

МЕТОДОЛОГИЯ РАСЧЕТА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЗАГРЯЗНЕНИЙ В ВОДНЫХ ОБЪЕКТАХ

Интенсивное развитие различных отраслей промышленности, энергетики, автомобильного и железнодорожного транспорта, рост численности населения и другие факторы оказывают неблагоприятное воздействие на окружающую среду, в частности на состояние водных экосистем. В настоящее время для изучения масштаба загрязнений водных объектов все чаще опираются на широкий круг математических методов. Эффективность использования того или иного метода возрастает при правильном понимании сущности явлений и процессов, протекающих в исследуемом объекте, а также в ходе применения системного анализа. Однако, проблема точного математического описания динамики распространения загрязнений из локальных источников по объему ограниченных резервуаров по сей день слабо разработана [1-3]. Это объясняется тем, что данная задача сопряжена с определенными математическими трудностями как в постановке граничных условий, так и в методах аналитического решения.

На основе метода локальных источников, предложенного в работе [4], разработана методика моделирования динамики распространения локализованных примесей по ограниченной области. Обоснование идеи и адаптация этого метода к данному процессу заключается, на наш взгляд, в математической аналогии диффузионного процесса и процесса растекания жидкости по насадочному слою [5].

При использовании метода локальных источников граничные условия формируются на основании тех или иных физических соображений. В реальных условиях размеры источника загрязнения намного меньше, чем размеры исследуемых объектов, поэтому считаем, что на бесконечности концентрация загрязняющего вещества равна нулю. Начальная концентрация задана так: вне источника равна нулю, а внутри источника равна единице.

В данной статье приведены результаты решения двумерной диффузионной задачи, характеризующей распространения загрязнений поверхностного слоя водного объекта с применением метода локальных источников.

Были введены следующие обозначения: $2B$ – длина области, м; $2A$ – ширина области, м; $2k$, $2n$ – размеры области начальной локализации примеси по длине и ширине соответственно, м; s – расстояние от центра источника загрязнения до середины области по длине, м; h – расстояние от центра источника загрязнения до середины области по ширине, м; t – период наблюдения; D – коэффициент диффузии.

Графически данная задача может быть представлена в виде рис. 1.

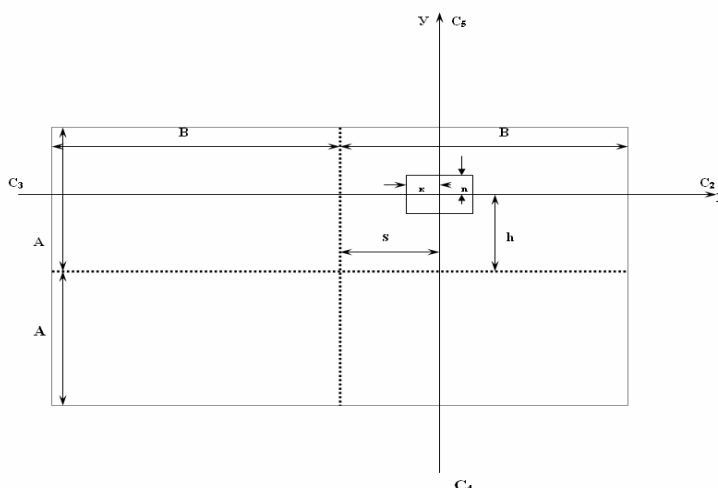


Рис.1. Двумерная задача для анализа состояния поверхностного слоя водного объекта при наличии одного источника загрязнения

Отметим, что оси координат совпадают с серединой источника загрязнения.

Распространение примеси описывается двумерным уравнением диффузии [6]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right).$$

В соответствии с методом локальных источников [5, с.125-128] общая концентрация примеси для данной задачи рассчитывается по формуле:

$$\tilde{C}(x, y, t) = \eta(C_1(x, y, t) + C_2(x, y, t) + C_3(x, y, t) + C_4(x, y, t) + C_5(x, y, t)), \quad (1)$$

где значения $C_1(x, y, t)$, $C_2(x, y, t)$, $C_3(x, y, t)$, $C_4(x, y, t)$, $C_5(x, y, t)$, находятся по формулам:

$$C_1(x, y, t) := \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi \cdot D \cdot t}} \right)^2 \cdot \int_{-k}^k \int_{-n}^n e^{-\left[\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4 \cdot D \cdot t} \right]} d\xi d\eta,$$

