДОВАНИЕ РАДИАЛЬНОЙ, ПЛАНОВО-РАДИАЛЬНОЙ И ПЛАНОВО-ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ГГС . 219

Глава 13. Радиальная и планово-радиальная фильтрация (водоприток к совершенным скважинам) 219
13.1. Особенности фильтрации и математическая постановка задач 219
13.2. Применение методов интегрального преобразования 225
13.3. Уравнения радиальной стационарной фильтрации (водоприток к одиночной скважине) 226
13.4. Вывод основного уравнения радиальной нестационарной фильтрации 229
13.5. Квазистационарная фильтрация 231
13.6. Уравнения планово-радиальной фильтрации (системы взаимодействующих скважин) 232
13.7. Уравнения планово-радиальной фильтрации в пластах с прямолинейными границами первого и второго родов 235
13.8. Диагностический анализ особенностей водопритока к скважинам . . . 238
Контрольные вопросы 240

Глава 14. Плосковертикальная, планово-пространственная и сложные случаи фильтрации 241
14.1. Основные расчетные схемы и математические модели 241
14.2. Уравнения сферической фильтрации (водоприток к несовершенной скважине с коротким фильтром) 243
14.3. Уравнения плосковертикальной фильтрации (водоприток к несовершенным скважинам) 244

14.4. Метод фильтрационных сопротивлений 245
14.5. Построение расчетных зависимостей для несовершенных скважин по методу фильтрационных сопротивлений 248
14.6. Планово-пространственная фильтрация в многопластовых системах . 249
14.7. Метод обобщенных систем скважин 252
14.8. Особенности фильтрации к скважинам в анизотропных и гетерогенных пластах 254
14.9. Оценка изменения дебита и времени ввода скважин в действие 256
Контрольные вопросы 257

Глава 15. Теоретические основы определения гидрогеологических параметров по даиным опытно-фильтрационных работ 257
15.1. Постановка обратных задач 257
15.2. Принципы диагностики и интерпретации данных опытных откачек . . 259
15.3. Аналитические способы определения параметров 260
15.4. Способ эталонных кривых 261
15.5. Методы линейной анаморфозы 262
15.6. Достоверность определения параметров и факторы, осложняющие диагностику опытиых графиков 266
Контрольные вопросы 271

Глава 16. Гидродинамические расчеты водозаборов 271
16.1. Понятие о гидродинамическом расчете водозабора 271
16.2. Постановка задачи исследований 272
16.3. Оценка влияния водоотбора на речной сток 274
16.4. Понятие о задаче оптимизации 277
16.5. Постановка задачи оптимизации водоотбора при фиксированном положении водозаборных скважин 279
16.6. Графическое решение задачи оптимизации 281
16.7. Решение задачи оптимизации симплекс-методом 283
16.8. О других ограничениях в задаче оптимизации 288
Контрольные вопросы 289

Часть IV. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАССО- И ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ 290

Глава 17. Гидродинамические основы массо- и теплопереноса в подземных водах 290
17.1. Понятие о массо- и теплопереносе и гидрогеохимической миграции . . 290
17.2. Основные механизмы массопереноса 292
17.3. Физико-химические взаимодействия 298
17.4. Основные механизмы теплопереноса 299
17.5. Предпосылки вывода дифференциальных уравнений массо- н теплопереноса 300
17.6. Дифференциальные уравнения миграции вещества в подземных водах 302
17.7. Дифференциальные уравнения макродисперсии в гетерогенных породах 303
17.8. Дифференциальные уравнения микродисперсии теплового потока . . 305
Контрольные вопросы 306

Глава 18. Гидрогеохимическая миграция и теплоперенос в различных гидрогеологических условиях 307
18.1. Поршневое вытеснение подземных вод одинаковой плотности 307
18.2. Диффузионный вынос солей через разделяющие слои 309
18.3. Исследование конвективно-дисперсионного переноса в гомогенном одномерном фильтрационном потоке 311
18.4. Основные схемы массопереноса в гетерогенных ГГС 313
18.5. Макродисперсия в гетерогеиных системах 314
18.6. Определение миграционных параметров 318

18.7. Простейшие задачи теплопереноса 321
18.8. Особенности миграционной схематизации и изучения массопереноса в ГГС 323
18.9. Миграция химических компонентов в подземных водах с позиций молекулярно-кинетической теории водных растворов 324
Контрольные вопросы 333

Заключение 335

Приложение 336

Список литературы 337

Предметный указатель 340

Гавич И. К.

Г12 Гидрогеодинамика: Учебник для вузов.— М.: Недра, 1988.— 349 с.: ил.

ISBN 5—247—00066—8

Рассмотрен системный подход к исследованию гидрогеологических объектов, гидрогеологические особенности потоков подземных вод, принципы и критерии схематизации гидрогеологических условий, аналитические и численные методы решения дифференциальных уравнений фильтрации и гидрогеохимической миграции подземных вод. Изложены гидродинамические основы режима и баланса подземных вод, прогноза изменения уровня грунтовых вод на орошаемых массивах и в зоне влияния каналов. Освещены теоретические подходы, используемые при решении задач водопритока к скважинам, обосновании опытно-фильтрационных работ, исследовании гидрогеохимической миграции и оптимизации.

Для студентов геологоразведочных, политехнических и горных высших учебных заведений.

Г $\frac{1904060000-176}{043(01)-88}$ 140—88

ББК 26.326

УЧЕБНИК

Гавич Ирина Константиновна

ГИДРОГЕОДИНАМИКА

Заведующий редакцией *Л. Н. Аважанская*
Редактор издательства *О. Л. Виноградова*
Художественный редактор *О. Н. Зайцева*
Технические редакторы *Е. С. Сычева, В. Ю. Любимова*
Корректор *К. И. Савенкова*

ИБ № 6528

Сдано в набор 21.08.87. Подписано в печать 26.02.88. Т-05823. Формат 60×90$^{1}/_{16}$. Бумага кн.-жур. Гарнитура Литературная. Печать высокая. Усл.-печ. л. 22,0. Усл. кр.-отт. 22,0. Уч.-изд. л. 23,98. Тираж 4500 экз. Заказ 2716/722—4. Цена 1 р. 10 к.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра», 125047, Москва,
пл. Белорусского вокзала, 3

Ленинградская типография № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 191126, Ленинград, Социалистическая ул., 14.