

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ВАЗИРЛАР МАҲКАМАСИ
ҲУЗУРИДАГИ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЯ
БОШ БОШҚАРМАСИ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИИ
ПРИ КАБИНЕТЕ МИНИСТРОВ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

В. А. БУГАЕВ НОМИДАГИ ЎРТА ОСИЁ ИЛМИЙ-ТАДҚИҚОТ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЯ ИНСТИТУТИНИНГ
ИЛМИЙ ТЎПЛАМИ

ТРУДЫ
СРЕДНЕАЗИАТСКОГО НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМЕНИ В. А. БУГАЕВА

Выпуск 149(230) нашр

Тоғ дарёларининг сув оқими
жараёнини математик моделлаш

Математическое моделирование
процессов стока горных рек



Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси
хузуридаги гидрометеорология Бош бошқармаси

Главное управление по гидрометеорологии
при Кабинете Министров Республики Узбекистан

В. А. Бугаев номидаги Ўрта Осиё илмий-тадқиқот
гидрометеорология институтининг (ЎОИТГМИ)
илмий тўплами

Труды Среднеазиатского научно-исследовательского
гидрометеорологического института имени В. А. Бугаева
(САНИГМИ)

Выпуск 149(230) нашр

Тоғ дарёларининг сув оқими жараёнини
математик моделлаш

Математическое моделирование процессов
стока горных рек

Под редакцией

профессора, доктора технических наук Ю. М. Денисова,
кандидата технических наук С. В. Мягкова

УДК 556.048 (0.83.13)+551.48+556.072

Рецензент кан. геогр. наук С.И. Инагамова

Сборник содержит работы по динамико-стохастическому моделированию процесса стока рек, методу выявления трендов среднего и дисперсии среднегодовых и экстремальных расходов воды, способам расчета максимальных расходов, твердому стоку и русловым процессам, расчету влияния хозяйственной деятельности на величину боковой приточности. Сырдарьи в пределах Ферганской долины, развитию современных методов прогноза стока горных рек, а также рассматриваются некоторые вопросы гидрологии орошаемого земледелия.

Для специалистов в области гидрологии, агрометеорологии, климатологии и физики атмосферы.

Издание начато в 1940 г. (до 1958 г. под названием "Труды Ташкентской геофизической обсерватории").

© Среднеазиатский
научно-исследовательский
гидрометеорологический
институт имени В.А.Бугаева
(САНИГМИ), 1996 г.

Тўпламда дарё оқими жараёнини динамик-стохастик моделлаш, сув сарфи экстремал ва ўрта йиллик дисперсияси ва ўртача трендларини аниқлаш усуллари келтирилган. Сирдарёнинг Фарғона водийсида ён томондан қўйиладиган оқимига хўжалик фаолияти таъсирини хисоблаш усуллари, тоғ дарёлари оқимининг ҳозирги замон прогноз усулларини ривожлантириш, шунингдек, суғориладиган ерлар гидрологиясининг айрим масалалари баён қилинган.

Тўплами гидрология, агрометеорология, иқлимшунослик ва атмосфера физикаси соҳасида ишлайдиган мутахассисларга мўлжалланган.

The volume presents the works on dynamic-stochastic modeling of process rivers runoff, the method of discovery trends of average and extreme discharges, the methods of computation maximum discharges, sediment runoff and deformation of the bed rivers, the methods of computation influence of economic activity on the side inflow of Syrdarya in the bounds of Ferganion valley, the development of modern methods of forecasts mountain rivers runoff, and also some questions of hydrology irrigation agriculture are considered.

It is intended for specialists in the area of hydrology, agrometeorology, climatology and physics of atmosphere.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Ю.М.Денисов. Стохастико-детерминированные математические модели стока рек.....	5
Ю.М.Денисов, Т.Л.Ибрагимова. Метод гидрологических расчетов среднегодовых и экстремальных расходов воды для рек с интенсивным хозяйственным использованием водных ресурсов.....	22
Ю.М.Денисов, Т.Л.Ибрагимова. Выбор плотности вероятности и функции распределения.....	41
А.Ф.Шахидов. Расчет смешанных максимальных расходов воды горных рек.....	51
Ю.М.Денисов, А.И.Сергеев, Л.Н.Побережский. Метод оценки водообеспеченности орошаемой территории.....	68
С.В.Мягков. Инерционный метод сглаживания временных рядов.....	79
С.В.Мягков. О двух методах обработки спутниковых снимков.....	88
Л.Ф.Ляховская, Я.Ф.Мухамитьянова. Радиолокационная и спутниковая информация для прогноза селеопасности в Ферганской долине.....	96
Н.А.Агальцева. Долгосрочный прогноз притока в Нурекское водохранилище на реке Вахш.....	101
Н.А.Агальцева, В.А.Новикова. Долгосрочный прогноз стока реки Кафирниган.....	109
А.В.Пак, Е.В.Корнилова. Расчет поля осадков и комплексная оценка снегозапасов в бассейне реки Пяндж.....	115
А.И.Сергеев. Метод расчета боковой приточности на участках рек Нарын, Карадарья и Сырдарья в пределах орошаемой зоны Ферганской долины.....	121
Ю.М.Денисов, А.Х.Туляганов. Метод расчета твердого стока и русловых деформаций.....	131
А.И.Сергеев. Численная схема решения нестационарной задачи распределения влаги, пара и тепла в ненасыщенных почвогрунтах.....	146
Ю.М.Денисов. Расчет испарения воды из почвы.....	161
Ю.М.Денисов. Некоторые эвристические соотношения по оценке потоков импульса, тепла и пара.....	172
Ю.М.Денисов. Обобщенные тригонометрические и гиперболические функции.....	33

СТОХАСТИКО-ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СТОКА РЕК

В статье / I / описаны основы метода построения стохастико-детерминированных математических моделей процесса стока рек. В предлагаемой работе мы существенно дополним, углубим и уточним содержание упомянутой статьи, приведем численные результаты расчетов, а также сделаем ее доступной для практического использования. Чтобы не заставлять читателя искать цитируемую работу, изложим здесь также ее основное содержание.

Разрабатываемые в настоящее время методы расчета и прогноза гидрографа стока рек являются либо эмпирико-статистическими, либо опираются на применение детерминированных математических моделей описываемого процесса.

В данной статье предлагается способ расчета гидрографа стока реки за конкретный год, включающий в себя учет как стохастических, так и детерминированных характеристик процесса.

Результатом расчета для данного года является безусловная плотность вероятности расходов воды для любого момента времени внутри года / 2,3 /.

Какие причины могут приводить к возникновению стохастических составляющих при расчете гидрографа по математическим моделям ?

1. Расходы воды в створе реки измеряются со средней относительной погрешностью порядка 5 - 10 %. Это естественно приводит к появлению случайных флуктуаций при задании начальных условий состояния объекта в математической модели.

2. Расчет поступления Q_{Π} талой и дождевой воды на поверхность водосбора проводится с еще большими погрешностями. Эти погрешности обусловлены конечным, как правило, малым числом точек (метеостанций, пунктов) измерения метеорологических и гидрологических элементов, способом интерполяции и экстраполяции их по территории и во времени, а также ошибками в их измерении.

3. Построить математическую модель гидрологического процесса, описывающую абсолютно адекватно данное явление, представляется совершенно нереальным. Неизбежно придется ввести различного рода упрощающие предположения, связанные с описанием таяния, испарения, инфильтрации, движения воды по поверхности бассейна и в русле реки и т.д. Это также приводит к появлению погрешностей в расчете гидрографа стока.

В силу указанных причин мы не можем интерпретировать получаемые результаты расчетов гидрографа стока реки по исходным данным за конкретный год как однозначные. Правильнее представлять себе искомое решение в виде пучка гидрографов, группирующихся около некоторой линии (математического ожидания или наиболее вероятного в данных условиях гидрографа).

Если провести сечения этого пучка в моменты времени t_1 , t_2 и t_3 , то мы получим на линиях Q в эти моменты времени систему точек пересечения, занимающих разное положение в различные моменты времени. Для одной подвижной линии Q точки пересечения с изменением времени t будут перемещаться по этой линии.

Пусть пучок гидрографов состоит из N траекторий, где N — достаточно большое число. Обозначим через $\Phi(Q, t)$ число точек (траекторий), имеющих в момент времени t координаты меньше Q . Число точек, которые будут находиться в интервале Q и $Q + dQ$, равно :

$$\Phi(Q+dQ, t) - \Phi(Q, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial Q} dQ .$$

Величину $\partial \Phi / \partial Q$ назовем плотностью точек (число точек на единице длины Q) на оси Q и обозначим ее через $G(Q, t)$, то есть

$$G(Q, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial Q} . \quad (1)$$

Получим уравнение баланса числа точек на оси Q в дифференциальной форме. Как уже было сказано ранее, точки с течением времени двигаются по оси Q .

Одномерный поток точек $q(Q, t)$ представим состоящим из двух составляющих :
конвективной

$$q_k(Q, t) = G(Q, t) U(Q, t) \quad (2)$$

и диффузной (энтропийной)

$$q_d(Q, t) = -D \frac{\partial G}{\partial Q} \quad (3)$$

Здесь

$$U(Q, t) = \frac{dQ}{dt} \quad (4)$$

скорость движения точек при координате, равной Q в момент времени t , а $D(Q, t)$ — коэффициент диффузии.

Так как пространственная координата имеет размерность Q , то коэффициент диффузии будет иметь размерность Q^2/t .

Общий поток $q(Q, t)$ равен $q_k + q_d$, т.е.

$$q(Q, t) = \frac{dQ}{dt} G - D \frac{\partial G}{\partial Q}, \quad (5)$$

а обобщенная скорость точек $V(Q, t)$ есть

$$V(Q, t) = \frac{q(Q, t)}{G} = \frac{dQ}{dt} - \frac{D}{G} \frac{\partial G}{\partial Q}. \quad (5a)$$

Выделим на оси Q интервал с границами Q и $Q + dQ$. Через нижнюю границу этого интервала войдет за время dt число точек

$$q(Q, t) dt.$$

Через верхнюю границу выйдет за то же время

$$-q(Q+dQ, t) dt = \left[q(Q, t) + \frac{\partial q}{\partial Q} dQ \right] dt.$$

Так как траектории не прерываются и дополнительно не возникают, то внутренние источники и стоки отсутствуют. Вследствие этого разность между входом и выходом даст приращение числа точек на интервале dQ за время dt

$$\frac{\partial G}{\partial t} dQ dt = q(Q, t) dt - \left[q(Q, t) + \frac{\partial q}{\partial Q} dQ \right] dt$$

или

$$\frac{\partial G}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial Q}. \quad (6)$$

Подставляя (5) в (6), получим

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Q} \left[D \frac{\partial G}{\partial Q} \right] - \frac{\partial}{\partial Q} \left[\frac{dQ}{dt} G \right]. \quad (7)$$

Поделим величину $\Phi(Q, t)$ на $N = \text{const}$ (общее число точек) и обозначим эту величину через $F(Q, t)$:

$$F(Q, t) = \frac{1}{N} \Phi(Q, t) . \quad (8)$$

Функция $F(Q, t)$ представляет собой долю точек, у которых в момент времени t ординаты меньше Q . Ее можно представить как своего рода эмпирическую вероятность того, что ордината случайной точки будет меньше Q , то есть $F(Q, t)$ — функция распределения Q в момент времени t .

По той же причине величину

$$\frac{1}{N} \frac{\partial \Phi}{\partial Q} = \frac{G}{N} = \frac{\partial F}{\partial Q}$$

можно рассматривать как плотность вероятности Q в момент времени t . Обозначим ее через $f(Q, t)$:

$$f(Q, t) = \frac{G}{N} . \quad (9)$$

Поделим обе части равенства (7) на N , с учетом (9) найдем :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Q} \left[D \frac{\partial f}{\partial Q} \right] - \frac{\partial}{\partial Q} \left[\frac{dQ}{dt} f \right]$$

или, учитывая, что $dQ / dt = U(Q, t)$,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial Q^2} + \left[\frac{\partial D}{\partial Q} - U(Q, t) \right] \frac{\partial f}{\partial Q} - \frac{\partial U}{\partial Q} f . \quad (10)$$

Дифференциальное уравнение в частных производных (10) при заданных $D(Q, t)$, $U(Q, t)$, начальных и граничных условиях описывает динамику изменения безусловной плотности вероятности $f(Q, t)$. Обозначим

$$q_s(Q, t) = \frac{1}{N} q(Q, t) . \quad (11)$$

За начальное условие следует принять плотность вероятности Q в момент времени t_0 :

$$f(Q, t_0) = \Omega(Q) . \quad (12)$$

Граничные условия могут быть различными. Например, расходы воды не должны быть отрицательными. Тогда нам нужно запретить случайным точкам (гидрографам) пересекать значения Q , рав-

ные нулю, то есть при $Q = 0$ должна быть непроницаемая граница для этих точек:

$$q_3(Q, t) = 0 \quad \text{при} \quad Q = 0$$

или, учитывая (5) и (II),

$$U(0, t) f(0, t) - D \frac{\partial f}{\partial Q} \Big|_{Q=0} = 0. \quad (13)$$

Другим (верхним) граничным условием может быть выбрано

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} f(Q, t) = 0, \quad (14)$$

то есть плотность вероятности достаточно больших расходов равна нулю.

В качестве верхнего граничного условия можно установить также запрет случайным точкам (гидрографам) уходить за некоторую верхнюю достаточно большую границу $Q^*(t)$. Тогда обобщенная скорость точки на границе

$$V(Q^*, t) = \frac{dQ}{dt} \Big|_{Q=Q^*} - \frac{D(Q^*, t)}{f(Q^*, t)} \frac{\partial f}{\partial Q} \Big|_{Q=Q^*}$$

должна совпадать со скоростью движения границы

$$U^*(Q^*, t) = \frac{dQ^*}{dt},$$

что приводит к соотношению

$$U(Q^*, t) - \frac{D(Q^*, t)}{f(Q^*, t)} \frac{\partial f}{\partial Q} \Big|_{Q=Q^*} = U^*(Q^*, t) = \frac{dQ^*}{dt} \quad (15)$$

или

$$f(Q^*, t) U(Q^*, t) - D(Q^*, t) \frac{\partial f}{\partial Q} \Big|_{Q=Q^*} = f(Q^*, t) \frac{dQ^*}{dt}. \quad (16)$$

Перейдем к определению $dQ/dt = U(Q, t)$ и $D(Q, t)$.

Отметим здесь сразу, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q}{dt^2} &= \frac{dU(Q(t), t)}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial Q} \frac{dQ}{dt} = \\ &= \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial Q}. \end{aligned} \quad (17)$$

Величина dQ/dt может быть определена из какой-либо математической модели. Обычно математические модели гидрогра-

фа стока рек представляют собой, если ограничиться моделями с сосредоточенными параметрами, обыкновенные дифференциальные уравнения или их системы с соответствующими начальными условиями :

$$P\left(Q, \frac{dQ}{dt}, \dots, \frac{d^k Q}{dt^k}, Q_{II}, \frac{dQ_{II}}{dt}, \dots, \frac{d^m Q_{II}}{dt^m}\right) = 0.$$

Приведем несколько примеров математических моделей стока горных рек с сосредоточенными параметрами / 4, 6 /.

1. Однообъемная линейная модель трансформации

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{c}{\eta} Q = c Q_{II}. \quad (18)$$

Откуда

$$U(Q, t) = \frac{dQ}{dt} = c \left(Q_{II} - \frac{Q}{\eta} \right). \quad (19)$$

2. Двухобъемная линейная модель трансформации

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dQ}{dt} + \alpha_0 Q = \beta_1 \frac{dQ_{II}}{dt} + \beta_0 Q_{II}, \quad (20)$$

где

$$\alpha_1 = \left[\frac{c_1}{\eta_1} + \frac{c_2}{\eta_2} \right]; \quad \alpha_0 = \frac{c_1 c_2}{\eta_1 \eta_2}; \quad \beta_1 = c_1;$$

$$\beta_0 = c_1 c_2 (\eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2) / (\eta_1 \eta_2).$$

Параметры η_1 и η_2 представляют собой коэффициенты стока из первой и второй емкости, соответственно, а c_1 и c_2 - параметры, имеющие размерность, обратную времени, и характеризующие интенсивность истечения из этих областей. Все параметры положительные.

Из уравнения (20), согласно (17), для определения U получается дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial Q} + \alpha_1 U = \beta_1 \frac{dQ_{II}}{dt} + \beta_0 Q_{II} - \alpha_0 Q. \quad (21)$$

Правая часть дифференциального уравнения (20) является только функцией времени t , а правая часть (21) - функцией времени и расхода Q . Величина Q_{II} есть расход воды, поступающей на поверхность бассейна за счет таяния снега и льда, а

также дождевых осадков и зависит только от t . Из этого следует, что

$$\frac{d Q_{\Pi}}{d t} = \frac{\partial Q_{\Pi}}{\partial t}$$

и (21) запишется

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial Q} + \alpha_1 U = \beta_1 \frac{\partial Q_{\Pi}}{\partial t} + \beta_0 Q_{\Pi}(t) - \alpha_0 Q. \quad (22)$$

Решение уравнения (22) при условии

$$U(Q, 0) = \left. \frac{d Q}{d t} \right|_{t=0} = \text{const} \quad (23)$$

выражается в квадратурах, и мы приведем его в качестве примера. В общем случае дифференциальные уравнения в частных производных относительно $U(Q, t)$ решаются численно.

Система дифференциальных уравнений для характеристик (22) (22) будет следующей:

$$\frac{d t}{1} = \frac{d Q}{U} = \frac{d U}{\phi(t) - \alpha_0 Q - \alpha_1 U},$$

где

$$\phi(t) = \beta_1 \frac{\partial Q_{\Pi}}{\partial t} + \beta_0 Q_{\Pi}(t). \quad (24)$$

Объединяя первое и третье, первое и второе уравнения, получим

$$\begin{cases} \frac{d U}{d t} + \alpha_1 U = \phi(t) - \alpha_0 Q, \\ U = \frac{d Q}{d t}. \end{cases} \quad (25)$$

Из второго уравнения (25) следует

$$\frac{d U}{d t} = \frac{d^2 Q}{d t^2}. \quad (26)$$

Подставляя (26) в первое уравнение (25), найдем

$$\frac{d^2 Q}{d t^2} + \alpha_1 \frac{d Q}{d t} + \alpha_0 Q = \phi(t). \quad (27)$$

Корни характеристического уравнения (27)

$$k^2 + \alpha_1 k + \alpha_0 = 0$$

следующие:

$$k_1 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0} = -\frac{c_1}{\eta_1}, \quad (28)$$

$$k_2 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0} = -\frac{c_2}{\eta_2}. \quad (29)$$

Тогда

$$Q = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} + Y(t), \quad (30)$$

и согласно (25)

$$U = k_1 c_1 e^{k_1 t} + k_2 c_2 e^{k_2 t} + y(t), \quad (31)$$

где

$$Y(t) = \int_0^t \left[e^{k_2(t-\tau)} - e^{k_1(t-\tau)} \right] \frac{\phi(\tau)}{(k_2 - k_1)} d\tau, \quad (32)$$

и

$$y(t) = \frac{dP}{dt} = \int_0^t \left[k_2 e^{k_2(t-\tau)} - k_1 e^{k_1(t-\tau)} \right] \frac{\phi(\tau)}{(k_2 - k_1)} d\tau. \quad (33)$$

Теперь из (30) и (31) найдем c_1 и c_2 , то есть характеристики уравнений (25)

$$c_1 = \frac{e^{-k_1 t}}{(k_2 - k_1)} \left[k_2(Q - Y) - (U - y) \right], \quad (34)$$

$$c_2 = -\frac{e^{-k_2 t}}{(k_2 - k_1)} \left[k_1(Q - Y) - (U - y) \right]. \quad (35)$$

Запишем, наконец, выражения для c_1 и c_2 с учетом краевого (начального) условия (23) для $t = 0$. При $t = 0$ функции $Y(0) = 0$ и $y(0) = 0$, а $U(Q, 0) = dQ/dt|_{t=0} = \text{const}$. Тогда

$$c_1 = \frac{1}{(k_2 - k_1)} \left[k_2 Q - \frac{dQ}{dt} \Big|_{t=0} \right], \quad (36)$$

$$c_2 = -\frac{1}{(k_2 - k_1)} \left[k_1 Q - \frac{dQ}{dt} \Big|_{t=0} \right]. \quad (37)$$

Исключив из (36) и (37) переменную Q , найдем связь

между C_2 и C_1 :

$$C_2 = - \frac{1}{(k_2 - k_1)} \left[(k_2 - k_1) C_1 - \left(1 - \frac{k_1}{k_2} \right) \frac{dQ}{dt} \Big|_{t=0} \right] . \quad (38)$$

Чтобы найти функцию $U(Q, t)$, осталось подставить в (38) вместо C_1 и C_2 их выражения из (34) и (35) и решить (38) относительно U :

$$U(Q, t) = y(t) - \frac{a_0}{B} \frac{[Q - Y(t)] \operatorname{th}(Bt)}{\left[1 + \frac{a_1}{2B} \operatorname{th}(Bt) \right]} + \\ + \frac{e^{-\frac{a_1}{2} t}}{\operatorname{ch}(Bt) \left[1 + \frac{a_1}{2B} \operatorname{th}(Bt) \right]} \frac{dQ}{dt} \Big|_{t=0} , \quad (39)$$

где

$$B = \sqrt{\left(\frac{a_1}{2} \right)^2 - a_0} . \quad (40)$$

3. Нелинейные однообъемные модели трансформации:

$$A. \quad \frac{1}{n C} Q^{(1-n)/n} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{\eta} Q = Q_{\Pi} , \quad (41)$$

$$B. \quad \frac{1}{(1+2aQ)^{1/2}} \frac{dQ}{dt} + C_1 Q + \frac{C_{12}}{a} [(1+2aQ)^{1/2} - 1] = C_1 Q_{\Pi} . \quad (42)$$

Тогда

$$A. \quad U(Q, t) = \frac{n C}{Q^{(1-n)/n}} \left[Q_{\Pi} - \frac{1}{\eta} Q \right] , \quad (43)$$

$$B. \quad U(Q, t) = (1+2aQ)^{1/2} \left[C_1 (Q_{\Pi} - Q) - \frac{C_{12}}{a} [(1+2aQ)^{1/2} - 1] \right] . \quad (44)$$

4. Нелинейные двухобъемные модели трансформации:

$$A. \quad \left[\frac{1}{2\sqrt{C_1} \sqrt{Q_1}} \frac{dQ_1}{dt} + Q_1 + \frac{C_{12}}{\sqrt{C_1}} \sqrt{Q_1} \right] = Q_{\Pi} ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\sqrt{c_2} \sqrt{Q_2}} \frac{d Q_2}{d t} + Q_2 + \frac{c_{23}}{\sqrt{c_2}} \sqrt{Q_2} = \frac{c_{12}}{\sqrt{c_1}} \sqrt{Q_1}, \\ Q = Q_1 + Q_2. \end{array} \right. \quad (45)$$

$$\text{В.} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(1+2a_1 Q_1)^{1/2}} \frac{d Q_1}{d t} + c_1 Q_1 + \frac{c_{12}}{a_1} [(1+2a_1 Q_1)^{1/2} - 1] = c_1 Q_{II}, \\ \frac{1}{(1+2a_2 Q_2)^{1/2}} \frac{d Q_2}{d t} + c_2 Q_2 + \frac{c_{23}}{a_2} [(1+2a_2 Q_2)^{1/2} - 1] = \\ = \frac{c_{12}}{c_1 a_1} [(1+2a_1 Q_1)^{1/2} - 1], \\ Q = Q_1 + Q_2. \end{array} \right. \quad (46)$$

Из последнего равенства (46) следует, что

$$\frac{d Q}{d t} = \frac{d Q_1}{d t} + \frac{d Q_2}{d t} \quad \text{или} \quad U = U_1 + U_2. \quad (47)$$

Покажем путь, следуя которому можно получить из (46) и (47) одно дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка относительно $U(Q, t)$.

