

ДРЕНАЖ В ПОТОКЕ ГРУНТОВЫХ ВОД ЧЕРЕЗ ЗАВЕСУ

В. Н. Эмих

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Построена и исследована математическая модель перетока грунтовых вод, поступающих с поверхности земли, через вертикальную непроницаемую завесу с перехватом потока дренажным стоком, расположенным на поверхности завесы.

Введение. В работе [1] изложена краевая задача об установившейся фильтрации в пласте, не ограниченном по глубине и протяженности, при поступлении воды с земной поверхности, затопленной всюду, кроме полосы шириной $2l$, к одиночной трубчатой дрене (точечному стоку), заложённой в середине полосы. В этой модели установлена связь формы кривой депрессии с интенсивностью стока и обнаружен критический режим дренирования, который возникает на грани дестабилизации течения. За рамками критического режима краевая задача описывает иной, также неустойчивый фильтрационный процесс, сохраняющий лишь оболочку физического содержания. Ее наполнение осуществлено в рассматриваемой ниже расширенной постановке задачи. Практическим приложением последней может быть расчет перехвата потока грунтовых вод через шпунтовые завесы посредством горизонтального дренажа.

Постановка задачи, построение решения. Через вертикальную непроницаемую завесу, вершина которой G находится на глубине s от поверхности земли, перетекают грунтовые воды, поступающие в пласт неограниченной мощности с поверхности, затопленной при $x \geq l$ (рис. 1). Справа от завесы на фильтрующиеся с поверхности воды действует подпор снизу, с которым и связано перетекание через завесу. Слева же от нее фильтрация происходит только под действием силы тяжести.

Предположим, что при таком режиме течения вступает в действие дренажный точечный сток D , расположенный на поверхности завесы на глубине $d \geq s$ и поглощающий некоторое количество Q_d воды; остальная ее часть $Q_{св}$ по-прежнему уходит вглубь слева

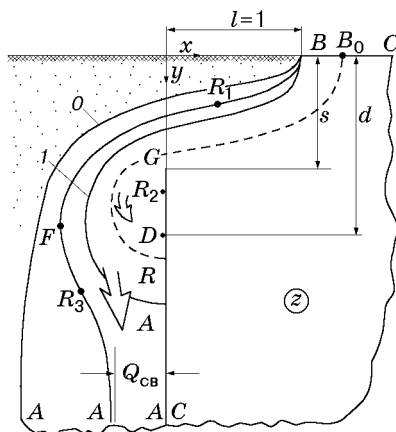


Рис. 1

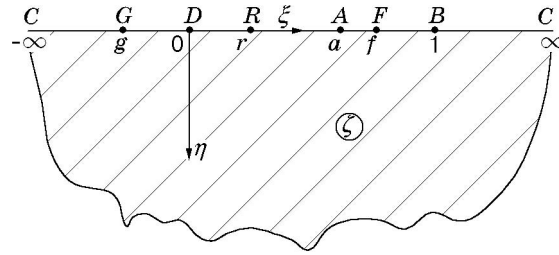


Рис. 4

Одной из целей исследования моделируемого процесса является расчет его гидродинамических характеристик в прямой физической постановке — при заданных значениях фильтрационного расхода стока $Q_d \in (0, Q_{d1})$ и геометрических параметров, определяющих течение (абсциссы $l = 1$ границы затопленной части поверхности, ординат s и d вершины завесы G и расположенного на ее поверхности дренажного стока D соответственно). Неизвестные параметры отображения a, f, g и расход Q_{cb} части потока, не захваченной стоком, подлежат определению из системы уравнений