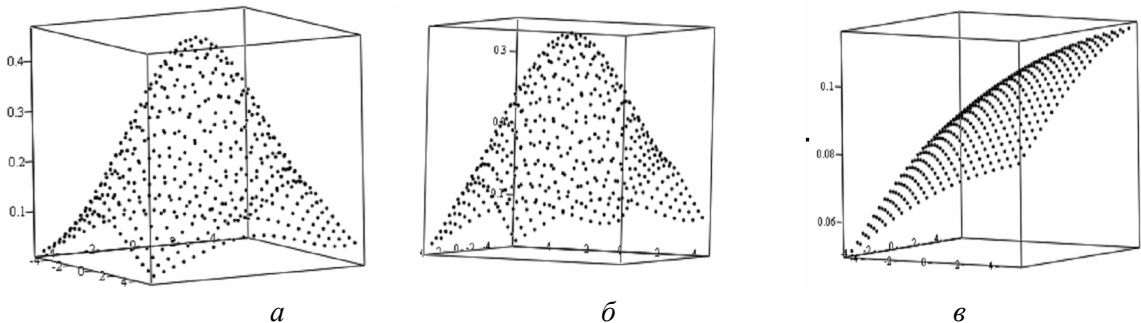
$$C_2(x, y, t) := \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi \cdot D \cdot t}} \right)^2 \cdot \int_{-k}^k \int_{-n}^n e^{-\left[\frac{[2(B-s)-x-\xi]^2 + (0-\eta)^2}{4 \cdot D \cdot t} \right]} d\xi d\eta,$$

$$C_3(x, y, t) := \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi \cdot D \cdot t}} \right)^2 \cdot \int_{-k}^k \int_{-n}^n e^{-\left[\frac{[-2(B+s)-x-\xi]^2 + (0-\eta)^2}{4 \cdot D \cdot t} \right]} d\xi d\eta,$$

$$C_4(x, y, t) := \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi \cdot D \cdot t}} \right)^2 \cdot \int_{-k}^k \int_{-n}^n e^{-\left[\frac{(0-\xi)^2 + [-2(h+A)-y-\eta]^2}{4 \cdot D \cdot t} \right]} d\xi d\eta,$$

$$C_5(x, y, t) := \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi \cdot D \cdot t}} \right)^2 \cdot \int_{-k}^k \int_{-n}^n e^{-\left[\frac{(0-\xi)^2 + [2(A-h)-y-\eta]^2}{4 \cdot D \cdot t} \right]} d\xi d\eta.$$

Построим графики, характеризующие распространение примеси в водной среде для двумерного пространства при временах 10 с, 15 с, 100 с, 200 с, 300 с, 400 с и следующих исходных данных: $B=12$, $A=10$, $k=3$, $n=2$, $s=5$, $h=4$, $D=0,3$ (рис. 2).



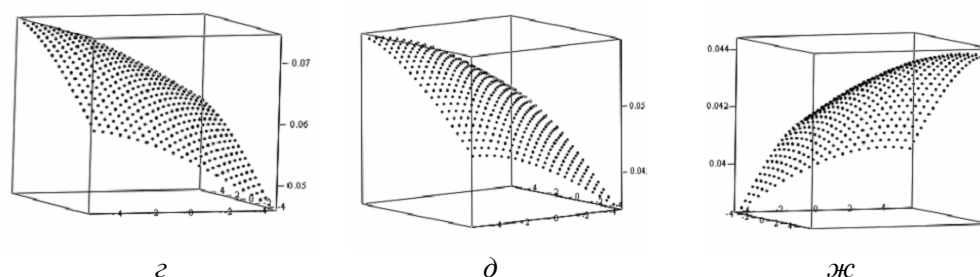


Рис.2. Графики распространения примеси в водной среде для двумерной задачи при временах 10 с (а), 15 с (б), 100 с (в), 200 с (г), 300 с (д), 400 с (ж) и $B=12$, $A=10$, $k=3$, $n=2$, $s=5$, $h=4$, $D=0,3$

Из рис.2 видно, что картина рассеивания примеси и величина общей концентрации загрязняющего вещества в водном объекте будет различна в зависимости от периода наблюдения.