Решим первое и второе уравнение (46) относительно U_1 и U_2 , т.е. относительно $d Q_1 / d t$ и $d Q_2 / d t$. Пусть $U_1 = f_1(Q_1, Q_{II})$; $U_2 = f_2(Q_1, Q_2)$. Из последнего равенства (46) и равенства (47) найдем U_2 и Q_2 :

$$U_2 = U - U_1; \quad Q_2 = Q - Q_1.$$

Подставим их в выражение для U_2 и решим это выражение относительно U_1

$$U_1 = U - f_2(Q_1, Q - Q_1).$$

Приравняем $f_1(Q_1, Q_{II})$ полученному выражению

$$f_1(Q_1, Q_{II}) = U - f_2(Q_1, Q - Q_1). \quad (48)$$

Решим (48) относительно Q_1

$$Q_1 = \Phi^*(U, Q, Q_{II}), \quad (49)$$

и подставим это решение в первое уравнение, учитывая, что

$$U = U(Q, t),$$

$$\frac{d Q_1}{d t} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial U} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial Q} \right) + \\ + U \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q} + \frac{\partial Q_{II}}{\partial t} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_{II}} \quad (50)$$

Тогда

$$\frac{1}{(1+2a_1\Phi^*)^{1/2}} \left[\frac{\partial \Phi^*}{\partial U} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial Q} \right) + U \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q} + \right. \\ \left. + \frac{\partial Q_{II}}{\partial t} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_{II}} \right] + C_1 \Phi^* + \frac{C_{12}}{a_1} [(1+2a_1\Phi^*)^{1/2} - 1] = C_1 Q_{II} \quad (51)$$

Перейдем к определению коэффициента диффузии D . Как уже отмечалось, размерность этого коэффициента равна квадрату расхода, деленному на время. Этой размерности удовлетворяет величина $Q \left| \frac{dQ}{dt} \right|$ или же $\sigma_a \left| \frac{dQ}{dt} \right|$, где σ_a - среднеквадратическая ошибка измерения расходов. Модуль производной взят потому, что $D \geq 0$. Однако мы имеем два вида расходов: Q - расход воды в створе реки и Q_{II} - расход воды, поступающей на поверхность бассейна. Также имеем два вида среднеквадратической погрешности расходов - в створе реки σ_a и поступающего на поверхность водосбора σ_{an} . Ясно, что коэффициент диффузии должен как-то зависеть от погрешностей измерения расходов воды, погрешностей расчета поступления ее на поверхность водосбора и от адекватности самой модели рассматриваемому процессу (последнее будет сказываться на величине D_0). Поэтому за основу построения формулы для расчета D мы должны взять структуру $\sigma_a \left| \frac{dQ}{dt} \right|$. В связи со сказанным величина D может быть выражена следующим образом:

$$D = D_0 + K_d \left[\sigma_a \left| \frac{d Q}{d t} \right| + \sigma_a \left| \frac{d Q_{II}}{d t} \right| + \sigma_{an} \left| \frac{d Q}{d t} \right| + \right. \\ \left. + \sigma_{an} \left| \frac{d Q_{II}}{d t} \right| \right] \quad (52)$$

или

$$D = D_0 + K_d (\sigma_a + \sigma_{an}) \left[\left| \frac{d Q}{d t} \right| + \left| \frac{d Q_{II}}{d t} \right| \right] \quad (53)$$

где K_d - безразмерный коэффициент пропорциональности, опре-

деляемый путем оптимизации, исходя из условия совпадения объема гидрографа, рассчитанного по какой-либо модели трансформации ((18), (20), (41), (42), (45), (46)) и объема гидрографа, полученного как математические ожидания расходов воды с помощью рассчитанных значений плотности вероятности $f(Q, t)$. Тот факт, что математические ожидания расходов воды будут зависеть от K_d , можно понять из следующих рассуждений. Качественно ясно, что чем больше коэффициент диффузии $D(Q, t)$, то есть чем больше при прочих равных условиях K_d , тем должна быть больше дисперсия расходов $\sigma_a^2(t)$, а при ограниченном снизу значении случайной величины, в нашем случае $Q \geq 0$, с ростом дисперсии может увеличиваться и ее среднее значение. В этих условиях среднее значение $Q(t)$ будет стохастически возрастающе связано с K_d . Численные эксперименты показывают, что так оно и происходит, и величина K_d в первом приближении может быть принята равной 0,10.

Если ввести в рассмотрение относительные погрешности $\varepsilon_a = \sigma_a / Q$ и $\varepsilon_{an} = \sigma_{an} / Q_n$, то

$$D = D_0 + K_d (\varepsilon_a Q + \varepsilon_{an} Q_n) \left(\left| \frac{dQ}{dt} \right| + \left| \frac{dQ_n}{dt} \right| \right) \quad (54)$$

и (54) совпадает по структуре с вариантом $Q |dQ/dt|$.

Фоновое значение коэффициента диффузии D_0 в первом приближении может быть принято либо равным нулю (для хороших моделей), либо среднему значению из других членов равенства (52), умноженному на K_d , либо определено путем оптимизации.

Описанный способ построения стохастико-детерминированных моделей легко обобщается на случай нахождения совместных многомерных безусловных распределений некоторых величин в их фазовом пространстве.

Если $\hat{R}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ есть вектор координат точки рассматриваемого фазового пространства, а $f(x_1, x_2, \dots, x_p; t) = f(\hat{R}; t)$ — плотность безусловной вероятности их совместного распределения в момент времени t , то для этого случая

$$\hat{Q}_B = \frac{d\hat{R}}{dt} f - D \text{ Grad } f, \quad (55)$$

где D — есть симметричный тензор диффузии, компоненты которого

го имеют размерность $x_1 x_j / t$.

Аналогом дифференциального уравнения (10) будет

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \text{Div} \left[D \text{Grad} f - \frac{dR}{dt} f \right]. \quad (56)$$

Здесь операторы Div и Grad вычисляются в указанном фазовом пространстве. Вектор dR/dt рассчитывается на основе соответствующей математической модели, а тензор диффузии — путем обобщения изложенного одномерного подхода.

Приведенное обобщение рассмотренного метода на многомерное совместное распределение может быть эффективно использовано в гидрологических моделях, когда не удастся свести систему дифференциальных уравнений для двухобъемной (многообъемной) схемы трансформации к одному уравнению относительно Q более высокого порядка. Это происходит, когда становится невозможным решить уравнение (48) относительно Q_1 .

В данном случае будем искать безусловное совместное распределение Q_1 и Q_2 для момента времени t , то есть двумерную плотность распределения $\theta(Q_1, Q_2, t)$. А так как $Q = Q_1 + Q_2$, то одномерная функция распределения расхода Q выразится через $\theta(Q_1, Q_2, t)$ следующим образом:

$$F(Q, t) = \int_0^Q dQ_1 \int_0^{Q-Q_1} \theta(Q_1, Q_2, t) dQ_2, \quad (57)$$

а плотность $f(Q, t)$

$$\begin{aligned} f(Q, t) &= \frac{\partial F(Q, t)}{\partial Q} = \int_0^Q \theta(Q_1, Q - Q_1, t) dQ_1 = \\ &= \int_0^Q \theta(Q - Q_2, Q_2, t) dQ_2. \end{aligned} \quad (58)$$

Для функции θ будем иметь следующее дифференциальное уравнение в координатной форме:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Q_1} \left[D_{11} \frac{\partial \theta}{\partial Q_1} + D_{12} \frac{\partial \theta}{\partial Q_2} \right] + \frac{\partial}{\partial Q_2} \left[D_{21} \frac{\partial \theta}{\partial Q_1} + \right.$$

$$+ D_{22} \frac{\partial \theta}{\partial Q_2} \Big] - \frac{\partial}{\partial Q_1} \left[U_1 \theta \right] - \frac{\partial}{\partial Q_2} \left[U_2 \theta \right], \quad (59)$$

где D_{1j} есть компоненты тензора диффузии $\hat{D}$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}, \quad (60)$$

а U_1 и U_2 есть составляющие скорости $\vec{U}(Q_1, Q_2, t)$

$$\begin{aligned} \vec{U} &= u_1(Q_1, Q_2, t) \vec{e}_1 + u_2(Q_1, Q_2, t) \vec{e}_2 = \\ &= \frac{d Q_1}{d t} \vec{e}_1 + \frac{d Q_2}{d t} \vec{e}_2, \end{aligned} \quad (61)$$

которые определяются с помощью моделей трансформации.

Теперь нам осталось записать начальные и граничные условия, а также выражения для D_{11} , D_{12} , D_{21} , D_{22} .

Начальное условие

$$\theta(Q_1, Q_2, 0) = \theta(Q_1, Q_2). \quad (62)$$

Граничные условия заключаются в том, что линии $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$ и $Q_1 + Q_2 = Q^*(t)$ являются непроницаемыми для потока случайных точек гидрографа (последняя линия подвижная). Это приводит к следующим соотношениям:

$$\left[\theta U_1 - D_{11} \frac{\partial \theta}{\partial Q_1} - D_{12} \frac{\partial \theta}{\partial Q_2} \right] \Big|_{Q_1=0} = 0, \quad (63)$$

$$\left[\theta U_2 - D_{21} \frac{\partial \theta}{\partial Q_1} - D_{22} \frac{\partial \theta}{\partial Q_2} \right] \Big|_{Q_2=0} = 0, \quad (64)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}}{2} \left[(U_1 + U_2) - (D_{11} + D_{21}) \frac{\partial \theta}{\partial Q_1} - \right. \\ &\left. - (D_{12} + D_{22}) \frac{\partial \theta}{\partial Q_2} \right] \Big|_{Q_2=Q^*(t)-Q_1} = \frac{d Q^*}{d t}. \end{aligned} \quad (65)$$

Наконец, компоненты тензора диффузии будут следующими:

$$D_{11} = K_{d1} (\varepsilon_a Q_1 + \varepsilon_{an} Q_n) \left[\left| \frac{d Q_1}{d t} \right| + \left| \frac{d Q_n}{d t} \right| \right], \quad (66)$$

$$D_{22} = K_{d2} (\varepsilon_a Q_2 + \varepsilon_{an} Q_{12}) \left[\left| \frac{d Q_2}{d t} \right| + \left| \frac{d Q_{12}}{d t} \right| \right], \quad (67)$$

$$D_{12} = D_{21} = 0. \quad (68)$$

Расход воды Q_{12} выражается через Q_1 и вид этой связи оп-

разделяется соответствующей моделью трансформации.

Численный расчет плотности вероятностей $f(Q, t)$ может быть осуществлен с помощью метода прогонки. Этот расчет можно существенно облегчить, если в уравнении (10) сделать замену переменных

$$P = \frac{Q}{Q_S(t)} - 1, \quad \eta = t, \quad (69)$$

где $Q_S(t)$ - расход воды, рассчитанный по выбранной модели трансформации. При этом

$$\frac{\partial f}{\partial Q} = \frac{1}{Q_S(\eta)} \frac{\partial f}{\partial P}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial Q^2} = -\frac{1}{Q_S^2(\eta)} \frac{\partial^2 f}{\partial P^2}; \quad (70)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{(1+P)}{Q_S(\eta)} \frac{\partial Q_S}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial P}; \quad (71)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{Q_S(\eta)} \frac{\partial U}{\partial P}; \quad \frac{\partial D}{\partial Q} = \frac{1}{Q_S(\eta)} \frac{\partial D}{\partial P}. \quad (72)$$

Далее примем, что

$$Q^*(\eta) = N_a Q_S(\eta), \quad (73)$$

где $N_a \geq 4$ - целое число. Тогда наибольшее значение $p = p^*$ с учетом (69) будет постоянной величиной для всех значений t или η , равной $N_a - 1$, то есть

$$p^* = N_a - 1. \quad (74)$$

Это значит, что верхнее граничное условие в новых переменных не будет меняться во времени, чем и достигается желаемое упрощение.

Функция f в новых переменных p и η теряет свойство плотности вероятности. Чтобы сохранились ее свойства нужно $f(p, \eta)$ умножить на $Q_S(\eta)$. Эту новую плотность вероятности мы обозначим через $\zeta(p, \eta)$:

$$\zeta(p, \eta) = f(p, \eta) Q_S(\eta). \quad (75)$$

В приведенной ниже таблице показаны результаты расчетов по изложенной методике статистических характеристик среднедекадных расходов воды реки Ахангаран створ Турк за 1960 год с использованием однообъемной нелинейной модели трансформации, описываемой дифференциальным уравнением (42).

Результаты расчета среднедекадных расходов воды и $\text{м}^3/\text{с}$,
 р. Ахангаран (створ Турк) за 1980 год по детерми-
 нированной и стохастико-детерминированной модели

Месяц	Дека- да	детер- миниро- ванная	Стохастико-детерминированная			
			среднее	мода	сигма	асимметрия
1	1	6,65	6,65	6,65	0,10	0,00
	2	5,89	5,96	5,89	0,69	0,61
	3	5,15	5,15	5,15	0,62	0,55
2	1	5,61	4,75	5,33	1,32	0,00
	2	6,83	6,29	6,15	2,28	0,88
	3	8,45	7,34	7,19	3,04	0,87
3	1	10,8	9,61	9,72	3,34	0,74
	2	10,8	11,9	10,8	7,05	0,82
	3	9,17	9,75	9,17	6,16	0,70
4	1	8,08	8,16	7,68	4,84	0,71
	2	9,41	7,92	7,06	4,14	0,93
	3	20,5	16,5	9,20	4,98	2,10
5	1	35,7	36,5	26,8	13,9	1,47
	2	64,9	53,4	38,9	20,2	1,61
	3	94,8	96,5	90,1	38,1	0,99
6	1	122	112	109	43,1	0,90
	2	132	140	152	53,2	0,00
	3	122	130	140	43,7	0,00
7	1	100	111	115	35,3	0,00
	2	76,3	80,4	83,9	24,7	0,00
	3	58,0	56,6	58,0	17,0	0,00
8	1	45,2	42,0	40,6	11,0	0,00
	2	35,4	32,1	31,8	7,64	0,00
	3	28,1	24,5	23,9	5,61	0,00
9	1	23,4	19,5	19,9	4,30	0,00
	2	22,2	17,2	17,7	4,30	0,00
	3	22,3	18,4	19,0	4,31	0,00
10	1	19,8	18,6	17,8	6,98	0,61
	2	16,7	14,9	14,2	5,39	0,60
	3	16,9	13,4	13,5	4,94	0,56
11	1	17,2	15,8	14,7	7,00	0,71
	2	15,2	14,6	14,4	6,85	0,53
	3	13,0	12,0	11,7	5,52	0,48
12	1	11,3	10,4	10,2	4,38	0,41
	2	9,76	8,96	8,79	3,64	0,25
	3	8,37	7,57	7,53	2,98	0,00
Сумма сред- недекадных расходов		1225	1192	1177		

Список литературы

1. Денисов К. М., Волькович В. Э. Метод построения стохастико-детерминированных математических моделей стока рек // Тр. ВНИИСИ. - 1990. - № 9. - С. 42 - 48.
2. Баруча - Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. - М.: Наука, 1969. - 511 с.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. - М.: Наука, 1965. - 654 с.
4. Денисов К. М. Функция распределения отдельных образований фитоэлементов по их основным параметрам // Тр. САНИГМИ. - 1989. - Вып. 103 (184). - С. 3 - 20.
5. Денисов К. М. Схема расчета гидрографа стока горных рек. - Л.: Гидрометеоиздат, 1965. - 103 с.
6. Математическое моделирование процесса стока горных рек / Л. Н. Боровикова, К. М. Денисов, Е. Б. Трофимова, И. Д. Шенцис // Тр. САНИГМИ. - 1972. - Вып. 61 (76). - 151 с.

МЕТОД ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ СРЕДНЕГОДОВЫХ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ РАСХОДОВ ВОДЫ ДЛЯ РЕК С ИНТЕНСИВНЫМ ХОЗЯЙСТВЕННЫМ ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВОДНЫХ РЕСУРСОВ

К настоящему времени уже достаточно большое количество рек подвержено хозяйственному использованию, и применение для них существующих методов гидрологических расчетов вызывает большие затруднения. Основным способом расчетов пока является метод восстановления естественного стока и определения его статистических характеристик. Однако такой подход, по существу, уводит в сторону от правильного решения проблемы.

В результате нарастающего хозяйственного использования водных ресурсов меняется комплекс условий, определяющий статистические свойства речного стока, и многие статистические понятия, бытующие в гидрологии, теряют свой смысл. Например, что понимать в таких условиях под нормой стока? Как оценивать в сложившейся ситуации изменчивость гидрологических характеристик и т.д.? Ясно, что оставаясь в рамках прежних (классических) позиций, в гидрологических расчетах нельзя адекватно статистически описать поведение гидрологических объектов в условиях интенсивного их использования.

Путь преодоления этих трудностей лежит в использовании таких понятий, как статистические ансамбли, случайные последовательности и процессы. Они позволяют сделать обобщения используемых статистических характеристик и расширить область их применения. В частном случае стационарных независимых последовательностей эти обобщенные характеристики будут совпадать с обычно принятыми.

Естественный годовой сток горных рек, как правило, представляет собой стационарную последовательность Маркова с незначительной внутрирядной связью соседних лет, коэффициенты корреляции которой находятся в пределах их средней квадратической погрешности вычисления. Моменты распределения такой последовательности, математическое ожидание и дисперсия не

зависят от времени, а ковариационная функция зависит только от разности времен. В такой ситуации безусловная вероятность (обеспеченность) $P(Q;t)$ превышения в данном конкретном году (допустим в 1988 г.) среднегодового расхода воды Q равносильна утверждению, что среднегодовой расход, больший или равный Q , в среднем будет встречаться в последовательности один раз за $1 / P(Q)$ лет.

Это привело к тому, что стационарные случайные последовательности со слабой междурядной связью рассматривались в гидрологии, по существу, как случайные величины.

Ситуация резко меняется, когда последовательность перестает быть стационарной. Например, при естественном стоке из реки происходит водозабор для полива сельхозкультур, когда орошаемые площади от года к году увеличиваются. В таких условиях вопрос о вероятности превышения данного расхода воды Q должен быть согласован со временем, то есть с годом для которого оценивается эта вероятность. Здесь уже нельзя утверждать, что эта вероятность равносильна повторению данного события один раз в $1 / P(Q)$ лет. Из сказанного ясно, что безусловные функции распределения среднегодовых расходов воды должны зависеть от времени (номера года). Такая ситуация для гидрологов необычна, и мы приведем пример, поясняющий суть дела.

Рассмотрим по возможности самую простейшую ситуацию. Пусть Q_1 , где 1 - номер года, есть естественная стационарная последовательность среднегодовых расходов воды с математическим ожиданием Q , дисперсией σ_Q^2 и корреляционной функцией $r_Q(|1 - j|)$. Эти моменты распределения в силу указанных свойств последовательности не зависят от времени и одинаковы для любого года.

Обозначим через Q_{v1} - среднегодовой расход воды в 1 -ом году, забираемый из реки на орошение. Последовательность расходов воды Q_{v1} в простейшем случае будем считать не случайной (детерминированной), причем такой, что выполняется условие $Q_1 - Q_{v1} > 0$.

Кроме того, расходы воды, забираемой на орошение, не остаются постоянными, а меняются от года к году.

Введем в рассмотрение случайную последовательность Q_{s1} , представляющую собой расходы воды в реке ниже водозабора :

$$Q_{s1} = Q_1 - Q_{v1} .$$

Математическое ожидание этой последовательности равно

$$Q_{s1} = Q - Q_{v1}$$

и, как видно из этого выражения, изменяется во времени (зависит от 1).

Дисперсия и корреляционная функция останутся прежними, так как случайная последовательность Q_{s1} получена путем вычитания неслучайных величин Q_{v1} из последовательности Q_1 . Коэффициент вариации последовательности Q_{s1} равен :

$$C_{vs1} = \sigma_Q / (Q - Q_{v1}),$$

и, как видно из приведенного выражения, меняется во времени.

Таким образом, полученная последовательность Q_{s1} из-за непостоянства по годам водозабора Q_{v1} становится нестационарной.

Если принять какое-либо предположение относительно коэффициента асимметрии C_{ss1} , например,

$$C_{ss1} = K C_{vs1} ,$$

где K — безразмерный коэффициент пропорциональности (например, $K = 2$), и считать, что закон распределения Q_{s1} подчиняется, допустим, гамма-распределению, то по трем параметрам Q_{s1} , C_{vs1} и C_{ss1} можно получить для каждого 1 - го года кривые обеспеченности $P_1(Q_{s1})$. Ясно, что для различных лет эти кривые будут различными. Кроме того, в общем случае последовательность Q_{v1} следует считать случайной и нестационарной. Нестационарной последовательностью может оказаться также и естественный сток.

Наибольшая трудность в решении этой проблемы с позиций нестационарных случайных процессов и последовательностей состоит в том, что у гидрологов, климатологов и других естественных испытателей, как правило, отсутствует ансамбль реализаций такого процесса. Они имеют только одну реализацию, например среднегодовых расходов воды в каком-то створе. И по этой единственной реализации нужно получить оценки статистических параметров

ров случайной последовательности и выяснить их изменения во времени – тренды. В этом состоит нетривиальность поставленной задачи. Ее решение может быть использовано не только в гидрологии, но и в других науках, связанных с оценкой трендов.

Тренд среднего и дисперсия

Как правило, описание статистических свойств случайного процесса или последовательности проводится на основе множества его реализаций (ансамбля), полученных при одном и том же комплексе условий. Однако в гидрологии такого множества реализаций получить не удастся и приходится оценивать статистические характеристики нестационарной гидрологической последовательности по одной ее реализации. Это делается в настоящее время путем использования скользящего осреднения. Для получения достоверных оценок в этом случае возникают два противоречивых требования: чтобы статистические параметры были более устойчивыми, необходимо брать скользящий интервал осреднения T_s по возможности более продолжительным; а чтобы выявляемый тренд не был "размыт" длительным осреднением, нужно время осреднения брать по возможности коротким. Решение задачи оптимального выбора T_s было получено В.С. Пугачевым [1, 2]. Оптимальное значение времени осреднения, которое мы обозначим через T_{so} , равно

$$T_{so} = \left[\frac{288 D_y T_y}{\partial^2 M(t) / \partial t^2} \right]^{1/5}, \quad (1)$$

где D_y – дисперсия случайного процесса $Y(t)$, $M(t)$ – математическое ожидание этого процесса, T_y – характерное время связи.

$$T_y = \int_0^{\infty} r(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где $r(\tau)$ – корреляционная функция случайного процесса $Y(t)$.