$$\begin{aligned} Q_d \left(\frac{a}{f} \sqrt{\frac{1}{a} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{a} - 1} \right) &= \frac{\pi}{2} (1 + Q_{cb}), \quad Q_d \left(\frac{a}{f} - \ln \sqrt{a} \right) + Q_{cb} \operatorname{arth} \sqrt{1 - a} = \frac{\pi}{2} d, \\ Q_d \left(\frac{a}{f} \sqrt{1 - \frac{g}{a}} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - g}}{\sqrt{a} + \sqrt{a - g}} \right) &+ Q_{cb} \operatorname{arth} \sqrt{\frac{1 - a}{1 - g}} = \frac{\pi}{2} s, \\ f(r - g)\sqrt{a} &= r(f - g)\sqrt{(a - g)(1 - g)} \quad (r = aQ_d / (Q_d + Q_{cb}\sqrt{1 - a})). \end{aligned} \quad (3)$$

Последнее уравнение системы следует из условия обращения в бесконечность скорости фильтрации на вершине завесы. Параметр r является в плоскости ζ аффиксом точки R разветвления потоков на участке AD поверхности завесы.

Другой подвижной особой точкой, аффикс которой f также входит в число неизвестных параметров отображения при функционировании дренажного стока, является вершина F разреза вдоль границы области θ . Вопрос о положении этой точки на границе области течения рассмотрим ниже.

Предельные случаи. Основную роль в исследовании рассматриваемого течения играют два предельных случая: фильтрация в отсутствие дренажа и течение при полном поглощении потока дренами. Именно они определяют в общем случае диапазоны возможного изменения искомых параметров, включая расход дренажного стока, и поэтому должны рассчитываться в первую очередь.

Рассмотрим вначале первый случай $Q_d = 0$. При $Q_d \approx 0$ из первого уравнения системы (3) и последнего равенства для параметра r имеем

$$f \approx 2Q_d \sqrt{a(1 - a)} / [\pi(1 + Q_{cb})], \quad r \approx aQ_d / (Q_{cb}\sqrt{1 - a}). \quad (4)$$

С учетом этих соотношений зависимости (2) в пределе ($Q_d \rightarrow 0$) примут вид

$$z = (1 + Q_{cb}) \sqrt{\frac{\zeta - a}{1 - a}} - Q_{cb} + iQ_{cb} \operatorname{arth} \sqrt{\frac{1 - \zeta}{1 - a}}, \quad \omega = Q_{cb} \operatorname{arth} \sqrt{\frac{1 - \zeta}{1 - a}} + iQ.$$

Система (3) преобразуется в следующую:

$$\begin{aligned} (1 + Q_{cb}) \sqrt{\tau(0)} + (2Q_{cb}/\pi) \operatorname{arth} \sqrt{1 + \tau(0)} &= d, \\ (1 + Q_{cb}) \sqrt{\tau(g)} + (2Q_{cb}/\pi) \operatorname{arth} \sqrt{1 + \tau(g)} &= s, \\ \sqrt{\tau(g)(1 + \tau(g))} &= (2Q_{cb}/\pi) / (1 + Q_{cb}) \quad (\tau(\zeta) = (a - \zeta)/(1 - a)). \end{aligned} \quad (5)$$

Левая часть второго уравнения системы (5) после исключения из нее $\tau(g)$ с использованием третьего уравнения оказывается функцией величины $Q_{\text{св}}$. Аналитически устанавливается, что эта функция монотонно возрастает в интервале $(0, \infty)$ при увеличении аргумента в том же интервале, что обеспечивает однозначную разрешимость второго уравнения системы (5) относительно $Q_{\text{св}}$; при этом однозначно определяется также величина $\tau(g)$.