Аналогично, как и для одномерного случая [7], была определена поправка η . Поправка η рассчитывалась по формуле: $\eta = \frac{S_1}{S_2}$,

где S_1 был найден по формуле (2), а S_2 по формуле (3):

$$S_1 = \int_{-1000}^{1000} \int_{-1000}^{1000} C_I(x, y, t) dx dy \quad (2)$$

$$S_2 = \int_{-(h+A)}^{A-h} \int_{-(B+s)}^{B-s} \tilde{C}(x, y, t) dx dy \quad (3)$$

В ходе численного эксперимента была рассчитана поправка при всех вышеуказанных временах. В таблице 1 приведены значения поправок при следующих исходных данных: $B=12$, $A=10$, $k=3$, $n=2$, $s=5$, $h=4$, $D=0,3$.

**Таблица 1. Рассчитанные поправки при следующих исходных данных:
 $B=12$, $A=10$, $k=3$, $n=2$, $s=5$, $h=4$, $D=0,3$**

Поправка	Период наблюдения, t					
	t1=10с	t2= 15с	t3 =100с	t4=200с	t5= 300с	t6 =400с
η	0,941	0,908	0,899	1,026	1,164	1,309

Также рассчитано время распространения, по истечению которого неравномерность распределения не превышала 5 %. Эта неравномерность оценивается отношением $\frac{C_{max}}{C_{min}} \leq 1,05$. В

результате расчетных операций в среде Mathcad 13 с учетом вышеприведенных исходных данных получили, что при $t = 1605$ с неравномерность распределения не превышала 5%.

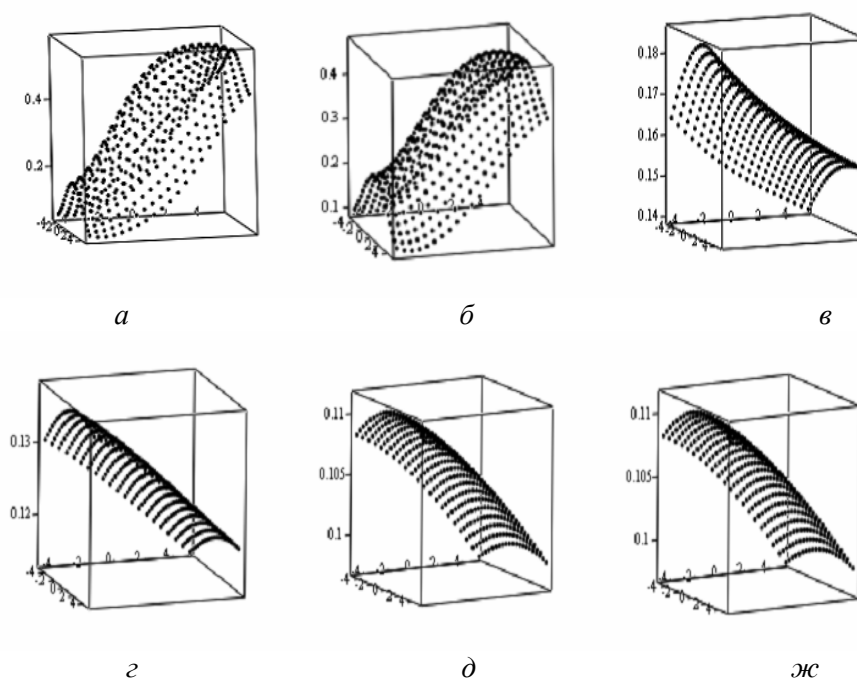
Далее задачу усложняли, добавляя еще один источник загрязнения. Была изучена методика расчета концентрации примеси в зависимости от расположения этих двух источников загрязнения. Источники загрязнения локализованы в разных областях водной поверхности, как показано на рисунке 3 (а,б).

С добавлением второго источника загрязнения возникает необходимость введения следующих обозначений: k , k_1 , k_2 , k_3 , n , n_1 , n_2 , n_3 , определяющие размеры области начальной локализации примеси обоих источников по длине и ширине соответственно, m ; s_1 - расстояние от центра второго источника загрязнения до середины области по длине, m ; h_1 - расстояние от центра второго источника загрязнения до середины области по ширине, m .

Каждый из случаев, представленных на рисунке 3 имеют свои различия и схожести. Первоначально была рассмотрена задача представленная на рисунке 3 а. При расчете общей концентрации примеси для второго источника загрязнения следует учесть его размеры,

И вновь, используя метод локальных источников [5, с.125-128], найдем концентрацию примеси для второго источника.