Возможен другой путь нахождения статистических характеристик случайных нестационарных процессов. Его основой является следующее утверждение: средний квадрат отклонений случайной величины Y от некоторой величины A будет минималь-

ным, если A совпадает с математическим ожиданием Y , то есть математическое ожидание $m_y(t)$ определяется из условия

$$M [Y(t) - m_y(t)]^2 = S(t) \rightarrow \min. \quad (3)$$

Как не трудно понять, величина $S(t) = S_{\min}(t)$ есть дисперсия случайного процесса $D(t)$.

Пусть задана единичная реализация случайной последовательности $Y_1 = Y(t_1)$, где 1 меняется от 0 до N . Представим математическое ожидание $Y_1 = m_y(t_1)$ суммой p функций (элементарно ортогональных) вида $a_j \varphi_j(t_1)$:

$$Y_1 = \sum_{j=0}^{j=p} a_j \varphi_j(t_1). \quad (4)$$

Запишем (3) с учетом (4) и сделанных высказываний

$$S_p(\hat{a}) = \frac{1}{N} \sum_{1=0}^{1=N} \left\{ Y_1 - \sum_{j=0}^{j=p} a_j \varphi_j(t_1) \right\}^2 \rightarrow \min. \quad (5)$$

При заданных функциях φ_j коэффициенты a_j найдутся из системы $p+1$ уравнений

$$\partial S_p / \partial a_j = 0 \quad \text{при } j = 0, 1, \dots, p. \quad (6)$$

Для полного решения проблемы осталось выяснить, какую величину должно иметь число p , то есть сколько членов ряда нужно брать в выражениях (4) и (5). Как видим, вместо нахождения T_3 при скользящем осреднении в новой постановке задачи приходится определять величину p . Отметим, что данная постановка задачи имеет некоторые преимущества перед скользящим осреднением хотя бы в том, что при ней не теряется информация на полуинтервалах осреднения в начале и в конце ряда. Кроме того, вторая производная по времени от еще неизвестного математического ожидания в формуле (1) существенно осложняет итерационный путь нахождения тренда математического ожидания при скользящем осреднении.

Способ нахождения числа p связан с введением так называемой структурной функции $B_y(t_1, t_k)$, впервые предложенной А.Н. Колмогоровым в 1941 году [3], и средней дисперсией случайной последовательности D_{yS} . Эта дисперсия равна

$$D_{ys} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{1=N} (Y_i - \bar{Y})^2, \quad (7)$$

а структурная функция имеет выражение

$$B_y(t_1, t_k) = M [Y(t_1) - Y(t_k)]^2. \quad (8)$$

Здесь символ M — означает математическое ожидание.

Нас будет интересовать структурная функция с разницей между i и k в единицу. При наличии только одной реализации оценка такой структурной функции будет:

$$B_y(t_{i+1}, t_i) = B_y(1) = \sum_{i=0}^{1=N-1} \frac{(t_{i+1} - t_i)}{(t_N - t_0)} [Y(t_{i+1}) - Y(t_i)]^2. \quad (9)$$

Для равноотстоящих значений $t_i = i \Delta t$ выражение (9) запишется

$$B_y(1) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{1=N-1} (Y_{i+1} - Y_i)^2. \quad (10)$$

Раскрывая выражения (9) или (10), после несложных преобразований с учетом основной теоремы линейной множественной корреляции Г.А. Алексеева / 4 /, получим

$$B_y(1) = 2 D_{ys} [1 - r_y(1)] + \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{1=N-1} (Y_{i+1} - Y_i)^2 - \frac{1}{N} \left[(Y_0 - \bar{Y}_0)^2 + (Y_N - \bar{Y}_N)^2 \right], \quad (11)$$

где $r_y(1)$ — корреляционная функция случайной последовательности Y_i с шагом 1.

Из (11) найдем D_{ys} :

$$D_{ys} = \frac{1}{2[1 - r_y(1)]} \left\{ B_y(1) - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{1=N-1} (Y_{i+1} - Y_i)^2 + \frac{1}{N} \left[(Y_0 - \bar{Y}_0)^2 + (Y_N - \bar{Y}_N)^2 \right] \right\}. \quad (12)$$

Здесь $B_y(1)$ вычисляется по формуле (9) или (10).

Сравнивая (7) и (5) с учетом (4), мы можем сказать,

что если выражение (4) действительно является математическим ожиданием случайной последовательности Y_1 , то в выражении (5) величина $S_p(\hat{a})$ должна быть равна средней дисперсии случайного процесса D_{y_3} , рассчитанному по формуле (12):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{1=N} \left\{ Y_1 - \sum_{j=0}^{j=p} a_j \varphi_j(t_1) \right\}^2 = \\ & = \frac{1}{2 \pi (1 - r_y(1))} \left\{ B_y(1) - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{1=N-1} (Y_{1+1} - Y_1)^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{N} \{ (Y_0 - Y_0)^2 + (Y_N - Y_N)^2 \} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнение (13) при выполнении (6) дает возможность нахождения величины p путем перебора, начиная с нуля и кончая величиной не более $N/2$. Правда, в это уравнение входят неизвестные, искомые нами средние значения Y_1 . Будем решать уравнение (13) итерационным методом. За начальное приближение Y_1^0 примем следующие их значения.

Для $1 \leq i \leq N-1$

$$Y_1^0 = \frac{1}{4} (Y_{1+1} + 2 Y_1 + Y_{1-1}). \quad (14)$$

Для $i = 0$

$$Y_0^0 = \frac{1}{2} (Y_0 + Y_1). \quad (15)$$

Для $i = N$

$$Y_N^0 = \frac{1}{2} (Y_{N-1} + Y_N). \quad (16)$$

Коэффициент корреляции $r_y(1)$ равен / 5 / :

$$r_y(1) = \frac{R_y(1)}{\left[D_0(1) \cdot D_N(1) \right]^{1/2}}, \quad (17)$$

где

$$R_y(1) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{1=N-1} (Y_1 - Y_1) (Y_{1+1} - Y_{1+1}); \quad (18)$$

$$D_0(1) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{1=N-1} (Y_1 - Y_1)^2 ; \quad (19)$$

$$D_n(1) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{1=N-1} (Y_{1+1} - Y_{1+1}) . \quad (20)$$

Для расчета величины p полезно ввести функцию $\Phi(p)$, определяемую равенством

$$\Phi(p) = S_p(\hat{A}) - D_{vs} . \quad (21)$$

Пусть p_0 будет таким значением p , при котором $\Phi(p_0) > 0$ и $\Phi(p_0+1) \leq 0$. Тогда искомое значение $p = p_m$ будет соответствовать тому значению p из p_0 и p_0+1 которое дает минимум из модуля двух величин $|\Phi(p_0)|$ и $|\Phi(p_0+1)|$.

Теперь опишем порядок итерационных вычислений тренда случайной последовательности Y_1 .

1. По исходным данным о Y_1 и формулам (14), (15) и (16) вычисляется нулевое приближение тренда Y_1^0 .

2. По формулам (20), (19), (18) и (17) вычисляется нулевое приближение $r_y^0(1)$, а по (9) или (10) — $B^0(1)$.

3. Теперь по известным Y_1^0 , $r_y^0(1)$ и $B^0(1)$ вычисляется начальное приближение D_{vs}^0 .

4. По принятому виду функций ϕ_j (лучше всего принять для них полиномы Чебышева) с помощью равенств (5) и (6) для последовательных значений $p = 0, 1, 2, \dots$ и т.д., но не более $N/2$, вычисляются значения a_j , $S(\hat{A})$ и $\Phi(p)$ и находится значение $p = p_m$ по минимуму $|\Phi(p_0)|$ и $|\Phi(p_0+1)|$.

5. С помощью равенств (5) и (6) для данного $p = p_m$ определяются a_j , и при принятых функциях ϕ_j по формуле (4) вычисляется следующее приближение тренда Y_1^1 .

6. Задается максимальная допустимая погрешность ε_{ym} расчета Y_1 (для $Y_1 > 0$ эту погрешность следует брать относительной). Если максимальное отклонение Y_1^1 от Y_1^0 будет больше допустимого, то расчет повторяется, начиная с пункта 2,

с начальными значениями Y_1 , равными Y_1^1 . В противном случае найденные значения Y_1^k следует принять за окончательные – трендовые.

Тренд дисперсии $D_Y(t_1) = D_{Y1}$ находится также изложенным здесь методом и эквивалентен тренду (математическому ожиданию) следующей последовательности:

$$Z(t_1) = Z_1 = \frac{N+1}{N} (Y_1 - Y_1^1)^2 \quad \text{для } 1 = 0, 1, \dots, N, \quad (22)$$

то есть

$$D_{Y1} = Z_1. \quad (23)$$

Аналогичным образом вычисляется тренд ковариационной функции $R_1(L)$ путем введения случайной последовательности

$$S(t_1, L) = S_1(L) = \frac{N+1}{N} (Y_1 - Y_1^1)(Y_{1+L} - Y_{1+L}^1). \quad (24)$$

Математическое ожидание этой последовательности, определенное вышеизложенным способом, даст годовой тренд ковариационной функции $R_1(L)$:

$$R_1(L) = S_1(L). \quad (25)$$

При $L = 0$ из (25) получаем тренд дисперсии $D_{Y1} = S_1(0)$.

Из-за погрешностей в исходных данных, а также ограниченной длительности рядов наблюдений, рассчитанный тренд дисперсии может иногда уйти в отрицательную область. В таком случае приходится принимать специальные меры или считать дисперсию равной нулю.

При расчете математических ожиданий, дисперсий, ковариаций и других статистических параметров возникают ошибки в их нахождении из-за ограниченности ряда наблюдений и погрешностей самих наблюдений (измерений). Последние бывают двух видов – систематические, обусловленные постоянными ошибками приборов или методов измерения, и случайные – математическое ожидание и ковариация которых для i , не равных j , равны нулю. Здесь мы будем рассматривать только случайные ошибки, которые обозначим через Δ_{1k} , где k – номер реализации случайной последовательности (номер реализации в ансамбле).

Математическое ожидание величины Y_{1k} при наличии случайной погрешности Δ_{1k} равно математическому ожиданию этой величины Y_1 при отсутствии погрешности, так как математическое ожидание случайной погрешности равно нулю.

Приведенный выше способ нахождения p_m справедлив, если нет ошибок в расчете величин S_p и D_{ys} , то есть $\Delta S_p = 0$ и $\Delta D_{ys} = 0$. При их наличии появится также ошибка у $\Phi(p)$, равная $\Delta\Phi(p)$. Обозначим через $D_{\Delta\Phi}$ дисперсию ошибки $\Phi(p)$.

Правилом для определения p_m в этих новых условиях является следующее.

Пусть p_0 будет таким значением p , при котором $\Phi(p_0) > D_{\Delta\Phi}^{1/2}$ и $\Phi(p_0+1) \leq D_{\Delta\Phi}^{1/2}$. Тогда искомое значение $p = p_m$ будет соответствовать тому значению p из p_0 и p_0+1 , которое дает минимум из модуля двух величин $|\Phi(p_0)|$ и $|\Phi(p_0+1)|$.

Учет погрешностей в расчете $\Phi(p)$, как правило, уменьшает величину p_m , что приводит к существенной стабилизации в поисках нужного числа слагаемых в формуле (4).

Вопрос расчета величины $D_{\Delta\Phi}$ оказывается достаточно сложным и является предметом дальнейших исследований.

Приближенный учет влияния погрешностей измерения (определения) величин Y_{1k} на результат расчета тренда может быть осуществлен путем введения в формулу (13) дисперсии погрешности структурной функции $B(1)$, которая, как можно показать, равна

$$D_{\Delta B} = 2 \left(1 - \frac{1}{N} \right) D_A, \quad (26)$$

где $D_{\Delta B}$ - дисперсия погрешности структурной функции, а D_A - дисперсия величин Δ_{1k} .

Если α_{1k} - относительная погрешность Y_{1k} , то

$$\Delta_{1k} = \alpha_{1k} Y_{1k},$$

$$D_A = M (\alpha_{1k} Y_{1k})^2 = D_\alpha (Y_g^2 + D_{Y_g}). \quad (27)$$

Здесь D_α - дисперсия относительной погрешности, Y_g - генеральная средняя случайной последовательности.

$$Y_g = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N Y_i, \quad (28)$$

D_{Y_g} - генеральная дисперсия

$$D_{Y_g} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (Y_i - Y_g)^2. \quad (29)$$

Теперь формула (13), если учитывать относительную погрешность, запишется:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{1=N} \left(Y_i - \sum_{j=0}^{J=P} a_j \varphi_j(t_1) \right)^2 = \\ & = \frac{1}{2 \pi \sqrt{1 - r_y(1)}} \left(B_y(1) + 2 \left(1 - \frac{1}{N} \right) D_{\alpha} (Y_g^2 + D_{Y_g}) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{1=N-1} (Y_{i+1} - Y_i)^2 + \frac{1}{N} [(Y_0 - Y_0)^2 + \right. \\ & \left. + (Y_N - Y_N)^2] \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Выбор базисных функций и определение оптимальных параметров

В общем случае, в качестве базисных функций $\varphi_j(t)$ может быть выбран широкий класс линейно-независимых непрерывных функций. Однако предпочтительнее всего использовать ортогональные функции. Система интегрируемых функций $\varphi_j(t)$ называется ортогональной на отрезке $[a, b]$, если

$$(\varphi_j, \varphi_p) = \int_a^b \varphi_j(t) \varphi_p(t) dt = 0 \quad \text{при } j \neq p,$$

$$(\varphi_j, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_j(t) \varphi_j(t) dt \neq 0 \quad \text{при } j = p.$$

Система функций $\varphi_j(t)$ называется ортогональной на диск-

решном множестве точек $[0, N]$, если

$$(\varphi_j, \varphi_p) = \sum_{t=0}^{1=N} \varphi_j(t) \varphi_p(t) dt = 0 \quad \text{при } j \neq p,$$

$$(\varphi_j, \varphi_j) = \sum_{t=0}^{1=N} \varphi_j(t) \varphi_j(t) dt \neq 0 \quad \text{при } j = p.$$

Не всегда функции, ортогональные на отрезке, могут быть ортогональными на дискретном множестве равноотстоящих точек и наоборот. Неучет этого обстоятельства может привести к различным недоразумениям. Здесь будут использоваться ортогональные многочлены и ряды Фурье (ортогональные тригонометрические функции). Из всех ортогональных многочленов по ряду причин (минимум максимальной ошибки, равномерное приближение и др.) выбраны многочлены Чебышева.

Для непрерывного аргумента t

$$T_j(u) = \cos(j \arccos u), \quad -1 \leq u \leq 1, \quad (31)$$

где

$$u = \frac{(t - t_{\min}) - (t_{\max} - t)}{(t_{\max} - t_{\min})}. \quad (32)$$

Для дискретного аргумента t_1

$$T_j(u_1) = \cos(j \arccos u_1), \quad -1 \leq u_1 \leq 1, \quad (33)$$

где

$$u_1 = \frac{(t_1 - t_{\min}) - (t_{\max} - t_1)}{(t_{\max} - t_{\min})}. \quad (34)$$

Полиномы Чебышева будут ортогональными на отрезке

$[-1 \leq u \leq 1]$ только с весом

$$\int_{-1}^1 T_j(u) T_p(u) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} 0 & \text{для } j \neq p, \\ \pi/2 & \text{для } j = p \neq 0, \\ \pi & \text{для } j = p = 0. \end{cases}$$

Множество точек, на которых система Чебышевских многочленов ортогональна, является неравномерным, а именно,

$$u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{N} l\right) \quad l = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Эта неравномерность компенсируется в непрерывном случае весовой функцией.

Несмотря на то, что при равномерном расположении точек u_1 (или $+1$) ортогональность полиномов Чебышева нарушается, мы все же будем использовать равномерно отстоящие точки, считая полиномы Чебышева при этом квазиортогональными. В данном случае в системе уравнений относительно a_j

$$\sum_{j=0}^{J=P} a_j \psi_{jk} = \eta_k, \quad (35)$$

где

$$\psi_{jk} = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{1=N} T_j(u_1) T_k(u_1), \quad (36)$$

$$\eta_k = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{1=N} Y(u_1) T_k(u_1), \quad (37)$$

и k меняется от нуля до p , диагональные члены ψ_{jj} или ψ_{kk} будут по абсолютной величине существенно большими, чем недиагональные, и это позволяет для решения системы (35) использовать итерационный метод Гаусса – Зейделя / 6 /.

В качестве первого приближения величины $a_k^{(0)}$ могут быть приняты равными

$$a_k^{(0)} = \left[\frac{1}{(N+1)} \sum_{i=0}^N Y_1(u_1) T_k(u_1) \right] / \left[\frac{1}{(N+1)} \sum_{i=0}^N Y_1(u_1) T_k(u_1) \right]. \quad (38)$$

Примеры расчета

На основании изложенной теории была составлена программа расчета трендов среднего и дисперсии случайной последовательности для ПЭВМ на алгоритмическом языке Turbo-Pascal.

Проиллюстрируем нахождение тренда среднего модельной случайной последовательности, состоящей из 17 членов, то есть $0 \leq i \leq 16$, когда ее члены больше или равны нулю, и диспер-

сия относительной погрешности измерения ее членов равна 0,0025 , т.е. среднее квадратическое отклонение есть 0,05 .

Исходная случайная последовательность $Q[i]$:

$Q[0] = 7,00$; $Q[1] = 8,50$; $Q[2] = 7,50$; $Q[3] = 8,50$;
 $Q[4] = 7,00$; $Q[5] = 8,00$; $Q[6] = 7,00$; $Q[7] = 6,00$;
 $Q[8] = 5,00$; $Q[9] = 6,00$; $Q[10] = 4,50$; $Q[11] = 5,50$;
 $Q[12] = 4,00$; $Q[13] = 3,50$; $Q[14] = 1,50$; $Q[15] = 2,00$;
 $Q[16] = 4,50$.

Обозначим через k_y номер итерации и через $YS[i]$ нулевое приближение тренда среднего. Оно, согласно пункту 6.2 , вычисляется по формулам (I4), (I5) и (I6).

Для $1 \leq i \leq N-1$ и $k_y = 0$

$$YS[i] = (Q[i+1] + 2 Q[i] + Q[i-1]) / 4 .$$

Для $i = 0$

$$YS[0] = (Q[0] + Q[1]) / 2 .$$

Для $i = N$

$$YS[N] = (Q[N-1] + Q[N]) / 2 .$$

Нулевое приближение тренда среднего будет равно :

$YS[0] = 7,75$; $YS[1] = 7,88$; $YS[2] = 8,00$; $YS[3] = 7,88$;
 $YS[4] = 7,63$; $YS[5] = 7,50$; $YS[6] = 7,00$; $YS[7] = 6,00$;
 $YS[8] = 5,50$; $YS[9] = 5,38$; $YS[10] = 5,13$; $YS[11] = 4,88$;
 $YS[12] = 4,25$; $YS[13] = 3,13$; $YS[14] = 2,13$; $YS[15] = 2,50$;
 $YS[16] = 3,25$.

Теперь приведем значения S_p , $D_{ys}[p]$ и $\Phi[p]$ для различных k_y и p , когда допустимая максимальная относительная погрешность ε_{ym} в сходимости $YS[i]$ равна 0,0050 , а критерий сходимости равен единице, если относительное отклонение каждого последующего в итерации значения $YS[i]$ от предыдущего превышает ε_{ym} , то есть 0,0050. Общий критерий сходи-

мости ess представляет собой сумму вышеуказанных критериев, и процесс итерации сходится тогда, когда $\text{ess} = 0$.

$k_y = 0$			
$p = 0$	$S_0 = 4,49265$	$D_{ys}[0] = 0,58442$	$\Phi[0] = 3,90822$
$p = 1$	$S_1 = 0,99985$	$D_{ys}[1] = 0,58442$	$\Phi[1] = 0,41542$
$p = 2$	$S_2 = 0,95570$	$D_{ys}[2] = 0,58442$	$\Phi[2] = 0,37127$
$p = 3$	$S_3 = 0,68109$	$D_{ys}[3] = 0,58442$	$\Phi[3] = 0,09666$
$p = 4$	$S_4 = 0,65388$	$D_{ys}[4] = 0,58442$	$\Phi[4] = 0,06946$
$p = 5$	$S_5 = 0,41931$	$D_{ys}[5] = 0,58442$	$\Phi[5] = -0,16511$
$\text{ess} = 17$			

$k_y = 1$			
$p = 0$	$S_0 = 4,49265$	$D_{ys}[0] = 0,67076$	$\Phi[0] = 3,82189$
$p = 1$	$S_1 = 0,99985$	$D_{ys}[1] = 0,67076$	$\Phi[1] = 0,32909$
$p = 2$	$S_2 = 0,95570$	$D_{ys}[2] = 0,67076$	$\Phi[2] = 0,28494$
$p = 3$	$S_3 = 0,68109$	$D_{ys}[3] = 0,67076$	$\Phi[3] = 0,01033$
$p = 4$	$S_4 = 0,65388$	$D_{ys}[4] = 0,67076$	$\Phi[4] = -0,01687$
$\text{ess} = 16$			

$k_y = 2$			
$p = 0$	$S_0 = 4,49265$	$D_{ys}[0] = 0,92226$	$\Phi[0] = 3,57039$
$p = 1$	$S_1 = 0,99985$	$D_{ys}[1] = 0,92226$	$\Phi[1] = 0,07759$
$p = 2$	$S_2 = 0,95570$	$D_{ys}[2] = 0,92226$	$\Phi[2] = 0,03344$
$p = 3$	$S_3 = 0,68109$	$D_{ys}[3] = 0,92226$	$\Phi[3] = -0,24117$
$\text{ess} = 15$			

$k_y = 3$			
$p = 0$	$S_0 = 4,49265$	$D_{ys}[0] = 0,92489$	$\Phi[0] = 3,56776$
$p = 1$	$S_1 = 0,99985$	$D_{ys}[1] = 0,92489$	$\Phi[1] = 0,07496$
$p = 2$	$S_2 = 0,95570$	$D_{ys}[2] = 0,92489$	$\Phi[2] = 0,03081$
$p = 3$	$S_3 = 0,68109$	$D_{ys}[3] = 0,92489$	$\Phi[3] = -0,24380$
$\text{ess} = 0$			

Максимальное число итераций k_{ym} оказалось равным трем, а значение решающей функции $\Phi(p)$ выbralось, как и должно быть, при $p = 2$ и ее значение равно $\Phi[2] = 0,03081$. $\Phi[3]$ по

модулю действительно больше $\Phi[2]$.