Выражения в левых частях первых двух уравнений системы (5) являются значениями ординаты $y(\zeta)$ точек D и G граничного участка AC . В интервале $(-\infty, g)$ функция $y(\zeta)$ убывает, достигая при $\zeta = g$ минимального значения s (это отражено во втором уравнении системы (5)), а при дальнейшем увеличении параметра ζ в интервале (g, a) функция $y(\zeta)$ возрастает. Отсюда следует, что при $d > s$ первое уравнение определяет два значения параметра $\tau(0)$: $\tau_{01} \in (0, \tau(g))$ и $\tau_{02} \in (\tau(g), \infty)$. Для каждого из них на основе последнего равенства системы (5) вычисляются две пары значений параметров a и g , первая из которых соответствует случаю расположения стока на внешней (по отношению к источнику) стороне завесы, а вторая — на внутренней стороне:

$$\begin{aligned} a_{01} &= \tau_{01}/(1 + \tau_{01}), & g_{01} &= (\tau_{01} - \tau(g))/(1 + \tau_{01}) < 0, \\ a_{02} &= \tau_{02}/(1 + \tau_{02}), & g_{02} &= (\tau_{02} - \tau(g))/(1 + \tau_{02}) > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что хотя сток в обсуждаемой схеме перетока не функционирует, учитывать его положение необходимо уже здесь, поскольку эта схема служит исходной при исследовании течения, в котором за стоком D закреплен аффикс $\zeta = 0$ на действительной оси плоскости ζ (см. рис. 4); следовательно, с этим выбором должны быть согласованы параметры a , g в случае $Q_d = 0$.

Во втором предельном случае (поглощение дренажной воды всего фильтрационного потока) зависимости для функций z и ω получаются непосредственно из формул (2) при $Q_{\text{св}} = 0$. Система уравнений (3) принимает вид

$$\begin{aligned} Q_{\text{д1}} \left(\frac{a}{f} \sqrt{\frac{1}{a} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{a} - 1} \right) &= \frac{\pi}{2}, & Q_{\text{д1}} \left(\frac{a}{f} - \ln \sqrt{a} \right) &= \frac{\pi}{2} d, \\ Q_{\text{д1}} \left(\frac{a}{f} \sqrt{1 - \frac{g}{a}} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{g}{a}}}{\sqrt{a} + \sqrt{a - g}} \right) &= \frac{\pi}{2} s, & g &= \frac{1}{2} \left(1 + 2f - \sqrt{1 + 4 \frac{f^2}{a} \left(1 - \frac{a}{f} \right)} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Последнее равенство следует из четвертого уравнения системы (3) при $r = a$.

Кроме параметров отображения a , f , g , из системы (7) необходимо определить расход $Q_{\text{д1}}$ стока, от положения которого зависит вычислительный алгоритм.

При расположении дренажного стока D на внутренней стороне завесы ключевой расчетной характеристикой является ордината y_A^* точки A кривой депрессии при критическом режиме дренирования двухстороннего фильтрационного потока. Эта схема течения, упомянутая во введении и детально исследованная в [1], способствовала формированию подхода к анализу многопараметрических задач фильтрации со свободными границами. Величина y_A^* находится из равенств

$$y_A^* = Q_d^* \operatorname{arth} \sqrt{1 - a^*}, \quad Q_d^* = \pi d / (2 - \ln a^*) \quad (8)$$

при значении параметра a^* , определяемом из уравнения

$$d(\sqrt{1/a^* - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{1/a^* - 1}) + \ln \sqrt{a^*} - 1 = 0.$$

В случае $s < y_A^*$ дрена поглощает поток при расходе $Q_{\text{д1}} < Q_d^*$, вычисляемом в процессе нахождения параметра a_1 из третьего уравнения системы (7) при $a = a_1 = g$:

$$Q_{\text{д1}} \operatorname{arth} \sqrt{1 - a_1} = \frac{\pi}{2} s, \quad Q_{\text{д1}} = \frac{d \sqrt{1/a_1 - 1} - 1}{\operatorname{arctg} \sqrt{1/a_1 - 1} - \sqrt{1/a_1 - 1} \ln \sqrt{a_1}}. \quad (9)$$