Таким образом, получили картину рассеяния примеси на поверхностном слое водного объекта при временах: 10 с, 15 с, 100 с, 200 с, 300 с, 400 с и следующих входных данных: $B=15$, $A=8$, $k=3$, $n=2$, $k_2=-17$, $n_2=-2$, $k_3=-9$, $n_3=2$, $s=7$, $s_1=6$, $h=h_1=5$, $D=0,3$ (см. рисунок 4).



Концентрация примеси для исследуемой водной области складывается из концентраций примеси первого и второго источников.

В результате проведенных вычислений с вышеприведенными исходными данными при времени распространения $t = 4365\text{с}$ (что составляет 1ч 12 мин 45 с), неравномерность распределения не превышала 5 %.

Затем рассмотрен случай, когда источники загрязнения были локализованы в различных областях исследуемой поверхности, что и представлено на рисунке 3б. Отметим, что как и в предыдущем случае, оси координат совпадают с серединой источника загрязнения.

После нахождения суммарной концентрации загрязняющего вещества необходимо вновь обратиться к вышеприведенным заменам, что позволяет вернуться к начальному условию, связанному с расположением источника примеси.

На рисунке 5 представлены графики, характеризующие распространение примеси в водной среде для двумерного пространства при наличии двух источников загрязнения, расположенных на разных уровнях, при временах:

10 с, 15 с, 100 с, 200 с, 300 с, 400 с и следующих исходных данных: $B=15$, $A=8$, $k=3$, $n=2$, $k_2=-17$, $n_2=-11$, $k_3=-9$, $n_3=-7$, $s=7$, $s_1=6$, $h=5$, $h_1=4$, $D=0,3$.

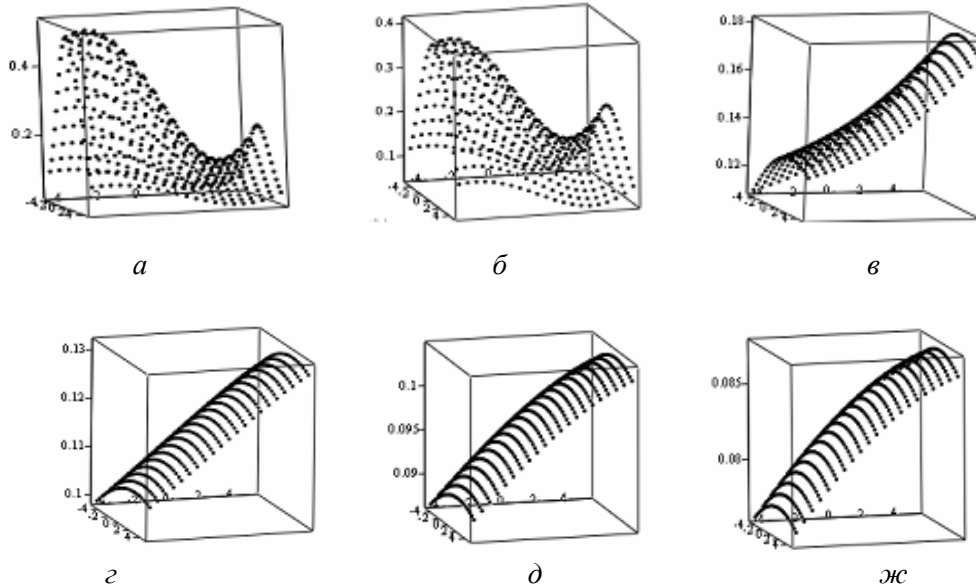


Рис.5. Графики распространения примеси для двумерной задачи при наличии двух источников загрязнения, локализованных в различных областях водной поверхности во временах: 10 с (а), 15 с (б), 100 с (в), 200 с (г), 300 с (д), 400 с (ж)

Построенные графики свидетельствуют о том, что с увеличением периода наблюдения концентрация примеси в данной среде при наличии двух источников загрязнения постепенно выравнивается.

Поправка η_{iau} рассчитывается по формуле:

$$\eta_{iau} = \frac{S_{iau\ 1}}{S_{iau\ 2}}, \quad (4)$$

где $S_{iau\ 1} = S_1(x, y - h - h_1) + S_1^*(x, y - h - h_1)$,

$S_{iau\ 2} = S_2(x, y - h - h_1) + S_2^*(x, y - h - h_1)$.