Коэффициенты полиномов Чебышева следующие:

$$a[0] = 5,57069; \quad a[1] = -2,96078; \quad a[2] = -0,30547.$$

Искомый тренд среднего модельного ряда есть

$$\begin{aligned} QS[0] &= 8,23; & QS[1] &= 8,00; & QS[2] &= 7,75; & QS[3] &= 7,49; \\ QS[4] &= 7,20; & QS[5] &= 6,90; & QS[6] &= 6,58; & QS[7] &= 6,24; \\ QS[8] &= 5,88; & QS[9] &= 5,50; & QS[10] &= 5,10; & QS[11] &= 4,68; \\ QS[12] &= 4,24; & QS[13] &= 3,79; & QS[14] &= 3,31; & QS[15] &= 2,82; \\ QS[16] &= 2,30. \end{aligned}$$

Приведем расчет тренда естественного процесса – тренда среднегодовых расходов реки Амударьи – створ кишл. Чатлы за 1938 – 1981 годы. Среднюю квадратическую погрешность определения исходных данных примем равной 6 %, то есть 0,06, а ее дисперсия есть 0,0036. Параметр ϵ_{ym} примем так же, как и в предыдущем примере, равным 0,0050.

Исходная случайная последовательность $Q[i]$:

$$\begin{aligned} Q[0] &= 1290; & Q[1] &= 1210; & Q[2] &= 1160; & Q[3] &= 1630; \\ Q[4] &= 1690; & Q[5] &= 1610; & Q[6] &= 1590; & Q[7] &= 2040; \\ Q[8] &= 1290; & Q[9] &= 1110; & Q[10] &= 1510; & Q[11] &= 1810; \\ Q[12] &= 1300; & Q[13] &= 1060; & Q[14] &= 1750; & Q[15] &= 1740; \\ Q[16] &= 1750; & Q[17] &= 1330; & Q[18] &= 1520; & Q[19] &= 980; \\ Q[20] &= 1660; & Q[21] &= 1470; & Q[22] &= 1330; & Q[23] &= 989; \\ Q[24] &= 801; & Q[25] &= 1010; & Q[26] &= 1240; & Q[27] &= 805; \\ Q[28] &= 1130; & Q[29] &= 928; & Q[30] &= 1090; & Q[31] &= 2240; \\ Q[32] &= 1030; & Q[33] &= 653; & Q[34] &= 773; & Q[35] &= 1380; \\ Q[36] &= 219; & Q[37] &= 360; & Q[38] &= 396; & Q[39] &= 320; \\ Q[40] &= 671; & Q[41] &= 383; & Q[42] &= 294; & Q[43] &= 218. \end{aligned}$$

Нулевое приближение среднего:

$$\begin{aligned} YS[0] &= 1250; & YS[1] &= 1218; & YS[2] &= 1290; & YS[3] &= 1528; \\ YS[4] &= 1655; & YS[5] &= 1625; & YS[6] &= 1708; & YS[7] &= 1740; \\ YS[8] &= 1432; & YS[9] &= 1255; & YS[10] &= 1485; & YS[11] &= 1608; \end{aligned}$$

$YS[12] = 1368; YS[13] = 1292; YS[14] = 1575; YS[15] = 1745;$
 $YS[16] = 1642; YS[17] = 1482; YS[18] = 1338; YS[19] = 1285;$
 $YS[20] = 1442; YS[21] = 1482; YS[22] = 1280; YS[23] = 1027;$
 $YS[24] = 900; YS[25] = 1015; YS[26] = 1074; YS[27] = 995;$
 $YS[28] = 998; YS[29] = 1019; YS[30] = 1337; YS[31] = 1650;$
 $YS[32] = 1238; YS[33] = 777; YS[34] = 895; YS[35] = 938;$
 $YS[36] = 544; YS[37] = 334; YS[38] = 368; YS[39] = 427;$
 $YS[40] = 511; YS[41] = 433; YS[42] = 29.; YS[43] = 256.$

Результаты расчёта :

$k_y = 0$

$p = 0 \quad S_0 = 2,6000E+05 \quad D_{ys}[0] = 8,225E+04 \quad \Phi[0] = 1,777E+05$
 $p = 1 \quad S_1 = 1,3524E+05 \quad D_{ys}[1] = 8,225E+04 \quad \Phi[1] = 5,299E+04$
 $p = 2 \quad S_2 = 1,0601E+05 \quad D_{ys}[2] = 8,225E+04 \quad \Phi[2] = 2,376E+04$
 $p = 3 \quad S_3 = 1,0589E+05 \quad D_{ys}[3] = 8,225E+04 \quad \Phi[3] = 2,364E+04$
 $p = 4 \quad S_4 = 1,0373E+05 \quad D_{ys}[4] = 8,225E+04 \quad \Phi[4] = 2,148E+04$
 $p = 5 \quad S_5 = 1,0231E+05 \quad D_{ys}[5] = 8,225E+04 \quad \Phi[5] = 2,006E+04$
 $p = 6 \quad S_6 = 1,0126E+05 \quad D_{ys}[6] = 8,225E+04 \quad \Phi[6] = 1,901E+04$
 $p = 7 \quad S_7 = 9,935E+04 \quad D_{ys}[7] = 8,225E+04 \quad \Phi[7] = 1,710E+04$
 $p = 8 \quad S_8 = 9,804E+04 \quad D_{ys}[8] = 8,225E+04 \quad \Phi[8] = 1,579E+04$
 $p = 9 \quad S_9 = 8,220E+04 \quad D_{ys}[9] = 8,225E+04 \quad \Phi[9] = -1,8776E+01$
 $ess = 43$

$k_y = 1$

$p = 0 \quad S_0 = 2,6000E+05 \quad D_{ys}[0] = 1,1661E+05 \quad \Phi[0] = 1,433E+05$
 $p = 1 \quad S_1 = 1,3524E+05 \quad D_{ys}[1] = 1,1661E+05 \quad \Phi[1] = 1,862E+04$
 $p = 2 \quad S_2 = 1,0601E+05 \quad D_{ys}[2] = 1,1661E+05 \quad \Phi[2] = -1,060E+04$
 $ess = 43$

$k_y = 2$

$p = 0 \quad S_0 = 2,6000E+05 \quad D_{ys}[0] = 1,5295E+05 \quad \Phi[0] = 1,433E+05$
 $p = 1 \quad S_1 = 1,3524E+05 \quad D_{ys}[1] = 1,525E+05 \quad \Phi[1] = -1,771E+04$
 $ess = 42$

$k_y = 3$

$p = 0 \quad S_0 = 2,6000E+05 \quad D_{ys}[0] = 1,9424E+05 \quad \Phi[0] = 6,575E+04$

$p = 1$ $S_1 = 1,3524E+05$ $D_{ys}[1] = 1,9424E+05$ $\Phi[1] = -5,900E+04$
 $ess = 0$.

Максимальное число итераций k_{up} оказалось равным трем, а значение решающей функции $\Phi[p]$ выдалось, как и должно быть, при $p = 1$ и ее значение равно $\Phi[1] = -5,900E+04$, $\Phi[0]$ по модулю действительно больше $\Phi[1]$.

Коэффициенты полиномов Чебышева следующие:

$$a[0] = 1154; \quad a[1] = -591.$$

Тренд среднегодовых расходов р. Амударьи - створ кишл. Чатлы

QS[0] = 1745;	QS[1] = 1717;	QS[2] = 1690;	QS[3] = 1662;
QS[4] = 1634;	QS[5] = 1607;	QS[6] = 1580;	QS[7] = 1552;
QS[8] = 1525;	QS[9] = 1497;	QS[10] = 1470;	QS[11] = 1442;
QS[12] = 1415;	QS[13] = 1387;	QS[14] = 1360;	QS[15] = 1332;
QS[16] = 1305;	QS[17] = 1277;	QS[18] = 1250;	QS[19] = 1222;
QS[20] = 1195;	QS[21] = 1167;	QS[22] = 1140;	QS[23] = 1112;
QS[24] = 1085;	QS[25] = 1057;	QS[26] = 1030;	QS[27] = 1002;
QS[28] = 975;	QS[29] = 947;	QS[30] = 920;	QS[31] = 892;
QS[32] = 865;	QS[33] = 837;	QS[34] = 810;	QS[35] = 782;
QS[36] = 755;	QS[37] = 727;	QS[38] = 700;	QS[39] = 672;
QS[40] = 645;	QS[41] = 617;	QS[42] = 590;	QS[43] = 562.

Таким образом, для среднегодовых расходов воды Амударьи за 1938 - 1981 годы значимым является линейный тренд.

Список литературы

1. Пугачев В. С. Теория случайных функц. Л. - М. : Физматгиз, 1962. - 883 с.
2. Жуковский Е. Е., Киселева Т. Л., Мальденштам С. М. Статистический анализ случайных процессов. - Л. : Гидрометеоиздат, 1976. - 388 с.
3. Колмогоров А. Н. Рассеяние энергии при локально-изотропной турбулентности // ДАН СССР. - 1941. - Т. 32. - N 1. - С. 19 - 21.

4. Алексеев Г. А. Объективные методы выравнивания и нормализации корреляционных связей. - Л. : Гидрометеонадат, 1971. - 363 с.

5. Кендалл М., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. - М.: Наука, 1976. - 736 с.

6. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. Э. Численные методы анализа. - М.: Физматгиз, 1962. - 367 с.

ВЫБОР ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ И ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Существует множество видов плотностей и соответствующих функций распределения. Например, многим известно семейство кривых Пирсона с плотностью вероятностей, порождаемых дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{1}{f} \frac{d f}{d y} = \frac{(y + A)}{(B y^2 + C y + D)} \quad (1)$$

В частности, кривая Пирсона третьего типа или плотность гамма-распределения, имеет следующее выражение:

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < 0 \\ y^{\alpha} \exp(-y / \beta) & \text{при } y \geq 0 \end{cases} \cdot \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha + 1)} \quad (2)$$

где α , β - параметры; Γ - гамма-функция.

Связь между этими параметрами и моментами распределения следующая:

$$Y = m_y = (\alpha + 1) \beta; \quad D_y = (\alpha + 1) \beta^2; \quad (3)$$

$$C_{sy} = \frac{2}{\sqrt{\alpha + 1}} \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) следует, что у рассматриваемого распределения существует жесткая связь между коэффициентом вариации $C_{vy} = \sqrt{D_y} / m_y$ и коэффициентом асимметрии C_{sy} , а именно,

$$C_{sy} = 2 C_{vy} \quad (5)$$

Это обстоятельство существенно снижает возможности широкого использования гамма-распределения в гидрологических расче-

тах. Для ограниченных снизу случайных величин, например,

$$y \geq y_{\min},$$

где $y_{\min}$ - наименьший возможный расход (у непересыхающих рек, он всегда больше нуля), плотность распределения может быть представлена в виде:

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq y_{\min}, \\ c (y - y_{\min})^p e^{-ay^2 + by} & \text{при } y > y_{\min}. \end{cases} \quad (6)$$

Если происходит пересыхание реки с вероятностью, отличной от нуля, то есть $y_{\min} = 0$, $p(y=0) > 0$, то

$$f(y) = [1 - p(y_{\min} = 0)] f(y|y > 0). \quad (7)$$

При $y_{\min} = 0$, $p(y_{\min}) = 0$ формула (6) запишется:

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq 0 \\ c y^p e^{-ay^2 + by} & \text{при } y > 0 \end{cases}. \quad (8)$$

Плотность вероятности, если не считать нормирующего множителя c , является трехпараметрической и названа исследователями ГТИ энтропийной / 2 /. Три независимых параметра этой формулы p , a и b могут быть определены либо с помощью метода моментов, либо с использованием метода наибольшего правдоподобия. Как показано в цитируемой работе, оба метода для данного распределения дают одинаковые результаты.

В работе / 2 / приводится без вывода рекуррентное соотношение для начальных моментов M_k и параметров распределения a , b , p . В наших обозначениях оно имеет вид:

$$2 a M_{k+2} = b M_{k+1} + (p+1+k) M_k, \quad (k \geq 0) \quad (9)$$

или для $k = 0$ и $k = 1$

$$\begin{aligned} 2 M_2 a - M_1 b &= (p+1) M_0, \\ 2 M_3 a - M_2 b &= (p+2) M_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Приведем вывод соотношения (9). Запишем выражение для k -го начального момента

$$M_k = C \int_0^{\infty} y^k y^p \exp(-a y^2 + b y) dy$$

и проинтегрируем его по частям:

$$dv = y^{p+k} dy; \quad u = \exp(-a y^2 + b y);$$

$$v = \frac{y^{p+k+1}}{p+k+1}; \quad du = (-2ay+b) \exp(-ay^2+by) dy.$$

Тогда

$$\begin{aligned} C \int_0^{\infty} y^k y^p \exp(-a y^2 + b y) dy &= C \frac{y^{p+k+1}}{p+k+1} \exp(-a y^2 + b y) \Big|_0^{\infty} - \\ &- \frac{1}{p+k+1} C \int_0^{\infty} y^{k+1} y^p (-2ay+b) \exp(-ay^2+by) dy. \end{aligned}$$

Интеграл в правой части представим в виде двух интегралов и обе части умножим на $p+k+1$. Тогда

$$(p+k+1) C \int_0^{\infty} y^k y^p \exp(-ay^2+by) dy = C y^{p+k+1} \exp(-ay^2+by) \Big|_0^{\infty} +$$

$$+ 2ac \int_0^{\infty} y^{k+2} y^p \exp(-ay^2 + by) dy - bc \int_0^{\infty} y^{k+1} y^p \exp(-ay^2 + by) dy.$$

При $a > 0$ первый член в правой части равен нулю, остальные члены представляют собой начальные моменты, умноженные на соответствующие коэффициенты, то есть

$$(p+k+1) M_k = 2a M_{k+2} - b M_{k+1}.$$

Это совпало с (9).

Из системы (10) выразим a и b через M_1 , M_2 , M_3 и p :

$$a = \frac{[(p+1)M_2 - (p+2)M_1^2]}{2(M_2^2 - M_1 M_3)}, \quad (11)$$

$$b = \frac{[(p+1)M_3 - (p+2)M_1 M_2]}{(M_2^2 - M_1 M_3)}. \quad (12)$$

Параметры p и c найдем из условия минимума функции Ω :

$$\begin{aligned} \Omega(c, p) = & \left[1 - c \int_0^{\infty} y^p \exp[-a(p)y^2 + b(p)y] dy \right]^2 + \\ & + \left[1 - c \frac{1}{M_1} \int_0^{\infty} y^{p+1} \exp[-a(p)y^2 + b(p)y] dy \right]^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Параметр c , имеющий размерность $[y^{-(p+1)}]$, найдем из условия

$$\frac{\partial \Omega}{\partial c} = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
C = & \left[\int_0^{\infty} y^p \exp \{-a(p) y^2 + b(p) y\} dy + \right. \\
& + \frac{1}{M_1} \int_0^{\infty} y^{p+1} \exp \{-a(p) y^2 + b(p) y\} dy \Big/ \\
& \left(\left[\int_0^{\infty} y^p \exp \{-a(p) y^2 + b(p) y\} dy \right]^2 + \right. \\
& + \left. \left[\frac{1}{M_1} \int_0^{\infty} y^{p+1} \exp \{-a(p) y^2 + b(p) y\} dy \right]^2 \right). \quad (15)
\end{aligned}$$

Так как при заданных M_1 , M_2 и M_3 параметры a , b и C зависят только от p , [см. формулы (11), (12) и (15)], то порядок их вычисления должен быть следующим: задаемся величиной p и по ней с помощью формулы (15) вычисляем C , по известным p и C находим функцию $\Omega(C(p), p)$. Таких вычислений для возрастающих p делается серия, и из них выбирается такое $p = p^*$, при котором Ω имеет наименьшее значение. Важно, чтобы p^* не был ни первым, ни последним членом этой серии, а был внутри нее. Эти вычисления можно представить:

p	p_1	p_2	p_3	...	...	...	p_{n-2}	p_{n-1}	p_n
C	C_1	C_2	C_3	...	...	...	C_{n-2}	C_{n-1}	C_n
Ω	Ω_1	Ω_2	Ω_3	...	...	...	Ω_{n-2}	Ω_{n-1}	Ω_n

Интегралы в приведенных формулах будем вычислять численным способом с помощью метода Симпсона (парабол). Если $F(y)$ есть подинтегральная функция, α и β — соответственно нижний и верхний пределы интегрирования, n — число отрезков (обязательно четное), на которое делится интервал интегрирования, то приближенное значение интеграла $J_n(\alpha, \beta)$ равно

$$J_n(\alpha, \beta) = \frac{(\beta - \alpha)}{3n} \left\{ \sum_{k=0}^{k=n} (3 - \cos \pi k) F(y_k) - [F(y_0) + F(y_n)] \right\}, \quad (16)$$

где

$$y_k = \alpha + \frac{(\beta - \alpha)}{n} k. \quad (17)$$

Для решения нашей задачи мы можем взять, например,

$$\alpha = 0, \quad \beta = M_1 + 5 (M_2 - M_1^2)^{1/2}, \quad n = 200.$$

Желательно перейти от распределения y к распределению ее нормированной величины x :

$$x = \frac{y - m_y}{\sigma_y},$$

где $m_y = M_1$.

Но для рассмотренного (энтропийного) распределения y переменной x всегда будет находиться множитель $C_{vy} = \frac{\sigma_y}{m_y}$, а это приводит к некоторому неудобству. В таком случае лучше ввести переменную z , определяемую равенством

$$z = C_{vy} x = \frac{\sigma_y}{m_y} \frac{(y - m_y)}{\sigma_y} = \frac{y - m_y}{m_y} = k_y. \quad (18)$$

Как легко показать, первые три параметра распределения z следующие:

$$m_z = 0; \quad D_z = C_{vy}^2; \quad C_{sz} = C_{sy} \quad \text{и} \quad \sigma_z = C_{vy}.$$

Обратное преобразование, то есть нахождение y по z запишется

$$y = m_y (1 + z). \quad (19)$$

Подставим (19) в (8):

$$\phi(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq -1 \\ C m_y^p (1+z)^p \exp[-a m_y^2 (1+z)^2 + b m_y (1+z)] & \text{при } z > -1. \end{cases} \quad (20)$$

Рассуждая для последнего случая, найдем

$$\phi(z) = C m_y^p e^{-a m_y^2 + b m_y} (1+z)^p e^{-a m_y^2 z^2 + m_y (b - 2a m_y) z}$$

Обозначим

$$C_1 = C m_y^p e^{-a m_y^2 + b m_y} ;$$

$$A = a m_y^2, \quad B = m_y (b - 2a m_y).$$

Тогда плотность вероятности для z (при $z > -1$) запишется:

$$\phi(z) = C_1 (1+z)^p e^{-A z^2 + B z} \quad (21)$$

Учитывая формулы (11) и (12), а также выражения для A и B , получим:

$$A(p) = \frac{[1 - (1+p) C_{vy}^2]}{2 C_{vy}^2 [1 + C_{vy} C_{sy} - C_{vy}^2]}, \quad (22)$$

$$B(p) = \frac{[1 - (1+2p) C_{vy}^2 - (1+p) C_{vy}^3 C_{sy}]}{C_{vy}^2 [1 + C_{vy} C_{sy} - C_{vy}^2]}. \quad (23)$$

Так как первый момент переменной z равен нулю, то при правильно выбранном p

$$C_1 \int_{-1}^{\infty} z (1+z)^p e^{-A(p) z^2 + B(p) z} dz = 0. \quad (24)$$

Но $C_1 > 0$ и поэтому интеграл в (24) равен нулю. Обозначим этот интеграл через $\omega(p)$:

$$\omega(p) = \int_{-1}^{\infty} z (1+z)^P e^{-A(p)z^2 + B(p)z} dz \quad (25)$$

Будем подбирать в (25) параметр p таким, чтобы $\omega(p)$ оказалось равным нулю. Это и будет искомым значением p . Его можно определить также и из условия, что $\omega^2(p)$ стремится к минимуму. По найденной таким образом величине p вычислим $A(p)$ и $B(p)$. Параметр C_1 при уже найденном p определится выражением

$$C_1 = 1 / \int_{-1}^{\infty} (1+z)^P e^{-A(p)z^2 + B(p)z} dz \quad (26)$$

Как показали численные эксперименты, положительные значения коэффициента асимметрии не могут быть какими угодно и ограничены максимальными их значениями C_{sm} , зависящими от коэффициента вариации C_{vy} . Отрицательные значения C_s могут быть по абсолютной величине равны $5 C_{vy}$ и более.

Приведем значения C_{sm} в зависимости от C_{vy} для максимального значения $z = z_m = 5 C_{vy}$.

C_{vy}	0,100	0,110	0,120	0,130	0,140	0,150	0,200
C_{sm}	0,055	0,088	0,129	0,167	0,185	0,202	0,277
C_{vy}	0,250	0,300	0,350	0,400	0,450	0,500	0,550
C_{sm}	0,351	0,425	0,499	0,572	0,647	0,717	0,784
C_{vy}	0,600	0,650	0,700	0,750	0,800	0,850	0,900
C_{sm}	0,859	0,959	1,106	1,314	1,630	2,217	3,595
C_{vy}	0,950						
C_{sm}	8,901						

В табл. 1 приведены величины параметров p и C_1 для различных значений $\sigma_z = C_{vy}$, $C_s = 7 C_{vy} \geq 0$.

Таблица

Значения параметров p и C_1 для различных C_{vy} и C_s
(верхняя строка - p , нижняя - C)

C_{vy}	C_s							
	0,0	0,50 C_v	1,00 C_v	1,50 C_v	2,00 C_v	2,50 C_v	3,00 C_v	3,50 C_v
0,15	39,252	38,529	37,153					
	2,6569	2,6555	2,6536					
0,20	21,837	21,446	20,731					
	1,9909	1,9892	1,9868					
0,25	13,694	13,442	12,993					
	1,5909	1,5889	1,5860					
0,30	9,2498	9,0691	8,7534					
	1,3240	1,3216	1,3182					
0,35	6,5636	6,4242	6,1844					
	1,1330	1,1303	1,1263					
0,40	4,8172	4,7035	4,5118					
	0,9895	0,9864	0,9820					
0,45	3,6192	3,5237	3,3651					
	0,8777	0,8743	0,8694					
0,50	2,7612	2,6782	2,5421					
	0,7881	0,7843	0,7790					
0,55	2,2139	2,0493	1,9274					
	0,7146	0,7105	0,7046					
0,60	1,6377	1,5694	1,4584					
	0,6533	0,6488	0,6424					
0,65	1,2602	1,1983	1,1001					
	0,6012	0,5965	0,5896					
0,70	0,9628	0,9096	0,8268	0,6314				
	0,5564	0,5514	0,5445	0,5301				
0,75	0,7243	0,6788	0,6147	0,4999				
	0,5171	0,5122	0,5058	0,4950				

C_{vy}	C_s							
	0,0	0,50 _v	1,00 _v	1,50 _v	2,00 _v	2,50 _v	3,00 _v	3,50
0,80	0,5292	0,4930	0,4459	0,3767	0,2008			
	0,4824	0,4779	0,4722	0,4643	0,4460			
0,85	0,3664	0,3403	0,3092	0,2701	0,2157	0,1080		
	0,4512	0,4475	0,4431	0,4377	0,4304	0,4167		
0,90	0,2276	0,2120	0,1949	0,1760	0,1547	0,1301	0,004	
	0,4230	0,4204	0,4177	0,4146	0,4112	0,4073	0,4026	
0,95	0,1068	0,1013	0,0958	0,0902	0,0846	0,0789	0,0732	
	0,3972	0,3962	0,3952	0,3941	0,3931	0,3921	0,3910	

Список литературы

1. Денисов К.М., Ибрагимова Т.Л. Метод гидрологических расчетов среднегодовых и экстремальных расходов воды для рек с интенсивным хозяйственным использованием водных ресурсов. - см. настоящ. сборник.