Если же $s \geq y_A^*$, то полный перехват потока дренажной происходит на пределе ее возможностей, в критическом режиме, причем в случае строгого неравенства часть поглощаемого дренажной потока перетекает через завесу. Такая схема реализуется на исследованном в [1] продолжении решения исходной краевой задачи по параметру a в один из интервалов (a^{**}, a^*) или $(0, a^{**})$ в зависимости от того, находится сток на внутренней или внешней стороне завесы. В соответствующем интервале параметр $a = a_1$ вычисляется на основе третьего уравнения системы (7) с предварительным исключением из него параметра f и расхода $Q_{д1}$ с использованием первого и второго уравнений, а также параметра g с помощью четвертого уравнения. Значение a^{**} определяется из уравнения

$$2 - \frac{(1 - a^{**})(d\sqrt{1/a^{**} - 1} - 1)}{d \operatorname{arctg} \sqrt{1/a^{**} - 1} - \ln \sqrt{a^{**}}} = 0,$$

являющегося следствием равенства $g = 0$.

Общий случай: расчетный алгоритм, анализ решения. Ключевым этапом решения основной краевой задачи является нахождение из системы уравнений (3) параметров a , f , g и расхода $Q_{св}$ свободно фильтрующегося потока при заданных значениях входных физических параметров, определяющих моделируемое течение и содержащихся в правых частях уравнений (3). Выбор расхода стока Q_d ограничивается его максимально допустимым значением $Q_{д1}$, вычисляемым в предельном режиме полного перехвата потока дренажной. В результате предварительного расчета обоих предельных случаев определяются также интервалы (a_1, a_0) и (g_1, g_0) значений искомых параметров отображения a и g .

В общем случае численное решение системы (3) реализовано посредством двухступенчатой итерационной процедуры. В ее внешнем цикле из третьего уравнения системы (3) вычисляется параметр $a \in (a_1, a_0)$, сложной функцией которого можно представить левую часть этого уравнения. При этом для каждого значения a величина $Q_{св}$ и параметры f , g находятся из остальных трех уравнений системы (3). При решении четвертого уравнения возможен один из двух вариантов: $g \in (0, a)$ или $g \in (-\infty, a)$ — в зависимости от того, расположен сток на внутренней или внешней стороне завесы соответственно. Монотонность указанной сложной функции, обеспечивающая однозначную разрешимость третьего уравнения относительно параметра a , устанавливается численно, как и в предельном случае полного перехвата.

Наряду с фиксированными особыми точками B , D , G , координаты которых в плоскости течения в прямой постановке считаются заданными и используются при выводе первых трех уравнений системы (3), в задаче присутствуют также подвижные особые точки A , R , F . Точка A является концевой точкой кривой депрессии; нахождение связанного с этой точкой параметра отображения a составляет основную часть всей вычислительной процедуры. Аффикс r точки R разветвления потоков на граничном участке AD изменяется в интервале $(0, a)$, причем $r = 0$ и $r = a$ соответственно при $Q_d = 0$ и $Q_d = Q_{д1}$ ($Q_{св} = 0$).

В исходной схеме перетока через завесу без дренирования особые точки F и R отсутствуют. Исходя из соотношения $\varphi = -p + y$, связывающего приведенный потенциал φ скорости фильтрации с гидродинамическим давлением в потоке p , отнесенным к удельной массе жидкости γ , на вертикальной поверхности завесы AGC получим

$$\frac{dp}{dy} = 1 - w_y. \quad (10)$$

В рассматриваемом предельном случае вертикальная составляющая w_y скорости фильтрации убывает от 0 до $-\infty$ при движении по внутренней стороне завесы от точки C к вершине завесы G , а после перехода на внешнюю сторону и при последующем движении по ней вниз также убывает от ∞ до 1. Отсюда и из равенства (10) следует,

что вдоль завесы давление в потоке убывает от бесконечно большого в точке C до атмосферного ($p = 0$) в точке A . Заметим, что при $s = 0$, т. е. при полном экранировании от поверхностного источника, грунтовые воды справа от завесы под воздействием подпора снизу заполняют поры до поверхности земли, на которой расположен источник, и затем находятся в состоянии покоя, при котором давление возрастает с увеличением глубины по гидростатическому закону; слева от завесы давление во всей толще грунта равно атмосферному. Сюда при заглублении завесы перетекает справа фильтрационный поток, подпитываемый из источника.