S_1^* , S_2^* имеют отношение ко второму источнику и находятся по формуле:

$$S_1^* = \int_{-1000}^{1000} \int_{-1000}^{1000} C_1^*(x, y, t) dx dy, \quad S_2^* = \int_{-(A-h_1)}^{A+h_1} \int_{-(B-s_1)}^{B+s_1} \tilde{C}^*(x, y, t) dx dy$$

Границы интеграла при расчете S_2^* подобраны таким образом, что $A + h_1$ определяет границу с верхней стороны длины области, а $-(A - h_1)$ характеризуют нижнюю границу длины области по оси ординат. $-(B - s_1)$ и $B + s_1$ определяют соответственно левую и правую боковые границы объекта относительно оси абсцисс.

Поправка была рассчитана при временах: 10 с, 15 с, 100 с, 200 с, 300 с, 400 с и исходных данных: $B=15$, $A=8$, $k=3$, $n=2$, $k_2=-17$, $n_2=-11$, $k_3=-9$, $n_3=-7$, $s=7$, $s_1=6$, $h=5$, $h_1=4$, $D=0,3$. Результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2. Рассчитанные поправки при следующих исходных данных: $B=15$, $A=8$, $k=3$, $n=2$, $k_2=-17$, $n_2=-11$, $k_3=-9$, $n_3=-7$, $s=7$, $s_1=6$, $h=5$, $h_1=4$, $D=0,3$

Поправка	Период наблюдения, t					
	t1=10с	t2= 15с	t3=100с	t4=200с	t5= 300с	t6 = 400с
η	0,843	0,869	1,034	1,219	1,406	1,585

Затем рассчитали время распространения, по истечению которого неравномерность распределения не превышала 5 %, то есть справедливо отношение $\frac{C_{max}}{C_{min}} \leq 1,05$. В результате

расчетных операций, с учетом вышеприведенных исходных данных, получили: при $t = 9090$ с, что соответствует 2 часам 31 минуте 30 секундам, неравномерность распределения не превышала 5 %.

Результаты численных экспериментов, а также построенные на их основе графики, физически обосновывают исследуемый процесс и подтверждают целесообразность применения вышеизложенной методики при наличии одного или двух источников загрязнения для анализа состояния поверхностного слоя водного объекта. Предложенный в работе подход позволяет рассчитать концентрацию загрязняющего вещества за определенный период времени, а также наглядно представить картину распространения загрязняющего вещества при определенных исходных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова – Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664с.
2. Шакиров Б.С., Куракбаева С.Д. Основные задачи и особенности математического моделирования катастрофических явлений в экологии // Наука и образование Южного Казахстана. – 2006. - №3 (52). – С. 74-77.
3. Никаноров А.М., Тепляков Ю.В., Уразаев К.К. Подobie моделей экосистем водных объектов: критерии подобия и способы их оценки // Водные ресурсы. – 1996. – Т.23, №5. – С.578-582.
4. Brenner A.M. Adaptation of random walk methods to the modeling of liquid distribution in packed columns // Advances in Fluid Mechanics IV, 2002, WIT Press, P. 291-300.
5. Болгов Н.П., Майлибаева Л.И., Соколов Н.М., Бренер А.М., Тарат Э.Я., Еримбетов А.К. Распределение жидкости в регулярной полочной насадке, ограниченной стенками // Теоретические основы химической технологии. – 1979, С. 125-128.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики., Изд. 5-е. – М.: изд. «Наука», 1977. – 736с.
7. Куракбаева С.Д. Методика расчета распространения загрязнений в водном объекте // Сборник статей XIV международной научно-практической конференции «Экология и жизнь». – Пенза, 2008. - С.168-171.

Резюме

Бұл мақалада су объектілерінің бетіндегі ластануының тарауы есебін шешуге локальді көздер әдісін қолдану идеологиясы көрсетілген. Әдетте, бір және екі ластану көзі табылғанда екі өлшемді диффузия есебі қарастырылатын. Жұмыс нәтижесінде екі ластану көзінің орналасуына байланысты қоспалардың концентрациясын есептеу алынды. Мұндай есептерді шешу су объектілерінің беттік қабаттарын ластандыратын заттардың таралғанын сипаттайды. Сандық эксперименттер өткізуге MATHCAD 13 ортасын қолданылды.

Summary

The paper deals with the ideology of application of the local sources method to solving problems of propagation of surface pollutions in water objects. Particularly, the two-dimensional diffusion problem in the presence of one or two pollutant sources has been considered. The results of calculation of admixture concentration depending on an arrangement of these two sources have been obtained too. The solution of such problems determines a picture of waste propagation along surface layers of water objects. For carrying out of the numerical experiments MATHCAD 13 soft has been used.