2. Рождественский А.В., Ежов А.В., Сахарюк А.В. Оценка точности гидрологических расчетов. - Л. Гидрометеоиздат, 1990. - 280 с.

РАСЧЕТ СМЕШАННЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ РАСХОДОВ ВОДЫ ГОРНЫХ РЕК

Состояние изучаемого вопроса

Как правило, гидрологическая наука занимается изучением формирования максимальных расходов талых или дождевых (ливневых) вод. Однако часто, особенно для горных рек с их растянутым половодьем, максимальные расходы формируются наложением дождевых пиков на талое основание, образуя смешанные максимальные расходы. По изучению формирования и расчету смешанных максимальных расходов горных рек нам известны три работы — это работа В.П. Черногорова / II / и две работы К.М. Денисова / 8, 9 /. В.П. Черногоров рассмотрел составляющие (талые и дождевые) расходов воды в периоды половодий и предложил расчет максимальных расходов реки Ангрен у станции Турк. Дождевые составляющие расходов воды выделялись на основе данных о температуре воздуха и осадках. По полученным результатам рассчитывались обеспеченности появления дождевых максимумов и соответствующих им талых расходов, талых максимумов и соответствующих им дождевых расходов и, наконец, наибольших максимумов в году (смешанных максимальных расходов) и их талой и дождевой составляющих. При определении обеспеченности таких сочетаний В.П. Черногоров использовал произведение обеспеченностей составляющих вместо нахождения обеспеченности заданной суммы случайных слагаемых композиционным методом. В этом состоит неточность его метода расчета.

В работе К.М. Денисова / 8 / смешанный максимальный расход представляется в виде суммы максимального талого расхода $Q_{\text{тг}}$ и некоторой дождевой надбавки ΔQ_g или их модулей. Под дождевой надбавкой понимается разность между максимальным годовым расходом и максимальным талым расходом. Таким образом,

$$Q_{\text{мах}} = Q_{\text{тг}} + \Delta Q_g \quad (1)$$

Для расчета величины $Q_{\text{мах}}$ любой обеспеченности необходимо знать ее среднее значение $Q_{\text{мах}}$, коэффициент вариации C_{vm} и ко-

коэффициент асимметрии C_{sm} . Из равенства (1) следует, что

$$Q_{max} = Q_{шт} + \Delta Q_g \quad (2)$$

Для математического ожидания талого максимума и дождевой надбавки приводятся соответствующие выражения:

$$Q_{шт} = \frac{K_1 V_{\phi} B}{\left[K_3 \sigma_n + \frac{1}{n} \sqrt{\frac{V_{\phi} B}{2 K_2 \gamma}} \right]} F \quad (3)$$

$$\Delta Q_g = A F^{0,40} \quad (4)$$

где K_1 - коэффициент, зависящий от размерности величин, входящих в формулу (3); K_2 - коэффициент стаивания, равный $5,5 \text{ мм} / ^\circ \text{C} \cdot \text{сут}$; K_3 - безразмерный коэффициент пропорциональности расчетной амплитуды высот бассейна H_{ϕ} среднеквадратическому отклонению его высот σ_n , для рек бассейна Сырдарьи он равен 2,64; величина n равна отношению срочной максимальной интенсивности водоотдачи к ее среднесуточному значению; γ - вертикальный температурный градиент, равный $6,1 ^\circ \text{C} / \text{км}$; V_{ϕ} - средняя вертикальная скорость движения нулевой среднесуточной изотермы, равная $0,028 \text{ км} / \text{сут}$; B - норма слоя стока за половодье; A - параметр, меняющийся от 0,207 до 3,790; F - площадь бассейна, км^2 .

Коэффициент вариации максимальных расходов C_{vm} вычисляется по эмпирической формуле:

$$C_{vm} = \frac{B}{H_{cp} F^{0,12}} \quad (5)$$

где B - параметр, H_{cp} - средневзвешенная высота бассейна, км .

Для определения параметров A и B приведены карты их порайонных значений. Норма слоя стока за половодье рассчитывается по эмпирическим порайонным зависимостям ее от средней взвешенной высоты H_{cp} . Для нахождения коэффициента асимметрии максимальных расходов C_{sm} приводится карта районов для различных отношений C_{sm} к C_{vm} .

Погрешность расчета смешанных максимальных расходов изложенным методом в 57% случаев не превосходит 20%, что говорит

со удовлетворительным его качеством .

Наиболее совершенный в научном плане метод расчета смешанных максимальных расходов изложен К.М. Денисовым в 1968 году в другой статье / 8 /. Этот метод сопряжен с большим объемом вычислений и при отсутствии у автора в то время ЭВМ не мог быть практически реализован.

Суть метода состоит в следующем. При расчете максимальных расходов без большой погрешности можно считать, что расход воды Q в замыкающем створе в момент времени t представляет собой сумму талого Q_t и дождевого Q_g расходов :

$$Q = Q_t + Q_g . \quad (6)$$

Гидрограф талого стока схематизирован одновершинной трехпараметрической кривой (рис. 1) :

$$Q_t = f(Q_{шт}, h, \tau_t, t) , \quad (7)$$

где $Q_{шт}$ - максимальный талый расход (вершина талого гидрографа), h - слой половодья, τ_t - время наступления талого максимума, t - текущее время.

На талый гидрограф накладываются дождевые пики. Естественно, что для расчета максимальных расходов интерес представляют только максимальные ординаты этих пиков. Поэтому под Q_g будем в дальнейшем понимать максимальную ординату каждого отдельного дождевого пика.

Гидрограф талого стока аппроксимирован выражением

$$Q_t(t) = \frac{K_1 V_{\Phi} h F}{S + 7,5 \frac{V_{\Phi}^2}{S} (t - \tau_t)^2} , \quad (8)$$

где

$$S = \left[K_3 \sigma_n + \frac{1}{n} \sqrt{\frac{V_{\Phi} h}{2 K_2 \gamma}} \right] . \quad (9)$$

Максимальные дождевые расходы для рек с длиной более 4 км могут быть вычислены по формуле Г.А. Алексеева / 1 / :

$$Q_g = K_1 \frac{h_g V_L}{L} F , \quad (10)$$

где V_L - скорость добегания дождевой воды по длине реки, h_g

– слой водоотдачи дождя, L – длина реки (главного водотока).

При расчете дождевых максимумов равнинных рек обычно определяется теплый период, когда осадки выпадают в бассейне в виде дождя. Этот период считается постоянным.

Для горных рек продолжительность теплого периода существенно зависит от высоты местности. В этом случае принято, что если среднесуточная температура воздуха на некотором уровне больше 0°C , то суточные суммы осадков выпадают в виде дождя, если среднесуточная температура 0°C и ниже – в виде снега.

Обозначим через F_g площадь бассейна, расположенную ниже нулевой изотермы и через L_g длину реки (главного водотока) в пределах площади F_g . Далее через η обозначим коэффициент дождевого стока и через x суточные суммы осадков.

Тогда максимальный дождевой расход, прошедший в данные сутки, будет равен

$$Q_g = K_1 \eta \frac{x V_L}{L_g} F_g. \quad (11)$$

Величину L_g можно выразить через F_g приближенным равенством

$$L_g = K_4 \sqrt{F_g}, \quad (12)$$

где K_4 – безразмерный коэффициент пропорциональности.

Скорость V_L представлена выражением

$$V_L = K_5 \sqrt{h_g i_p} = K_5 \sqrt{\eta x i_p}, \quad (13)$$

где K_5 имеет размерность корня квадратного из ускорения, i_p – уклон выравненного продольного профиля реки.

Объединяя равенства (11), (12) и (13), запишем:

$$Q_g = \alpha x^{3/2} \sqrt{F_g i_p}. \quad (14)$$

Здесь $\alpha = K_1 K_5 \eta^{3/2} / K_4$ есть сборный параметр, имеющий размерность корня квадратного из ускорения.

Суточные суммы осадков рассматриваются К.М. Денисовым как нестационарная независимая случайная последовательность. Вероятность выпадения осадков в некоторый день месяца $P_1(t)$ принимается равной отношению среднего числа дней с осадками

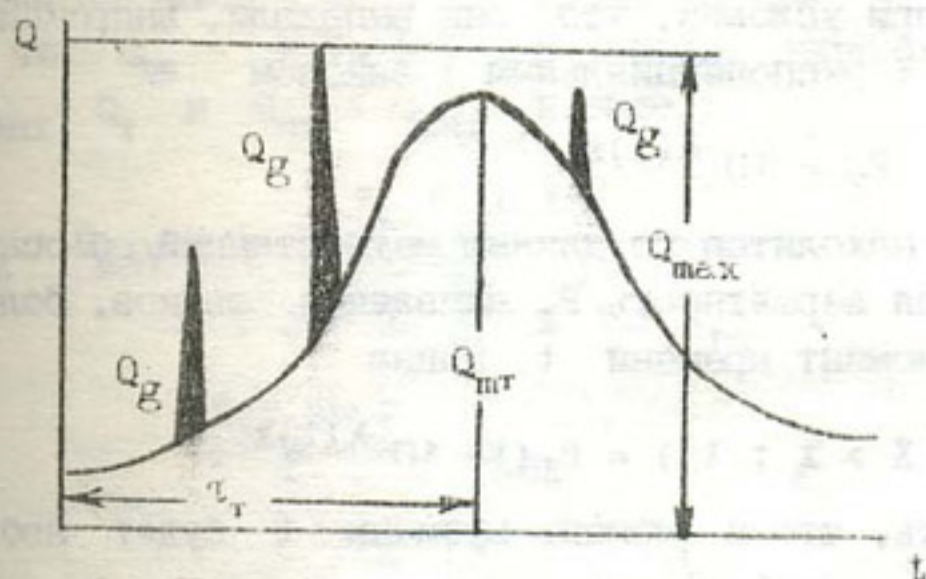


Рис. 1. Схема формирования смешанных максимальных расходов воды.

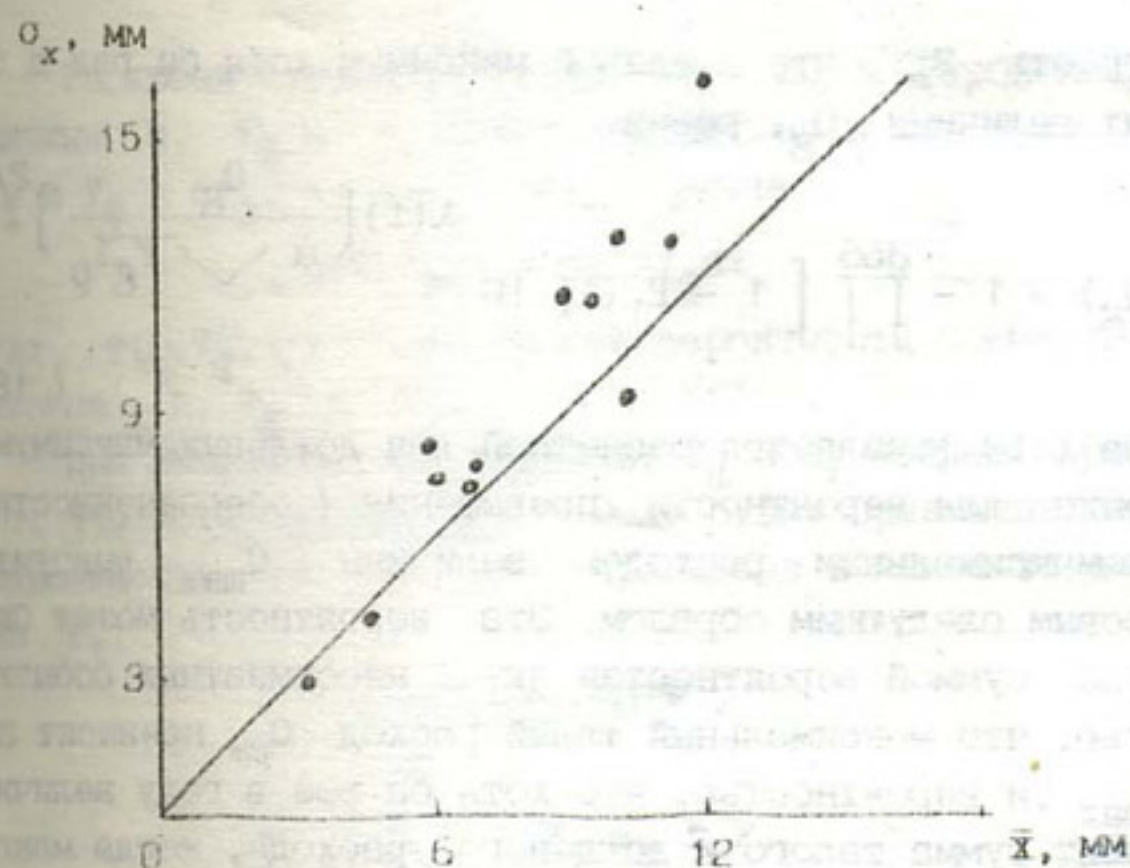


Рис. 2. Связь средних квадратических отклонений суточных сумм осадков Q_x с их средними значениями $\bar{X}$.

данного месяца к числу дней в этом месяце.

Вероятность P_2 выпадения суточных сумм осадков, больших величины x при условии, что они выпадали, аппроксимируется показательным (экспоненциальным) законом

$$P_2 = 10^{-\lambda(t)x} \quad (15)$$

Функция $\lambda(t)$ находится по данным метеостанций об осадках.

Безусловная вероятность P_x выпадения осадков, больших величины x в момент времени t , равна

$$P_x(X > x; t) = P_1(t) 10^{-\lambda(t)x} \quad (16)$$

Вероятность, что в момент времени t будет наблюдаться дождевой максимум Q_g^1 больше величины Q_g , выражается с учетом (14) и (16) следующим образом:

$$P_g(Q_g^1 > Q_g; t) = P_1(t) 10^{-\lambda(t) \left[\frac{Q_g}{\alpha \sqrt{F_g^1 P}} \right]^{2/3}} \quad (17)$$

Вероятность P_g , что дождевой максимум хотя бы раз в году превысит величину Q_g , равна

$$P_g(Q_g^1 > Q_g) = 1 - \prod_{t=1}^{365} \left[1 - P_1(t) 10^{-\lambda(t) \left[\frac{Q_g}{\alpha \sqrt{F_g^1 P}} \right]^{2/3}} \right] \quad (18)$$

Формула (18) является расчетной для дождевых максимумов.

Выражение для вероятности превышения (обеспеченности) смешанным максимальным расходом величины $Q_{\max}$ выводится Е.М. Денисовым следующим образом. Эта вероятность может быть представлена суммой вероятностей двух несовместных событий: вероятностью, что максимальный талый расход $Q_{\text{тр}}$ превысит величину $Q_{\max}$, и вероятностью, что хотя бы раз в году величину $Q_{\max}$ превысит сумма талого и дождевого расхода, когда максимальный талый расход не превышает $Q_{\max}$, то есть

$$P(Q_{\max}^1 > Q_{\max}) = P(Q_{\text{тр}} > Q_{\max}) + P(Q_{\text{тр}} + Q_g > Q_{\max} | Q_{\text{тр}} \leq Q_{\max}) \quad (19)$$

Неравенства $Q_r + Q_g > Q_{\max}$ и $Q_g > Q_{\max} - Q_r$ равносильны. Тогда с учетом (8), из которого при $t = \tau_r$ также следует, что $Q_{\text{пр}} = K_1 V_{\text{ф}} h F / S$, можно записать неравенства $Q_g > Q_{\max} - Q_r$ и $Q_{\text{пр}} \leq Q_{\max}$ в виде:

$$Q_g > Q_{\max} - \frac{K_1 V_{\text{ф}} h F}{S + 7,5 \frac{V_{\text{ф}}^2}{S} (t - \tau_r)^2}, \quad (20)$$

$$\frac{K_1 V_{\text{ф}} h F}{S} \leq Q_{\max}. \quad (21)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & P(Q_r + Q_g > Q_{\max} \mid Q_{\text{пр}} \leq Q_{\max}) = \\ & = P \left(Q_g > Q_{\max} - \frac{K_1 V_{\text{ф}} h F}{S + 7,5 \frac{V_{\text{ф}}^2}{S} (t - \tau_r)^2} \mid \frac{K_1 V_{\text{ф}} h F}{S} \leq Q_{\max} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Раскроем структуру выражения (22). Вероятность, что величины h , $V_{\text{ф}}$ и τ_r будут находиться в интервале h и $h + dh$, $V_{\text{ф}}$ и $V_{\text{ф}} + dV_{\text{ф}}$, τ_r и $\tau_r + d\tau_r$, равна

$$\varphi(h, V_{\text{ф}}, \tau_r) dh dV_{\text{ф}} d\tau_r,$$

где $\varphi(h, V_{\text{ф}}, \tau_r)$ — плотность вероятности совместного распределения h , $V_{\text{ф}}$ и τ_r .

При указанных значениях h , $V_{\text{ф}}$ и τ_r найдем вероятность того, что хотя бы один раз в году будет превышена величина $Q_{\max}$. Вероятность, что она будет превышена в какой-то день t , равна P_t :

$$P_t = P_1(t) 10^{-\psi}, \quad (22a)$$

$$\psi = \lambda(t) \left[\frac{Q_{\max} - \frac{K_1 V_{\text{ф}} h F}{S + 7,5 \frac{V_{\text{ф}}^2}{S} (t - \tau_r)^2}}{\alpha \sqrt{F_g i_p}} \right]^{2/3}. \quad (23)$$

Вероятность, что $Q_{\max}$ не будет превышен в момент време-

ни t , равна $1 - P_t$, а вероятность, что он не будет превышен ни разу в году, есть

$$\prod_{t=1}^{365} (1 - P_t) :$$

Вероятность dP , что при указанных значениях h , V_{Φ} и τ_r хотя бы раз в году будет превышена величина $Q_{\max}$, равна

$$dP = \left[1 - \prod_{t=1}^{365} (1 - P_t) \right] \varphi(h, V_{\Phi}, \tau_r) dh dV_{\Phi} d\tau_r. \quad (24)$$

А вероятность, что $Q_{\max}$ будет превышен хотя бы раз в году при условии, что $Q_{\text{ит}} \leq Q_{\max}$, равна интегралу от выражения (24) по области G значений h , V_{Φ} и τ_r , удовлетворяющих следующему неравенству:

$$K_1 V_{\Phi} h F / S \leq Q_{\max}, \quad (25)$$

то есть

$$P(Q_r + Q_g > Q_{\max} \mid Q_{\text{ит}} \leq Q_{\max}) =$$

$$= \int \int \int_G \left[1 - \prod_{t=1}^{365} (1 - P_t) \right] \varphi(h, V_{\Phi}, \tau_r) dh dV_{\Phi} d\tau_r. \quad (26)$$

Если в (26) раскрыть квадратные скобки, то мы будем иметь два интеграла, первый из которых представляет собой вероятность, что $Q_{\text{ит}}$ будет меньше или равен $Q_{\max}$. Но

$$P(Q_{\text{ит}} \leq Q_{\max}) = 1 - P(Q_{\text{ит}} > Q_{\max}). \quad (27)$$

Тогда, учитывая (19), (26) и (27), получим окончательно

$$P(Q_{\max}^1 > Q_{\max}) = 1 - \int \int \int_G \prod_{t=1}^{365} (1 - P_t) \varphi(h, V_{\Phi}, \tau_r) dh dV_{\Phi} d\tau_r. \quad (28)$$

Величины h , V_{Φ} и τ_r практически независимы и, кроме того, изменения V_{Φ} и τ_r для данной реки влияют на обеспеченность максимального расхода значительно меньше, чем в риадия слоя половодья. Это позволяет в приближенных расчетах уйти от многомерности, приняв средние значения V_{Φ} и τ_r . Расчетная формула тогда будет следующей :

$$P(Q_{\max}^1 > Q_{\max}) = 1 - \int_0^{\frac{Q_{\max} S}{K_1 V \Phi}} \prod_{t=1}^{365} (1 - P_t) \varphi_1(h) dh, \quad (29)$$

где $\varphi_1(h)$ — плотность вероятности h .

Пути дальнейшего исследования

Как было сказано выше, из-за отсутствия у К.М. Денисова в 1968 году подходящей ЭВМ, разработанная им теория расчета смешанных максимальных расходов не была практически реализована. Сейчас положение в этом деле существенно изменилось в лучшую сторону — мы уже располагаем ПЭВМ, которой данная задача вполне по силам. Однако, как показали наши дальнейшие исследования в этом направлении, для практической реализации метода К.М. Денисова помимо ЭВМ необходим еще ряд дополнительных проработок, связанных с интерполяцией и экстраполяцией статистических характеристик осадков по территории бассейна, определением коэффициентов стока, скорости движения воды и другими работами в этом направлении.

Действительно, такие характеристики как $P_1(t)$ и $\lambda(t)$ вычисляются по данным метеорологических станций или постов и относятся только к этим пунктам, а какие их значения брать для действующей площади F_g ? По какой температуре $\theta(t)$ вычислять положение нулевой изотермы в бассейне? Ответов на эти вопросы в статье К.М. Денисова нет. Не дан также способ расчета коэффициента стока η .

Начнем с характеристик осадков. В цитируемой работе принято, что обеспеченность осадков $P_2(x)$ при условии, что они выпали, равна 10 в степени $-\lambda(t)x$. Чтобы избежать лишних множителей, мы примем ее равной e в степени $-\lambda(t)x$ (конечно, значение λ будет здесь другим), то есть

$$P_2(x) = \exp[-\lambda(t)x].$$

Тогда функция распределения $F_x(x)$ оказывается равной

$$F_x(x) = 1 - P_2(x) = 1 - \exp[-\lambda(t)x].$$

Плотность распределения $f(x)$ есть :

$$f(x) = \frac{dF_x}{dx} = \lambda(t) \exp[-\lambda(t)x] . \quad (30)$$

Это распределение называется экспоненциальным. Оно однопараметрическое и обладает тем свойством, что его математическое ожидание $\bar{x}$ и среднеквадратическое отклонение σ_x равны между собой :

$$\bar{x} = \sigma_x = \frac{1}{\lambda(t)} . \quad (31)$$

Равенство (31) дает способ вычисления $\lambda(t)$ по климатологическим данным. Для этого месячная сумма осадков делится на среднее число дней с осадками в этом месяце. Это дает среднее количество осадков за сутки в данном месяце, при условии, что они выпадали. Их обратная величина соответствует значению $\lambda(t)$, которое нужно отнести к середине месяца. Величины $\lambda(t)$ для каждых суток получаются затем путем интерполяции.