Как только на поверхности завесы начинает функционировать дренажный сток D , в его окрестности образуется зона пониженного давления, границу которой на участке DA обозначает точка F максимума давления; в области θ она является вершиной граничного разреза 1 (см. рис. 3). Если сток расположен на внутренней стороне завесы и, кроме того, $s < y_A^*$, то дрена полностью поглощает поток при определенном увеличении своего расхода в рамках схемы двухстороннего притока [1]; при этом точка F остается на внутренней стороне завесы. В других случаях, когда фильтрационный поток по крайней мере частично перетекает через завесу, при исследовании вопроса о положении и физическом содержании точки F будем использовать последнее уравнение (3) и непосредственно получаемое из него равенство

$$f - r = f \frac{r - g}{g} \left(\sqrt{\frac{a}{(a - g)(1 - g)}} - 1 \right). \quad (11)$$

Предположим, что сток расположен на внутренней стороне завесы ($0 < g < a$) и одновременно выполняется неравенство $s > y_A^*$. В силу асимптотики (4) при малых значениях Q_d параметры f, r малы: точки F, R находятся в непосредственной окрестности стока. Согласно (3) имеем $r \approx a$ в ситуациях, близких к дренированию с полным перехватом потока, когда $Q_{св} \approx 0$. При этом равенство (11) приводит к соотношению

$$f - a \approx f \frac{a - g}{g} \left(\sqrt{\frac{a}{(a - g)(1 - g)}} - 1 \right) > 0,$$

означающему, что при определенном увеличении интенсивности дренирования точка F переходит на кривую депрессии, становясь ее крайней левой точкой. В результате этого на участке AF кривой депрессии появляется точка перегиба R_3 в дополнение к точке перегиба R_1 , присутствующей на кривой изначально. С указанным изменением структуры фильтрационного потока связан разрез 2 вдоль границы области θ (см. рис. 3). Однако на зависимости $\theta(\zeta)$, а значит, и на представлении решения эти трансформации не отражаются. Из последнего уравнения системы (3) и его модификации (11) получаем

$$\text{sign}(f - g) = \text{sign}(r - g) = \text{sign}(f - r). \quad (12)$$

Таким образом, при увеличении расхода Q_d дренажного стока точка F минует вершину завесы G одновременно с точкой R , переходя при этом из потока, поглощаемого дрена, в зону свободного потока.

В случае расположения стока на внешней стороне завесы выполняются неравенства $-\infty < g < 0$, с учетом которых и в силу соотношений (11), (12) имеем $f > r > g$. Это означает, что при включении стока точки F и R появляются на той же стороне под стоком, причем точка F сразу оказывается в зоне свободного потока, а при дальнейшем увеличении расхода Q_d также переходит на кривую депрессии.

Годограф скорости. В задачах фильтрации со свободными границами о характере течения можно судить по годографу скорости. Выражение для сопряженной с ней комплексной скорости фильтрации $w = w_x - iw_y = d\omega/dz$ [2] можно получить из интеграль-

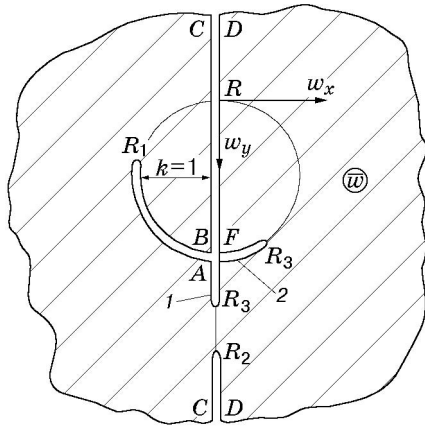


Рис. 5

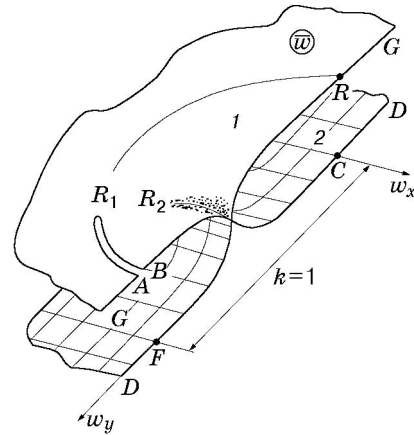


Рис. 6

ных представлений (2) для функций z, ω . При этом для точек поверхности завесы, вдоль которой $-\infty < \zeta < a$, $w = -iw_y$, имеем

$$\frac{1}{w_y} = 1 - \frac{r}{f\sqrt{a}} \frac{(f - \zeta)\sqrt{(a - \zeta)(1 - \zeta)}}{r - \zeta}. \quad (13)$$

На рис. 5 годограф соответствует течению при функционировании стока на внешней стороне завесы. В этом случае на начальной стадии дренирования точки F, R_3 находятся на поверхности завесы, являясь соответственно точками максимумов давления и скорости фильтрации на участке FA ; граничный разрез 1 на годографе направлен вниз по оси w_y . На основе равенства (13) и с учетом того, что $f > r$, а аффикс r_3 точки R_3 связан с аффиксом r_2 вершины другого разреза R_2 (точки минимума скорости на участке GD) неравенством $r_3 > r_2$, можно показать, что $w_y(R_3) < w_y(R_2)$, и, следовательно, оба разреза не перекрываются, т. е. годограф является однолистным. По мере интенсификации дренажа точки F, R_3 перейдут на кривую депрессии (см. рис. 1), разрез 2 на годографе с вершиной в точке R_3 разместится вдоль дуги окружности, соответствующей этому граничному участку, а точки A и F поменяются местами (см. рис. 5).

Более существенные превращения происходят с годографом, если сток функционирует на внутренней стороне завесы, причем $s > y_A^*$. При достаточно малых значениях Q_d , когда потоки разделяются на той же стороне завесы, годограф оказывается двулистным с внутренней точкой разветвления R_2 . Ее аффикс r_2 является одним из двух комплексно-сопряженных корней уравнения $dw/d\zeta = 0$, для которого $\text{Im } r_2 > 0$ (рис. 6); третий, вещественный корень r_1 — аффикс точки перегиба R_1 кривой депрессии. В частном случае совмещения при некотором значении Q_d точек F и R с вершиной завесы G заштрихованный лист 2 годографа вырождается в точку G , конечная скорость фильтрации $\bar{w} = iw_y(g)$ в которой определяется равенством

$$1/w_y(g) = 1 - \sqrt{(a - g)(1 - g)/a}.$$

Отсюда следует, что $|w_y(g)| > 1$, поскольку $g \in (0, a)$. На остающемся в этом частном случае единственном листе годографа бесконечно удаленной точкой является точка D — образ дренажного стока. Заметим, что такова же конструкция годографа при свободном перетоке через завесу в отсутствие дренажа; в этом случае место точки D занимает точка G .

При дальнейшем увеличении Q_d к указанному листу на плоскости $\bar{w}$ присоединяется правая полуплоскость, а годограф обретает ту же структуру, что и в случае расположения

стока D на внешней стороне завесы, при той же трансформации одного из граничных разрезов, связанной с переходом точки F на кривую депрессии; в рассматриваемом случае следует лишь поменять местами точки D и G .

При $s < y_A^*$ полное поглощение потока дренажной, функционирующей на внутренней стороне завесы, происходит в рамках схемы двухстороннего притока к дрене [1]. При этом во всем диапазоне расхода Q_d годограф скорости остается таким же, как на рис. 6, а в предельном режиме дренирования верхний лист 1 превращается в полукруг: $|w - i/2| < 1/2$.