Проверка выполнимости экспоненциального распределения для осадков может быть осуществлена как с помощью χ^2 критерия, так и с помощью равенства (31). На рис.2 показана связь σ_x с $\bar{x}$ по данным четырех метеорологических станций, находящихся в Чирчик - Ахангаранском бассейне. Связь эта вполне значимая, однако среднеквадратическое отклонение осадков оказалось несколько больше их среднего значения. Проверка по χ^2 критерию на 5% уровне значимости подтвердила возможность использования для наших целей экспоненциального закона распределения осадков по их величине (при условии, что они выпадали).

В горных условиях одной из существенных пространственных координат, влияющих на гидрометеорологические характеристики, является высота местности z . В связи с этим следует считать, что P_1 , λ и θ зависят не только от времени t , но и от высоты местности z , то есть

$$P_1 = P_1(z, t) , \quad (32)$$

$$\lambda = \lambda(z, t) , \quad (33)$$

$$\theta = \theta(z, t) . \quad (34)$$

Пусть 1 — есть номер метеостанции, находящейся в бассейне или вблизи него в сходных физико-географических условиях, а j — номер месяца. Для каждого месяца, то есть фиксированного j , по определенным для каждой станции значениям P_{1j} , λ_{1j} и θ_{1j} построим их связь с высотой местности. Из-за небольшого числа станций, а также значительного разброса точек зависимость указанных характеристик от высоты местности принимается чаще всего линейной.

Обозначим через a_{pj} , $a_{\lambda j}$ и $a_{\theta j}$ соответственно вертикальные градиенты в j -ом месяце величин P_1 , λ и θ . Величины a_{pj} , как правило, положительные, то есть с увеличением высоты местности осадки выпадают чаще, а значения $a_{\lambda j}$ — отрицательные или близкие к нулю. Отрицательные значения $a_{\lambda j}$ свидетельствуют о том, что с увеличением высоты местности интенсивность осадков увеличивается. Вертикальный температурный градиент отрицательный и по модулю в летние месяцы больше, чем в зимние.

Выберем в бассейне некоторую фиксированную высоту Z_0 и, используя градиенты, приведем станционные значения P_{1j} , λ_{1j} и θ_{1j} к высоте Z_0 . Обозначим их через P_{1j}^* , λ_{1j}^* и θ_{1j}^* .

$$P_{1j}^* = P_{1j} + a_{pj} (Z_0 - z_1) \quad , \quad (35)$$

$$\lambda_{1j}^* = \lambda_{1j} + a_{\lambda j} (Z_0 - z_1) \quad , \quad (36)$$

$$\theta_{1j}^* = \theta_{1j} + a_{\theta j} (Z_0 - z_1) \quad . \quad (37)$$

Среднив по 1 значения величин P_{1j}^* , λ_{1j}^* и θ_{1j}^* , получим их средние значения P_j , λ_j и θ_j на высоте Z_0 — j -ый месяц.

$$P_j = \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} P_{1j}^* \quad , \quad \lambda_j = \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} \lambda_{1j}^* \quad ,$$

$$\theta_j = \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} \theta_{1j}^* \quad . \quad (38)$$

Значения P_j , λ_j и θ_j на любой высоте z есть :

$$P_j = P_j + a_{pj} (z - Z_0) \quad , \quad (39)$$

$$\lambda_j = \bar{\lambda}_j + a_{\lambda j} (z - z_0) \quad , \quad (40)$$

$$\theta_j = \bar{\theta}_j + a_{\theta j} (z - z_0) \quad . \quad (41)$$

Положение нулевой изотермы z_{gj} найдется из (41) приравняв θ_j нулю

$$z_{gj} = z_0 - \frac{\bar{\theta}_j}{a_{\theta j}} \quad . \quad (42)$$

Для расчета максимальных расходов величины P_{1j} и λ_j нужно брать средними по действующей площади F_g . Обозначим их как P_{1jg} и λ_{jg} .

$$P_{1jg} = \frac{1}{F_g} \int_{z_{\min}}^{z_{gj}} P_{1j} \frac{\partial F}{\partial z} dz = \frac{1}{F_{gj}} \left[P_{1j} (F(z_{gj}) - F(z_{\min})) + a_{pj} \left(F(z_{gj}) (z_{gj} - z_0) - F(z_{\min}) (z_{\min} - z_0) - \int_{z_{\min}}^{z_{gj}} F(z) dz \right) \right] .$$

Здесь z_{gj} - высота, ниже которой осадки выпадают в жидком виде, $z_{\min}$ - высота замыкающего створа, $F(z)$ - площадь бассейна ниже горизонтали z . В этой связи

$$F(z_{\min}) = 0, \text{ а } F(z_{gj}) = F_{gj} .$$

Тогда выражение для P_{1jg} запишется:

$$P_{1jg} = P_{1j} + a_{pj} \left(\left[z_{gj} - \frac{1}{F_{gj}} \int_{z_{\min}}^{z_{gj}} F(z) dz \right] - z_0 \right) \quad . \quad (43)$$

Выражение в квадратных скобках формулы (43) представляет собой средневзвешенную высоту бассейна z_{sgj} , площадь которого ограничена высотами z_{gj} и $z_{\min}$.

$$z_{sgj} = z_{gj} - \frac{1}{F_{gj}} \int_{z_{\min}}^{z_{gj}} F(z) dz \quad . \quad (44)$$

Сказанное позволяет записать

$$P_{1jg} = P_{1j}(z_{sgj}) = P_{1j} + a_{pj} (z_{sgj} - z_0) \quad , \quad (45)$$

то есть среднее по действующей площади P_{1jg} равно значению P_{1j} на уровне средневзвешенной высоты действующей площади. Аналогичные рассуждения по поводу λ_{jg} приводят к той же закономерности:

$$\lambda_{jg} = \lambda_j(Z_{sgj}) = \bar{\lambda}_j + a_{\lambda j} (Z_{sgj} - Z_0) . \quad (46)$$

И вообще, как показано в работах / 7, 10 /, если некоторая величина λ меняется с высотой по линейному закону, то ее среднее значение по площади равно значению λ на уровне средневзвешенной высоты этой площади.

Перейдем теперь к расчету коэффициента дождевого стока. Наиболее обстоятельные исследования по этому поводу для условий Средней Азии были проведены В.М. Денисовым / 2, 4, 5 /. Однако использование его результатов требует значительной информации, которой мы не всегда располагаем. Поэтому здесь будет рассмотрен более простой и возможно менее точный метод, приспособленный к нашей задаче и структурно близкий к методу В.М. Денисова.

Под коэффициентом дождевого стока с бассейна η_{jg} будем понимать следующую величину:

$$\eta_{jg} = \frac{x_{jg} - x_{\phi jg} - x_{*jg}}{x_{jg}} , \quad (47)$$

где x_{jg} - средний по действующей площади слой осадков за сутки в j -ый месяц.

$$x_{jg} = \frac{1}{\lambda_{jg}} , \quad (48)$$

$x_{\phi jg}$ - средний по действующей площади профильтровавшийся слой воды за сутки. Величину инфильтрации примем пропорциональной коэффициенту фильтрации за сутки, деленному на P_{1jg} . Величина, обратная P_{1jg} , равна отношению числа дней в месяце к числу дней в месяце с осадками, то есть равна среднему числу дней между осадками. Тогда

$$x_{\phi jg} = \alpha_{\phi} K_{\phi g} / P_{1jg} , \quad (49)$$

где α_{ϕ} - безразмерный коэффициент пропорциональности, $K_{\phi g}$ - средний по действующей площади коэффициент фильтрации.

Слой испарения за сутки x_{eJg} , как правило, на несколько порядков меньше инфильтрации и для расчета максимальных расходов дождевых вод им можно пренебречь. Тогда (47) запишется :

$$\eta_{\text{Jg}} = 1 - \alpha_{\text{ф}} \frac{\lambda_{\text{Jg}} K_{\text{фJg}}}{P_1 \text{Jg}} \quad . \quad (50)$$

Формула (50) для расчета коэффициента стока была бы справедливой, если бы не одно обстоятельство, заключающееся в том, что профильтровавшаяся вода может выклиниваться в замыкающем створе и при втором члене в этой формуле большим единицы коэффициент стока становится отрицательным, хотя в действительности он может быть положительным. Это обстоятельство мы учтем, выразив коэффициент стока следующим соотношением :

$$\eta_{\text{Jg}} = \exp \left[- \alpha_{\text{ф}} \frac{\lambda_{\text{Jg}} K_{\text{фJg}}}{P_1 \text{Jg}} \right] \quad . \quad (51)$$

Формула (51) совпадает с формулой (50) при малом показателе степени, то есть при больших коэффициентах стока.

Уточним, наконец, выражение для расчета скорости движения максимального расхода. Формула (13) является достаточно приближенной. Более поздние исследования В.М. Денисова показали / 3 /, что скорость движения V_L может быть выражена через расход воды Q и уклон i_p следующим образом :

$$V_L = \varepsilon_v (Q i_p)^{1/3} \quad , \quad (52)$$

где ε_v - коэффициент пропорциональности, имеющий размерность времени в степени минус две третьих, и равен примерно 2,44 если V_L выражать в м/с и 211, если эту скорость выразить в километрах в сутки.

После всего сказанного выражение (11) для дождевого расхода воды запишется :

$$Q_g = \left[\frac{K_1 \varepsilon_v}{K_4} \sqrt{P_g} i_p^{1/3} \times \exp \left[- \alpha_{\text{ф}} \frac{\lambda K_{\text{ф}}}{P_1} \right] \right]^{3/2} \quad . \quad (53)$$

Найдем из него величину x :

$$x = \frac{K_4}{K_1 E_v} \frac{Q_g^{2/3} \exp[\alpha_\Phi \lambda K_\Phi / P_1]}{\sqrt{F_g} 1_p^{1/3}} \quad (54)$$

Теперь формула (18) для расчета дождевого максимума примет вид :

$$P_g(Q_g^1 > Q_g) = 1 - \int_{t=1}^{365} \left[1 - P_1(t) \exp \left\{ - \lambda(t) \frac{K_4}{K_1 E_v} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{Q_g^{2/3} \exp[\alpha_\Phi \lambda(t) K_\Phi / P_1(t)]}{\sqrt{F_g} 1_p^{1/3}} \right\} \right] dt, \quad (55)$$

а для расчета смешанного максимума функция Φ , записанная выражением (23), будет равной :

$$\Phi = \lambda(t) \left[\frac{Q_{\max} - \frac{K_1 v_\Phi h P}{S + 7,5 \frac{v_\Phi^2}{S} (t - \tau_r)^2}}{\sqrt{F_g} 1_p^{1/3}} \right]^{2/3} \times \frac{K_4}{K_1 E_v} \times \\ \times \exp[\alpha \lambda(t) K_\Phi / P(t)]. \quad (56)$$

При отсутствии сведений о времени прохождения талого максимума τ_r оно определяется по его зависимости от средневзвешенной высоты бассейна Z_g .

После выполненных проработок нами совместно с К.М. Денисовым составлена на языке Turbo-Pascal программа расчета дождевых, талых и смешанных максимальных расходов воды. В качестве примера расчета по изложенной методике ниже приведены результаты вычислений смешанных максимальных расходов по рекам Чирчик – створ Ходжикент и Ангрен (Ахангаран) – створ Турк. Проведено сравнение рассчитанных смешанных максимальных расходов с их измеренными величинами.

Сравнения (рис.3, 4) подтверждают, что изложенный метод расчета смешанных максимальных расходов дает практически вполне приемлемые результаты.

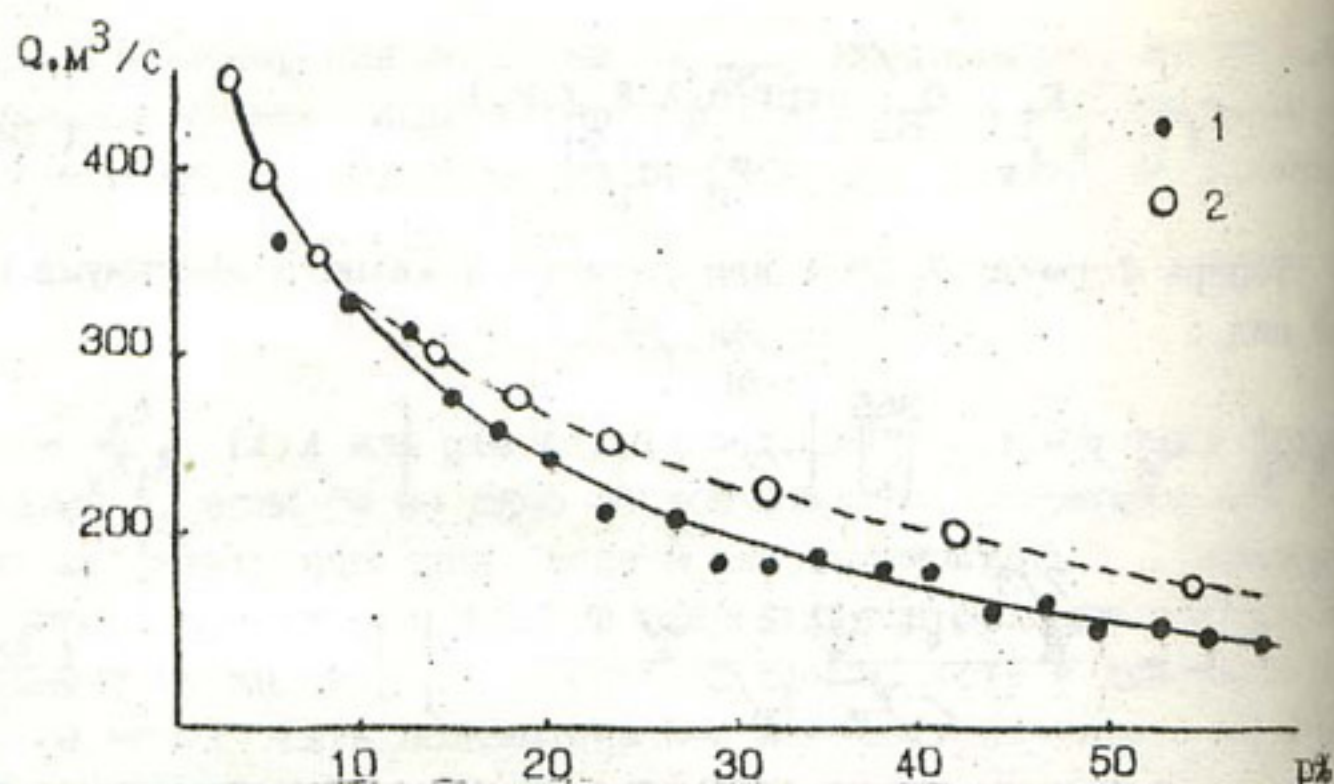


Рис. 3. Кривые обеспеченности смешанных максимальных расходов воды р. Ангрен, створ Турк. 1 — измеренные величины, 2 — рассчитанные.

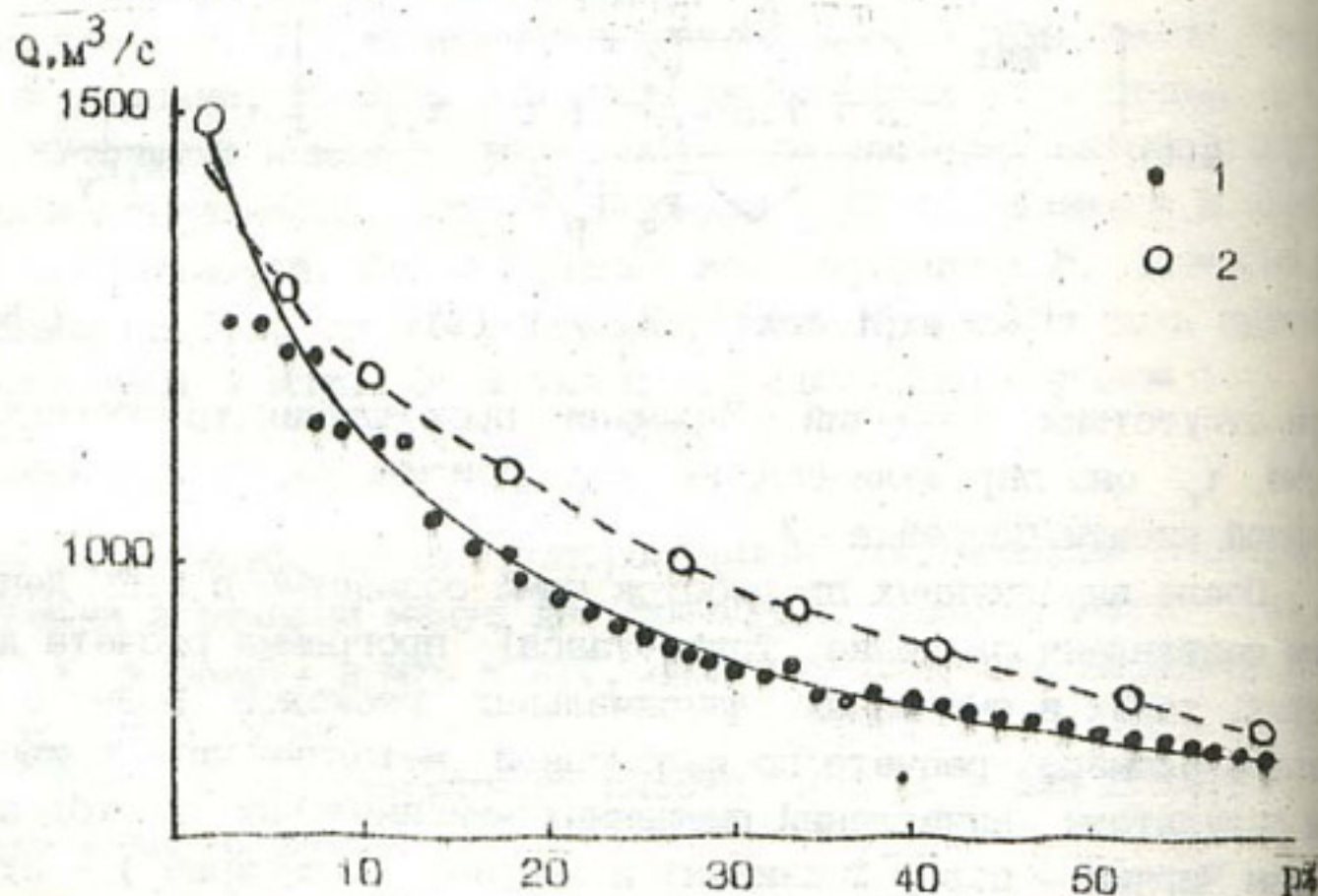


Рис. 4. Кривые обеспеченности смешанных максимальных расходов воды р. Чирчик, створ Ходжикент. 1 — измеренные величины, 2 — рассчитанные.

Список литературы

1. Алексеев Г. А. Расчет вероятных максимальных расходов воды и объемов стока снеговых и дождевых паводков // Тр. ГИ. - 1953. - Вып. 38(92). - С. 3 - 65.
2. Денисов В. М. О расчете дождевых паводков с малых водосборов Средней Азии // Метеорология и гидрология. - 1975. - № 7. - С. 81 - 90.
3. Денисов В. М. О средней скорости равномерного движения безнапорных турбулентных водотоков // Тр. САНИИ Госкомгидромета. - 1982. - Вып. 94(175). - С. 36 - 74.
4. Денисов В. М. О расчете максимальных расходов воды дождевых паводков // Тр. САНИИ Госкомгидромета. - 1986. - Вып. 119(200). - С.
5. Денисов В. М., Лаврухин А. Г. Упрощенный способ определения расчетных величин максимальных расходов воды дождевых паводков // Метеорология и гидрология. - 1993. - № 10. - С. 54 - 64.
6. Денисов К. М. Расчет максимальных расходов талых вод // Изв. АН УзССР, сер. техн. наук. - 1958. - № 2. - С. 81 - 90.
7. Денисов К. М. Схема расчета гидрографа стока горных рек. - Л.: Гидрометеоиздат, 1965. - 102 с.
8. Денисов К. М. Некоторые пути расчета смешанных максимальных расходов горных рек // Тр. САНИИМИ. - 1968. - Вып. - 32(17). - С. 13 - 24.
9. Денисов К. М., Мурза Л. М. Половодье и максимальные расходы // Ресурсы поверхностных вод СССР, т. 14, Средняя Азия, вып. 1, бассейн Сыр-Дарьи. - Гидрометеоиздат. - 1969. - С. 179 - 206.
10. Математическое моделирование процесса стока горных рек / Л.Н. Боровикова, К.М. Денисов, Е.Б. Трофимова, И.Д. Шенцис // Тр. САНИИМИ. - 1972. - Вып. 61(76). - 151 с.
11. Черноголов В. П. Составляющие расходов воды в периоды половодий и расчет максимальных расходов реки Ангрен у ст. Турк // Труды ТГО. - 1957. - Вып. 15(16). - С. 70 - 87.

МЕТОД ОЦЕНКИ ВОДОБЕСПЕЧЕННОСТИ ОРОШАЕМОЙ ТЕРРИТОРИИ

Состояние вопроса

К настоящему времени большинство рек Средней Азии подвержено интенсивному антропогенному воздействию. Главным потребителем водных ресурсов здесь является сельское хозяйство с его использованием воды на орошение. Это приводит к необходимости детального анализа имеющейся гидрологической информации, усовершенствования методики водохозяйственных расчетов с целью обеспечения принятия оптимальных решений по управлению водохозяйственными системами.

Обычно для оценки гарантированности покрытия требований орошаемого земледелия используют метод сравнения расчетных объемов водопотребления с фактическим гидрографом стока к заданному уровню обеспеченности, который, как правило, принимается равным 90%. Это касается годового объема стока.

Вместе с тем очень важно знать распределение водобеспеченности орошаемой территории в течение года по заданным периодам внутри года.

Разработка методики

Обозначим через Q_{pj} - среднемесячный расход воды j -го месяца, необходимый всем потребителям, Q_{ij} - среднемесячный расход i -го года и j -го месяца, протекающий через данный створ. Тогда

$$x_{ij} = Q_{ij} - Q_{pj} \quad (1)$$

при $x_{ij} \geq 0$ эта величина представляет собой избыток, при $x_{ij} < 0$ - недостаток стока для потребителей в j -ом месяце i -го года.

Просуммировав (1) по j от 1 до 12 и умножив эту сумму на T - число секунд в году, получим

$$Y_{gi} = T_g \sum_{j=1}^{i=12} x_{ij} \quad (2)$$

Величина Y_{gi} представляет собой годовой избыток стока при $Y_{gi} \geq 0$ или его недостаток при $Y_{gi} < 0$ для потребителей воды.

Аналогично (2) можно ввести сумму значений x_{ij} для вегетационного периода

$$Y_{vi} = T_v \sum_{j=t_v}^{t_{vk}} x_{ij} \quad (3)$$

где T_v - продолжительность вегетационного периода, с; t_{vn} , t_{vk} - начало и конец вегетационного периода, соответственно.

Для каждого месяца, то есть при фиксированном j , можно построить кривые обеспеченности $P_x(x; j)$ величин x_{ij} , расположив их в убывающем порядке. В этом случае, как не трудно понять, величина $P_x(0; j)$ будет представлять собой вероятность того, что в j -ом месяце потребитель не будет испытывать недостатка в воде.

Расположим в убывающем порядке значения Y_{gi} и построим их кривую обеспеченности $P_g(Y_g)$. Тогда величина $P_g(0)$ есть вероятность того, что годовой объем стока реки окажется равным или большим годового объема воды, необходимого потребителям, хотя внутри года в отдельные месяцы потребитель может испытывать ее дефицит.

При вероятности $P_g(0)$, не сильно отличающейся от 1, внутригодовой дефицит воды может быть устранен путем строительства водохранилища.

Введем следующую динамическую характеристику $Z_1(k)$, определяемую равенством:

$$Z_1(k) = \sum_{j=1}^{j=k} \tau_j x_{ij} \quad (4)$$

где τ_j - число секунд в j -ом месяце, k - номер месяца.

Функция $Z_1(k)$ представляет собой разницу между объемом стока от начала года до k -го месяца включительно и объемом

водопотребления за это же время для i -го года. Она является более обобщенной характеристикой, так как из нее могут быть получены все ранее введенные величины

$$x_{ij} = [Z_i(j) - Z_i(j-1)] / \tau_j, \quad (5)$$

$$Y_{gi} = Z_i(12), \quad (6)$$

$$Y_{vi} = Z_i(9) - Z_i(3). \quad (7)$$

При фиксированном k для функции $Z_i(k)$, располагая ее в убывающем порядке, также может быть найдена ее обеспеченность $P_z(Z; k)$. В этом случае $P_z(0; k)$ будет представлять собой вероятность того, что объем стока реки от начала года до месяца k включительно будет больше или равен объему водопотребления за этот же промежуток времени.

Кроме этого, функция $Z_i(k)$ описывает основную долю приращения объема водохранилища от начала i -го года до k -го месяца этого года включительно. Добавок определяет месячные суммы осадков A_{xij} , испарения E_{ij} , а также величину фильтрации $U_{\phi ij}$, то есть

$$\begin{aligned} W_i(k) = W_{i-1}(12) + \sum_{j=1}^{j=k} x_{ij} + \sum_{j=1}^{j=k} [F_{ij}(A_{xij} - E_{ij}) - \\ - \Omega_{ij} U_{\phi ij}] = W_{i-1}(12) + Z_i(k) + \\ + \sum_{j=1}^{j=k} [F_{ij}(A_{xij} - E_{ij}) - \Omega_{ij} U_{\phi ij}], \end{aligned} \quad (8)$$

где $W_i(k)$ - объем воды в водохранилище в i -ом году в конце k -го месяца, $W_{i-1}(12)$ - объем воды в водохранилище в $i-1$ году в конце декабря; F_{ij} - площадь поверхности воды в водохранилище в i -ом году и j -ом месяце; Ω_{ij} - площадь боковой поверхности (включая дно) водохранилища ниже уровня воды.

Полезно, наконец, рассмотреть отдельно статистические характеристики положительных x_{ij}^+ (избыток воды) и отрицательных x_{ij}^- (недостаток воды - дефицит водособеспеченности), от-

метить их наибольшие $x_{i\max}^+$, $x_{i\max}^-$ и средние значения x_{is}^+ , x_{is}^- в конкретном i -ом году, а также получить по реализации за N лет их обеспеченности $P(x_{\max}^+)$, $P(x_{\max}^-)$, $P(x_s^+)$, $P(x_s^-)$ и моменты распределения.

Расчет по исходной информации всех рассмотренных характеристик стока реки для заданного створа позволит принять оптимальные решения по водохозяйственному использованию водных ресурсов реки.

Вопрос о необходимости удлинения (восстановления) гидрологических рядов наблюдений связан с допустимой относительной погрешностью определения статистических характеристик данного ряда ε и коэффициентом вариации C_v . Число членов ряда, удовлетворяющих данным условиям для среднемесячных расходов, определяется формулой

$$n \geq \left[\frac{100}{\varepsilon} C_v \right]^2, \quad (9)$$

где ε — заданная относительная погрешность (%) среднемесячных расходов воды.

Результаты расчетов для орошаемой территории бассейна р. Санзар и их обсуждение

Санзар относится к рекам, водные ресурсы которых широко используются на орошение. Область формирования стока этой реки расположена между восточной оконечностью Туркестанского хребта и Мальгузарским хребтом, являющимся его отрогом.

Площадь водосбора р. Санзар, ограниченная створом кишл. Кырк, составляет 570 км^2 , средневзвешенная высота — $2,07 \text{ км}$, среднеквадратичное отклонение высот (σ_h) — $0,45 \text{ км}$. Средний многолетний расход равен $2,12 \text{ м}^3/\text{с}$, коэффициент вариации годового стока — $0,28$, наибольший зафиксированный максимальный расход — $39,9 \text{ м}^3/\text{с}$ (1966 год) при его норме в $13,6 \text{ м}^3/\text{с}$. Несколько выше ирригационного веера у г. Джилак площадь бассейна р. Санзар составляет 2526 км^2 , а среднемноголетний расход около $4 \text{ м}^3/\text{с}$.

В р. Санзар ниже створа кишл. Кырк впадает искусственный

водоток – канал Искитуютартар, несущий воды р.Зеравшан. Орошаемая площадь в бассейне р. Санзар ниже канала Искитуютартар составляет около 50 тыс. га .

Решение проблемы оптимального использования воды реки Санзар для заданного створа связано с потребностями сельского хозяйства и других потребителей и водопользователей, подвешенных к этому створу.

В расчетах использовались среднемесячные данные расходов воды р.Санзар – кишл.Кырк за период наблюдений с 1949 по 1990, для канала Искитуютартар за период с 1965 по 1993 годы. Статистические характеристики среднемесячных расходов воды для р.Санзар и канала Искитуютартар приведены в табл.1.

Для р.Санзар – кишл.Кырк коэффициент вариации среднемесячных расходов воды за период вегетации составляет примерно 0,5 (табл. 1). При допустимой погрешности в определении нормы среднемесячного расхода воды в 8 % по формуле (9) получим, что $n = 38$ лет. Так как число лет наблюдений по р. Санзар – кишл.Кырк равно 42, то есть больше 38, то в удлинении ряда наблюдений среднемесячных расходов воды нет необходимости.

Проектный водозабор (брутто) на покрытие водопотребления орошаемого земледелия по Бахмальскому, Галляаральскому и Дзизакскому районам представлен в табл.2.

Нами проведены расчеты водообеспеченности оросительных систем р.Санзар и канала Искитуютартар по вышеизложенной методике.

В качестве примера интерпретации результатов расчетов рассмотрим Бахмальский орошаемый массив, включающий оросительные системы канала Искитуютартар и р.Санзар.

Оросительная система – канал Искитуютартар, площадь орошения 7126 га.

Значения x_{ij} (отклонения от проектного водопотребления) и их обеспеченности были рассчитаны за период 1965–1993 годы. В табл.3-4 приведены статистические характеристики дефицита водообеспеченности и избытка воды по месяцам. Даны также и значения для различной обеспеченности.

На рис.1а представлены кривые обеспеченности x_{ij} за мес-

Таблица 1

Статистические характеристики среднемесячных расходов воды
канала Искитуютартар и р. Санзар

Месяц	Число лет	$Q, \text{м}^3/\text{с}$	σ	C_v	C_s	C_z
Канал Искитуютартар						
I	29	2,16	3,15	1,46	2,378	6,285
II	29	2,77	3,18	1,15	1,049	0,225
III	29	2,86	2,97	1,04	0,676	-0,915
IV	29	2,16	2,71	0,86	0,338	-1,007
V	29	8,07	4,75	0,59	1,694	5,527
VI	29	22,60	4,60	0,20	-0,351	-0,481
VII	29	29,30	4,90	0,17	0,505	1,126
VIII	29	24,30	5,50	0,23	0,064	-0,900
IX	29	10,20	5,40	0,53	1,829	3,430
X	29	4,72	5,19	1,10	2,873	9,287
XI	29	2,41	3,41	1,41	2,023	3,562
XII	29	1,55	2,86	1,84	3,601	13,693
р. Санзар - кишл. Кырк						
I	42	1,23	0,37	0,31	1,631	5,853
II	42	1,27	0,27	0,21	0,119	-0,447
III	42	1,77	0,63	0,36	1,638	3,881
IV	42	3,67	2,03	0,55	0,720	-0,532
V	42	5,45	2,80	0,51	0,397	-0,710
VI	42	2,80	1,71	0,61	1,168	1,380
VII	42	1,22	0,31	0,67	1,495	2,186
VIII	42	0,90	0,53	0,58	0,723	0,433
IX	42	0,87	0,37	0,42	0,216	-0,409
X	42	1,06	0,30	0,28	-0,212	-0,095
XI	42	1,24	0,36	0,29	1,170	2,505
XII	42	1,23	0,34	0,28	1,053	3,072

Примечание. Q - среднее, σ - среднее квадратическое отклонение, C_v - коэффициент вариации, C_s - коэффициент асимметрии, C_z - эксцесса.

цы вегетационного периода.

Расчеты показали, что подвешенные площади орошения к оросительной системе канала Искитуютартар в вегетационный период (май - сентябрь) и месяцы промывочных работ (ноябрь, декабрь), испытывают дефицит водособеспеченности. В мае и ноябре система обеспечена водой только на 3,3%.

По рассчитанным значениям $Z_1(k)$ с 1965 по 1993 год следует, что только четыре месяца года (январь - апрель, величина

Проектный водозабор (брутто) на покрытие водопотребления
орошаемого земледелия, млн. м³

Административный район, ороситель- ная система	Площадь ороше- ния, га	КлД	М е с я ц ы											
			I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Бахмальский Искитутартар Санзар Сай, родники	7126	0,65	-	-	-	-	7,6	18,2	23,3	21,6	12,4	-	4,5	4,5
	1286	0,70	-	-	-	-	1,2	2,8	3,6	21,6	1,9	-	-	-
	4158	0,61	-	-	-	-	4,5	11,0	14,1	21,6	7,5	-	1,3	1,0
Гадлянаральский Искитутартар Санзар Сай, родники	9133	0,62	-	-	-	-	7,5	21,6	27,5	21,6	15,3	-	6,3	6,1
	731	0,68	-	-	-	-	0,6	1,4	1,9	21,6	1,0	-	0,5	0,4
	1633	0,61	-	-	-	-	1,3	3,9	5,0	21,6	2,8	-	1,2	1,1
Дживахский Искитутартар Дживахское водохранилище Южный Голодно- степский канал Сай, родники	19478	0,68	-	-	-	-	8,2	36,5	50,8	21,6	22,2	-	1,9	1,9
	5537	0,79	-	-	-	-	2,5	10,1	12,7	21,6	5,4	-	0,5	0,5
	2526	0,81	-	1,3	1,3	0,4	0,9	4,9	6,1	21,6	1,4	-	0,5	0,4
Сай, родники	576	0,66	-	-	-	-	0,3	1,2	1,6	21,6	0,6	-	0,1	0,1
														5,4

Примечание. КлД - коэффициент полезного действия оросительных систем.

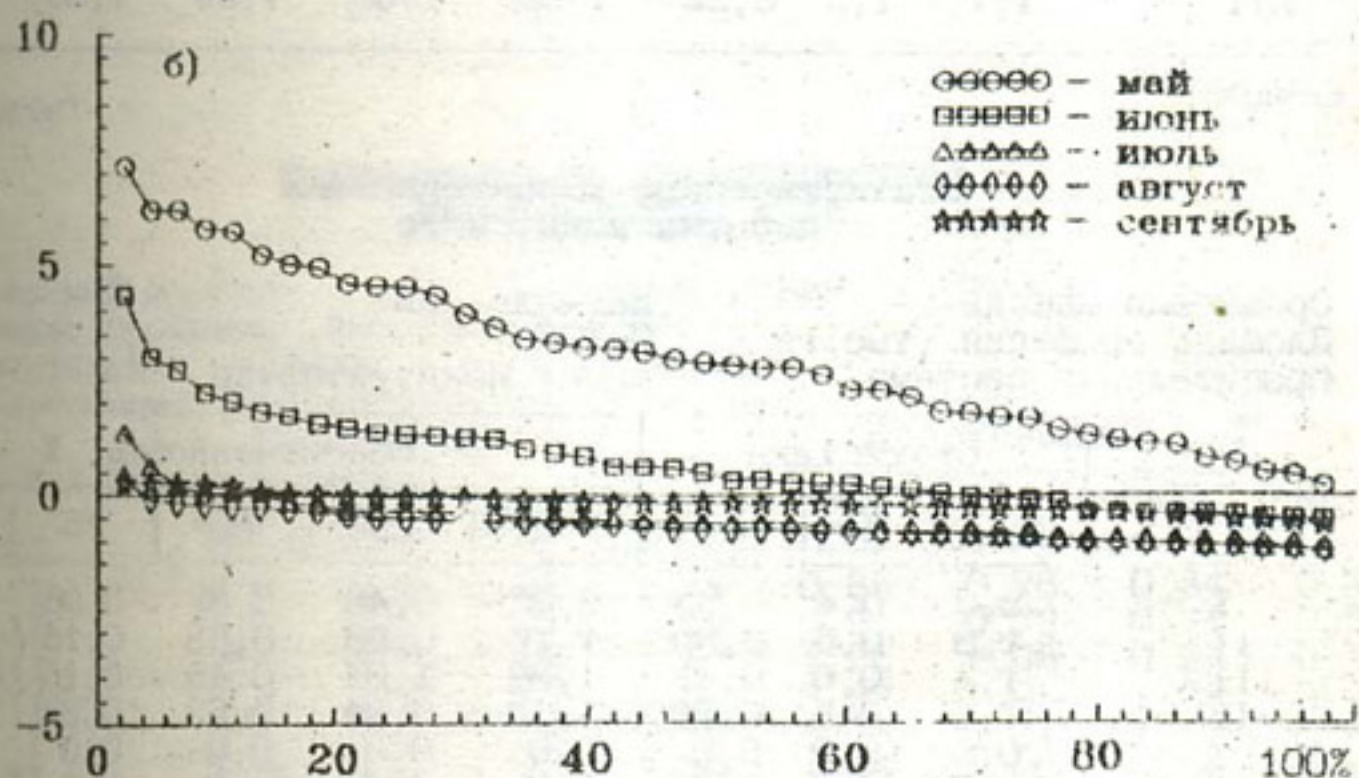
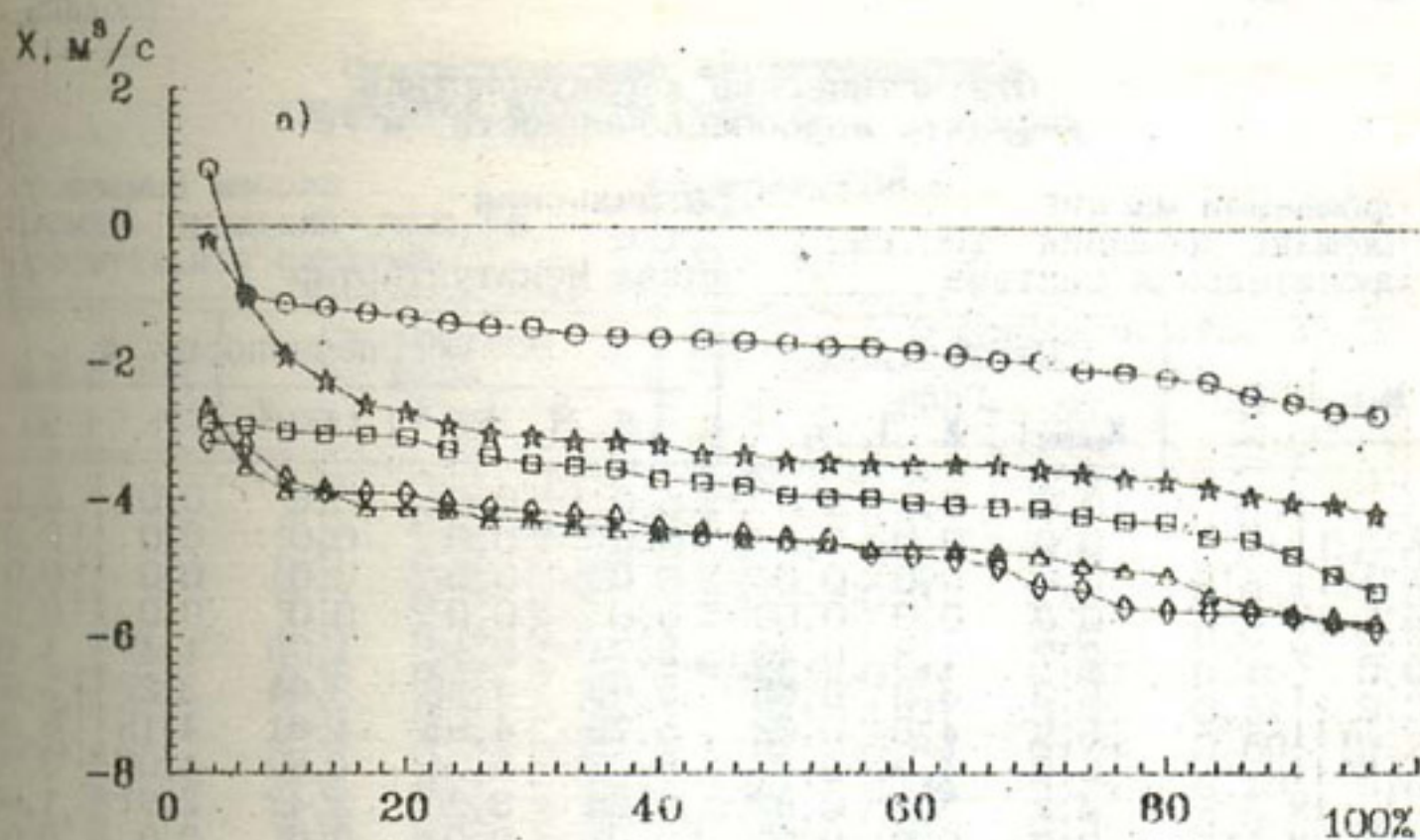


Рис. 1. Кривые обеспеченности ($X_{ij} = Q_{ij} - Q_{pi}$) за месяцы вегетационного периода для Бахмаловского орошаемого массива: а) оросительная система канала Искитуй-Тартар; б) оросительная система р.Зеравшан.

**Статистические характеристики
дефицита водообеспеченности, м³/с**

Орошаемый массив - Бахмальский
Площадь орошения, тыс. га - 7,126
Оросительная система - канал Искитуйтартар

Месяц	Статистика ряда			Обеспеченность, %				
	X _{max}	X	б	5	25	50	75	90
I	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
II	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
III	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
IV	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
V	2,7	1,8	0,46	2,74	2,12	1,70	1,47	1,1
VI	5,3	3,9	0,65	5,09	4,22	3,94	3,27	3,0
VII	5,8	4,6	0,68	5,75	4,95	4,61	4,15	3,8
VIII	5,9	4,7	0,77	5,77	5,31	4,58	4,07	3,7
IX	4,2	3,1	0,87	4,05	3,60	3,42	2,91	1,9
X	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
XI	1,7	1,4	0,42	1,74	1,70	1,56	1,38	0,7
XII	1,7	1,5	0,22	1,68	1,66	1,59	1,36	1,2

Таблица

**Статистические характеристики
избытка воды, м³/с**

Орошаемый массив - Бахмальский
Площадь орошения, тыс. га - 7,126
Оросительная система - канал Искитуйтартар

Месяц	Статистика ряда			Обеспеченность, %				
	X _{max}	X	б	5	25	50	75	90
I	2,3	0,4	0,53	2,32	0,48	0,32	0,06	0,0
II	1,8	0,6	0,50	1,76	0,88	0,53	0,16	0,0
III	1,4	0,6	0,47	1,39	1,04	0,46	0,16	0,0
IV	1,2	0,6	0,30	1,18	0,81	0,52	0,38	0,2
V	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
VI	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
VII	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
VIII	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
IX	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
X	1,3	0,8	0,83	2,08	0,96	0,45	0,32	0,16
XI	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
XII	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Примечание. X_{max} - максимальная величина, X - среднее значение, б - среднее квадратичное отклонение.

Таблица 5

**Статистические характеристики
дефицита водообеспеченности, м³/с**

Орошаемый массив - Бахмальский
Площадь орошения, тыс. га - 1,286
Оросительная система - р. Санзар

Месяц	Статистика ряда			Обеспеченность, %				
	X _{max}	X	б	5	25	50	75	90
I	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
II	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
III	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
IV	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
V	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
VI	0,5	0,3	0,18	0,54	0,44	0,40	0,10	0,03
VII	1,2	0,7	0,30	1,19	1,01	0,65	0,51	0,35
VIII	1,2	0,7	0,30	1,16	0,89	0,78	0,50	0,25
IX	0,6	0,3	0,17	0,59	0,36	0,25	0,15	0,03
X	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
XI	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
XII	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Таблица 6

**Статистические характеристики
избытка воды, м³/с**

Орошаемый массив - Бахмальский, р. Санзар
Площадь орошения, тыс. га - 1,286
Оросительная система - р. Санзар

Месяц	Статистика ряда			Обеспеченность, %				
	X _{max}	X	б	5	25	50	75	90
I	1,8	0,8	0,24	1,28	0,85	0,76	0,64	0,56
II	1,2	0,8	0,17	1,09	0,91	0,79	0,71	0,57
III	2,7	1,1	0,40	1,97	1,26	1,05	0,90	0,73
IV	5,4	2,3	1,30	5,05	3,32	1,95	1,38	0,93
V	7,1	3,0	1,79	6,19	4,53	2,84	1,67	0,71
VI	4,3	1,2	1,00	3,00	1,55	1,00	0,32	0,14
VII	1,4	0,4	0,48	1,37	0,63	0,05	0,04	0,04
VIII	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
IX	0,3	0,2	0,12	0,31	0,26	0,21	0,02	0,01
X	1,0	0,7	0,19	1,01	0,80	0,66	0,57	0,40
XI	1,6	0,8	0,23	1,24	0,87	0,79	0,65	0,54
XII	1,6	0,8	0,22	1,29	0,86	0,75	0,67	0,56

Примечание. X_{max} - максимальная величина, X - среднее значение, б - среднее квадратичное отклонение.

ны $Z_1(k)$ имеют положительные значения, а в остальные месяцы – отрицательные величины. Это указывает на то, что в годовом разрезе оросительная система канала Искитуйтартар практически не обеспечена водными ресурсами.