Численные расчеты. Проиллюстрируем исследованное выше течение результатами численных расчетов при $s = 0,3$, $d = 1$. Из второго и третьего уравнений системы (5) найдено значение $Q_{св} = 0,1047$ фильтрационного расхода в отсутствие дренажа. При расположении стока на внутренней стороне завесы критический режим дренирования возникает согласно (8) при $Q_d^* = 0,6756$, $y_A^* = 0,8602$ в рамках схемы двухстороннего притока к дрене, а полное поглощение ею потока происходит в нормальном режиме дренирования при значении $Q_d = Q_{d1} = 0,4016$, вычисляемом на основе равенств (9); при этом точка A совмещается с вершиной завесы G . Если сток при той же глубине его заложения находится на внешней стороне завесы, то он поглощает весь поток, перетекающий через вершину завесы, при фильтрационном расходе Q_{d1} , практически совпадающем с расходом $Q_{св}$ (превышение первой величины над второй проявляется только в седьмом десятичном знаке). Незначительно различаются также параметры отображения a , g в обоих предельных случаях: $a_0 = 3,691 \cdot 10^{-12}$, $a_1 = 0,923 \cdot 10^{-12}$; $g_0 \approx g_1 \approx -0,0036$. Таким образом, сток оказывает влияние на фильтрационные характеристики потока лишь при функционировании на внутренней поверхности завесы. В другом же случае он практически полностью экранируется завесой от источника поверхностных вод и даже на пределе своих возможностей не активизирует течение, влияя на его структуру лишь в малой окрестности; заметим, что в этом случае $y_A = 1,0462$ при полном перехвате потока стоком.

По мере заглубления завесы на фоне общей интенсификации течения расширяются и ресурсы его дренирования. В рассматриваемой модели расход стока достигает максимального значения $Q_{d1} = Q_d^* = 0,6756$ в режиме полного перехвата при $s = y_A^* = 0,8602$, убывая при дальнейшем опускании вершины завесы до уровня стока и последующем ее подъеме с противоположной стороны [1]; в частности, при $s = 0,9$ имеем $Q_{d1} = 0,6736$; $0,4529$, если сток расположен на внутренней и внешней стороне завесы соответственно. В первом случае представляет интерес динамика подвижных особых точек F и R , исследованная выше теоретически. При $Q_d = 0,9170Q_{d1}$ эти точки совмещаются с вершиной завесы G , а при дальнейшем увеличении дренажного расхода оказываются на внешней стороне завесы. При $Q_d = 0,9511Q_{d1}$ точка F переходит на кривую депрессии, минуя точку A . Последняя совмещается с точкой R в режиме полного перехвата потока дренажной; при этом $y_A = 0,9019$.

Заключение. В рамках многопараметрической краевой задачи двумерной безнапорной фильтрации детально исследована гидродинамическая модель дренажа в потоке грунтовых вод через непроницаемую завесу, включающая как частные или предельные некоторые из рассмотренных в [1] схем безнапорной фильтрации к одиночной трубчатой дрене. При этом использован подход, основанный на предварительном расчете предельных режимов течения. Они определяют границы возможной интенсификации дренажа, а также интервалы изменения неизвестных параметров конформных отображений, вычисляемых из системы трансцендентных уравнений. В итоге выполнен численный анализ трансформаций течения и сопутствующих им изменений годографа скорости по мере интенсификации дренажного стока на основе прямой постановки краевой задачи. Расчеты обнаруживают существенное ослабление его влияния на поток при экранировании от поверхностного источника.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Эмих В. Н.** О нескольких гидродинамических моделях дренажа // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, вып. 6. С. 1046–1057.
2. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.

*Поступила в редакцию 20/XII 2001 г.,
в окончательном варианте — 28/I 2002 г.*