С целью оценки избытка воды и ее дефицита были отдельно рассчитаны обеспеченности величин x_j^+ и x_j^- для каждого месяца и сезонов года. Из результатов расчетов следует, что дефициты, как отмечалось выше, наблюдаются во все месяцы вегетационного периода (май – сентябрь). Их среднее значения: май – 1,8, июнь – 3,9, июль – 4,6, август – 4,7, сентябрь – 3,1 м³/с. Значения дефицитов 5 %-ной обеспеченности в указанные месяцы соответственно равны: 2,74, 5,09, 5,75, 5,77, 4,05.

Оросительная система – р.Санзар, площадь орошения – 1286 га.

Значения x_{ij} рассчитаны за период 1949 – 1990 годы. Статистические характеристики дефицита водособеспеченности и избытка воды, а также величины для различных значений обеспеченности представлены в табл.5,6. Кривые обеспеченности значения x_{ij} , найденные по данным наблюдений за месяцы вегетационного периода, показаны на рис.16.

Исходя из представленных данных (табл.5,6) и графиков (рис.16), можно определенно указать с какой обеспеченностью будут удовлетворены водопотребители данной оросительной системы естественным стоком реки за различные месяцы года. Данная гидромелиоративная система полностью обеспечена водой в январе – мае и октябре – декабре. В июне система обеспечена стоком на 67,4 %, в июле – на 14,0, в августе – на 2,3 и в сентябре – на 21,0. Рассчитанные значения $Z_1(k)$ с 1949 по 1990 год констатируют, что по данной оросительной системе отсутствуют отрицательные значения $Z_1(k)$, кроме сентября и октября 1977 и 1986 годов, когда наблюдались небольшие отрицательные значения.

Проведенные исследования показывают, что водные ресурсы р.Санзар вместе с каналом Искитуйтартар в интегральном виде в целом не обеспечивают водопотребление орошаемого массива Бахмальского района.

ИНЕРЦИОННЫЙ МЕТОД СГЛАЖИВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Задача сглаживания временных рядов в гидрометеорологии занимает особое место. Основной проблемой в ней является выбор критерия оптимальности сглаживания для выявления имеющегося тренда. Например, при сглаживании скользящим средним ставится вопрос о количестве членов ряда, для которого берется осреднение. Как указывается в [2], в рамках теории вероятностей качество функционального оператора, дающего наилучший, в некотором смысле, результат по всему множеству реализаций, можно оценить лишь статистически, в среднем по всему множеству возможных реализаций случайной функции.

Как правило, в качестве критерия оптимальности используется метод наименьших квадратов, но как показано в [4], оценка по методу наименьших квадратов эффективна лишь в случае нормального распределения случайной ошибки.

В данной работе временной ряд предлагается рассматривать в виде совокупности различного рода колебаний, как периодических, так и непериодических. В этом случае временной ряд исследуется на предмет выявления закономерностей в образовании составляющих его колебаний.

Рассмотрим временной ряд $\{ W_t, t \in T \}$, где W_t — вектор случайных значений, T — время. Представим данный ряд в виде двух связанных по индексу векторов соответствующим образом, $\vec{Q}_1, \vec{Z}_1, 1 \in N$, где Q_1 — числовые значения наблюдаемой величины, Z_1 — значения времени, N — множество натуральных чисел, тогда :

$$Q_1 = W_t ; \quad Z_1 = t . \quad (1)$$

Эта совокупность двух векторов представляется в виде пространственно-временной зависимости. Теперь временной ряд формирует некоторое статичное двумерное пространство,

которому принадлежит совокупность точек, выражаемая как множество:

$$A(y, x) = \{ Q_1, Z_1 \}, \quad (2)$$

где y, x — координаты по соответствующим осям.

Рассмотрим данное пространство, как плоское поле сил, влияющее на движение материальной точки, принадлежащей этому пространству. Поле сил формируется центральным полем точек, составляющих множество $A(y, x)$, в котором потенциальная энергия подвижной материальной точки зависит только от расстояния до неподвижной точки множества $A(y, x)$. Сила также зависит от расстояния и направлена вдоль радиус-вектора, как указывается в [3]:

$$\vec{F} = - \frac{dU}{dR} \frac{\vec{R}}{R}, \quad (3)$$

где R — радиус — вектор, U — потенциальная энергия подвижной точки.

Для описания траектории движения материальной точки используем уравнение:

$$\vec{v} = \frac{\partial x}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial t} \vec{j}, \quad (4)$$

где $v_x = \frac{\partial x}{\partial t} \vec{i}$, $v_y = \frac{\partial y}{\partial t} \vec{j}$, v_x, v_y — проекции вектора скорости на соответствующие оси, $\vec{i}, \vec{j}$ — единичные орты.

В качестве уравнения, определяющего скорость движения, используем закон Ньютона, описывающий движение материальной точки массой m в инерциальной системе отсчета:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{k \in N} \vec{F}_k, \quad (5)$$

где $\vec{F}_k$ — силы, действующие на подвижную точку.

Чтобы получить траекторию движения точки в виде некоторой линии сглаживания, принимаем следующую гипотезу влияния:

$$\vec{F}_k = C \left| R_k \right|^n \left[\frac{\partial x}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial t} \vec{j} \right], \quad (6)$$

где C, n — некоторые коэффициенты взаимодействия, R_k — расстояние от k -той точки множества A до подвижной точки m .

Для евклидова пространства расстояние принимается так:

$$R_k = \sqrt{(x_k - x_m)^2 + (y_k - y_m)^2}. \quad (7)$$

Для численного решения поставленной задачи необходимо определить начальное значение (местоположение) точки. При условии, что пространство описывается декартовой системой координат, определим начальное местоположение точки, равное первой точке упорядоченного множества по времени:

$$x_m^0 = x_1^1, \quad y_m^0 = y_1^1. \quad (8)$$

Имея в виду, что множество A упорядочено по времени, начальное значение вектора скорости принимается следующим: $V_x = \text{const}, V_y = 0$.

Для численного решения траектории движения точки воспользуемся конечно — разностной схемой. При использовании неявной схемы с соответствующими подстановками получим:

$$\begin{cases} x_m^{t+\tau} = x_m^t + \tau V_x^t + \frac{\tau^2}{4m} \left(F_x^{t+\tau} + F_x^t \right), \\ y_m^{t+\tau} = y_m^t + \tau V_y^t + \frac{\tau^2}{4n} \left(F_y^{t+\tau} + F_y^t \right), \end{cases} \quad (9)$$

где τ — шаг интегрирования по времени, для которого устой-

чивость численной схемы определяется условием :

$$\tau \leq \frac{4 \text{ м}}{|V_{x,y}|} \quad (10)$$

Если при определении суммы сил рассматривать все множество точек, то в этом случае траектория движения материальной точки будет искажена относительно всей совокупности ускорением общего центра масс (геометрического центра), причем ускорение будет менять не только абсолютные значения, но и знак. Поэтому предлагается использовать силу влияния только той точки, которая наиболее близка по расстоянию к точке m в направлении x из упорядоченного множества A , тогда составляющие силы представляются в виде :

$$\begin{cases} P_x^t = 0 \\ P_y^t = C |R_{1m}|^n \text{sign}(y_1 - y_m) \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{где } \text{sign}(y_1 - y_m) = \begin{cases} -1 & \text{при } (y_1 - y_m) < 0 \\ 0 & \text{при } (y_1 - y_m) = 0 \\ 1 & \text{при } (y_1 - y_m) > 0 \end{cases} \quad (12)$$

Для исключения суммарного воздействия инерционных составляющих на траекторию движущейся точки, возникающего в результате сложения сил, необходимо включение в расчетную схему силы сопротивления движению, пропорциональной скорости движения следующего вида :

$$\vec{P}_m^c = -\alpha \vec{V}_d \quad (13)$$

здесь α — некоторый параметр сопротивления.

Полученная траектория движения материальной точки описывает минимум силового влияния заданного пространства при постоянной составляющей скорости по оси x для данных начальных условий. Данная траектория служит для последующего сглаживания в качестве основания проекции y . На основании полученной траектории проекции исходных точек множества на функцию строится новое пространство, для которого также определяется проекция движения.

Многократное (итерационное) вычисление траекторий и их последующее представление в трехмерное пространство дает пространственное изменение силового влияния по направлению z , на основании которого можно выделить группы точек, определяющие влияние как тенденцию изменения при отклонении вектора скорости в направлении оси z .

В некоторых практических случаях численные значения наблюдаемой величины могут иметь весовой коэффициент или дополнительную степень доверия. Тогда не представляет особого труда включение в силу влияния дополнительных весовых коэффициентов для точек пространства P_1 :

$$\begin{cases} P_x^t = \alpha V_{m,x} , \\ P_y^t = C |R_{1m}|^n \text{sign}(y_1 - y_m) P_1 - \alpha V_{m,y} , \end{cases} \quad (14)$$

где P_1 - весовой коэффициент (степень доверия) 1 - той точки по отношению ко всему множеству. В этом случае энергетическое поле точек будет зависеть от двух параметров : пространства и весовых коэффициентов. Тогда будет получена некоторая вероятностная траектория хода параметра.

Физическая обоснованность данного метода состоит в том, что полученная сглаженная линия является траекторией движения точки в инерциальной системе. На перемещение точки степень концентрации (скученность) элементов временного ряда оказывает большее влияние, чем единичные элементы, даже со

значительными отклонениями от среднего. Материальная точка, обладая инерцией, на отдельные флуктуации реагирует слабее, чем на совокупное расположение элементов.

Данный метод был использован для получения сглаживающих функций при анализе среднегодовых чисел Вольфа солнечной активности. На рис.1 представлен итерационный процесс сглаживания при $C = 0,8$ и $n = 2,0$ в виде силовой поверхности. Полученная поверхность может рассматриваться как результат фильтрации колебаний различной интенсивности, образующих ряд чисел Вольфа. Обращаем внимание на то, что количество экстремумов сглаживающей функции уменьшается при увеличении числа итераций.

Нами были проведены исследования по поведению сглаживающей функции. Была задана различная степень влияния для элементов ряда по отношению к среднему. В первом случае для элементов ряда, превышающих среднее значение, степень влияния была увеличена в четыре раза. Во втором случае правило было обратным, то есть была увеличена степень влияния для элементов, которые меньше среднего, что представлено следующим образом:

$$P_1 = \begin{cases} 4 & \text{при } y_1 > \bar{y}_1 \\ 1 & \text{при } y_1 \leq \bar{y}_1 \end{cases} \quad (15)$$

$$P_1 = \begin{cases} 4 & \text{при } y_1 < \bar{y} \\ 1 & \text{при } y_1 \geq \bar{y} \end{cases} \quad (16)$$

Результаты расчетов с использованием вышеприведенных правил представлены на рис.2. Поведение сглаживающей линии в обоих случаях почти одинаково в направлении X , что указывает на устойчивость расчетной схемы относительно частных флуктуаций. Однако сама линия занимает положение согласно значимости весовых коэффициентов. Необходимо заметить, что среднее квадратическое отклонение числовых значений ряда от

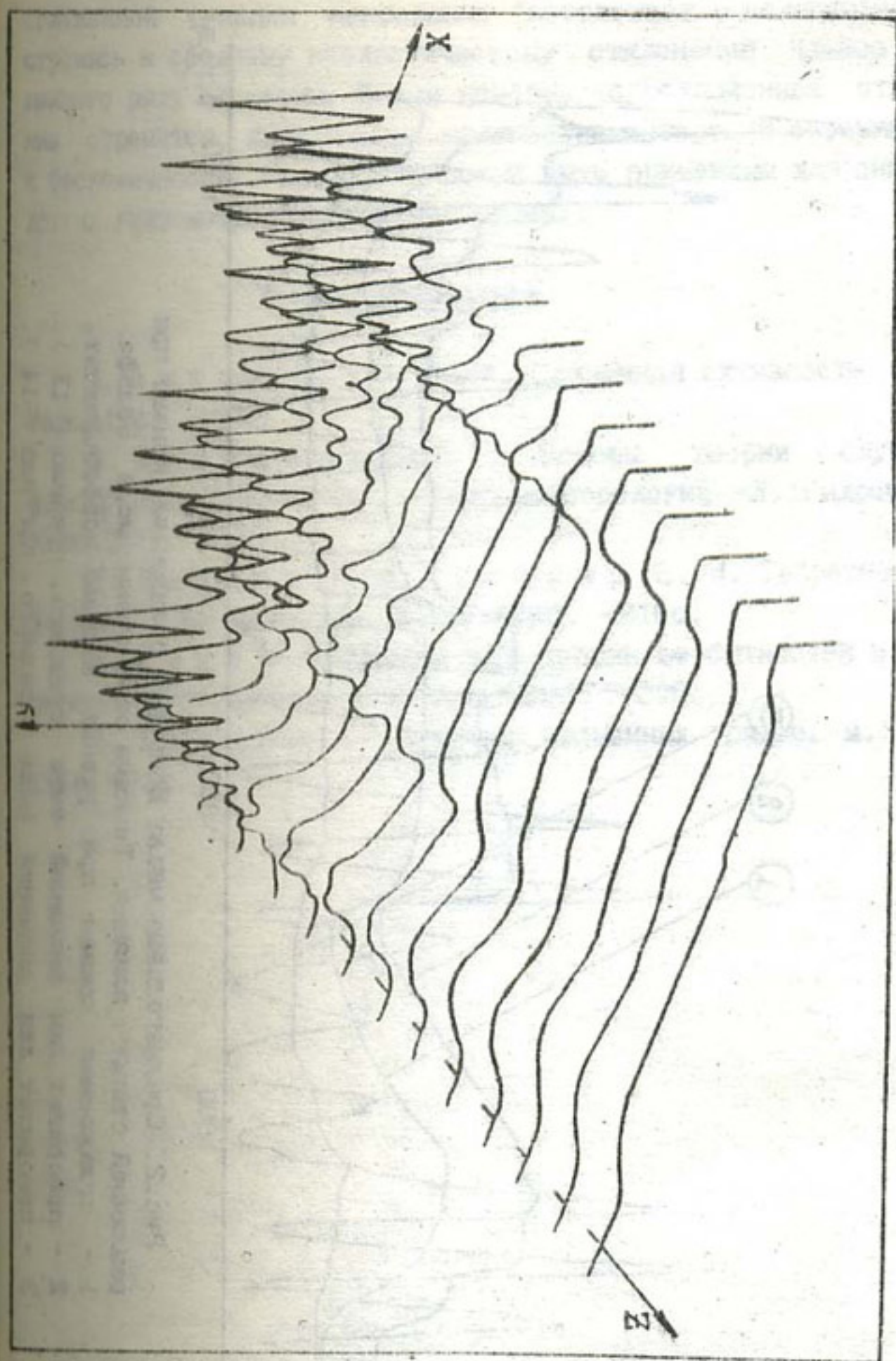


Рис... Поверхность сглаживания временного ряда (числа Вольфа).
 x - время, y - среднегодовые числа Вольфа, z - число итераций.

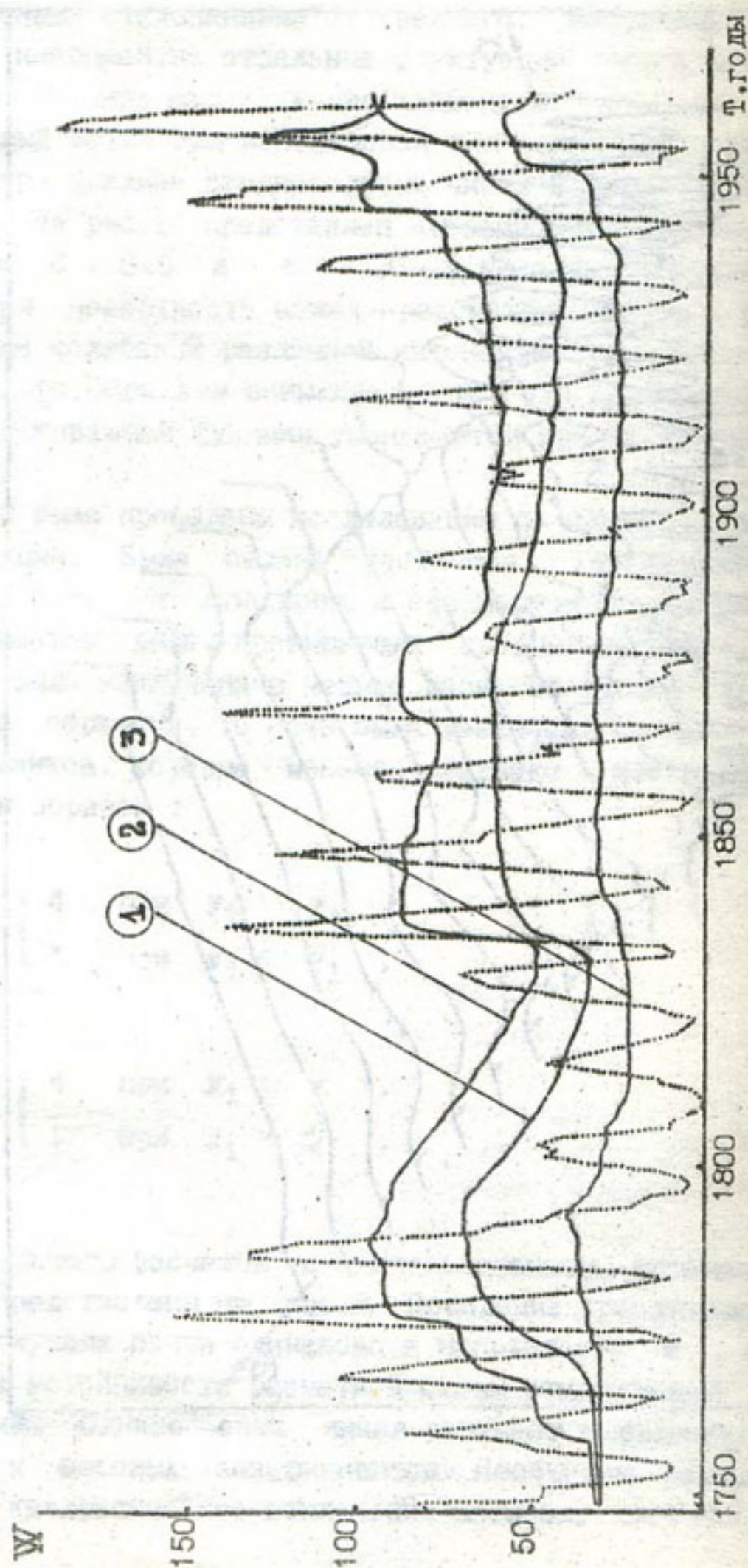


Рис.2. Среднегодовые числа Вольфа и сглаженные кривые при различной степени влияния. Точками обозначены числа Вольфа.
 1 - сглаженная кривая при равных весовых коэффициентах.
 2 - приоритет для значений выше среднего, правило (13).
 3 - приоритет для значений ниже среднего, правило (14).

сглаженной функции непрерывно возрастает, асимптотически стремясь к среднему квадратическому отклонению членов временного ряда от нормы. Иначе говоря, корреляционное отношение стремится к нулю при количестве итераций, стремящихся к бесконечности. Результаты могут быть применимы для анализа других гидрометеорологических рядов.

Список литературы

1. В и т и н с к и й Ю. И. Солнечная активность. - М.: Наука, 1983. - 193с.
2. К а з а к е в и ч Д. И. Основы теории случайных функций и ее применение в гидрометеорологии. - Л.: Гидрометеоиздат, 1977. - 320с.
3. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Теоретическая физика. Т.1. Механика. - М.: Наука, 1988. - 216с.
4. С е к е й Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. - М.: Мир, 1990. - 240с.
5. Х е н н а н Э. Анализ временных рядов. - М.: Наука, 1964. - 216с.

О ДВУХ МЕТОДАХ ОБРАБОТКИ СПУТНИКОВЫХ СНИМКОВ

Одной из основных задач обработки спутниковых изображений является выделение различных однородных областей и расчет площадей, которые они занимают. Снимки, полученные со спутников серии NOAA, представляют собой цифровые матрицы яркостных характеристик. При обработке цифровая матрица преобразуется в изображение на экране ПЭВМ. К настоящему времени используется множество специальных программ по тематической обработке подобных изображений [1]. Однако эти программы можно дополнить двумя возможностями, которые изложены ниже.

Увеличение части изображения. Цифровая матрица снимка отображается на дисплее соответствующими цветовыми точками, т.е. один байт матрицы отображается соответствующим пикселем (цветовой точкой экрана). Отображение матрицы на экране выглядит целостной картинкой благодаря мелким геометрическим размерам пикселя. В программах при увеличенном отображении какой-либо части снимка изображение представляет собой совокупность квадратов, размер которых зависит от масштаба увеличения (рис.1), при этом резко падает географическая узнаваемость самого изображения.

Каждый байт матрицы представляет собой интегральную характеристику яркости изображения некоторой площади (около 1 км^2) земной или водной поверхности. Так один элемент изображения может содержать сведения о различных морфометрических характеристиках, особенно это обстоятельство преобладает на границах разнородных областей. Например, урез моря, снеговая граница, граница облачности и т.д. По этой причине точность определения оконтуренной площади является задачей, зависящей от изрезанности границ.

Величина яркости изображения на границе двух разнородных областей зависит от площади этих областей, которая приходится на данный элемент изображения. Для выделения контуров областей



Рис.1. Увеличение снимка в масштабе 8 : 1 . Территория Аральского моря, остров Возрождения .



Рис.2. Результат интерполяционного сглаживания увеличенной части изображения.

различной яркости предлагается использовать интерполяционный метод Лагранжа, который для двухмерного случая выглядит так :

$$S_{km}(x,y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m S_{ij} \prod_{p=0}^k \prod_{q=0}^m \frac{(x-x_1)(y-y_j)}{(x_p-x_1)(y_q-y_j)}, \quad (1)$$

где x, y — координаты, k, m — размеры матрицы, λ — величина яркости пикселя. Положительной стороной применения интерполяции Лагранжа является то, что она позволяет использовать по каждой переменной свое число узлов [3].

Для наглядного примера применения формулы Лагранжа на рис.2 представлен участок Аральского моря (остров Возрождения) в увеличенном виде. Для проверки степени надежности применения данного метода проведено следующее исследование.

За эталон точности было принято исходное изображение и рассчитана площадь водной поверхности Аральского моря в пикселях. Затем проводилось разрежение исходной цифровой матрицы, т.е. последовательно удалялись элементы изображения через равные интервалы с соблюдением условий четности и нечетности. Изображение увеличивалось в соответствующем масштабе и проводился расчет площади со сглаживанием границ по формуле Лагранжа и без него.

По результатам, представленным на рис.3., заметно значительное рассеивание величины площади от эталонной при увеличении разрежения. Однако при применении сглаживающей функции рассеивание значений площади от эталонной снижается.

Для численного анализа погрешности расчетных значений площади был принят следующий критерий, аналог среднеквадратичного отклонения :

$$S = \sqrt{\sum (A_1 - A_T)^2 / n}, \quad (2)$$

где A_1 — рассчитанное значение площади после кратного разрежения исходной матрицы, A_T — начальное значение площади, полученное по исходной матрице, принятое за "истинное", S — критерий отклонения, n — количество пикселей.

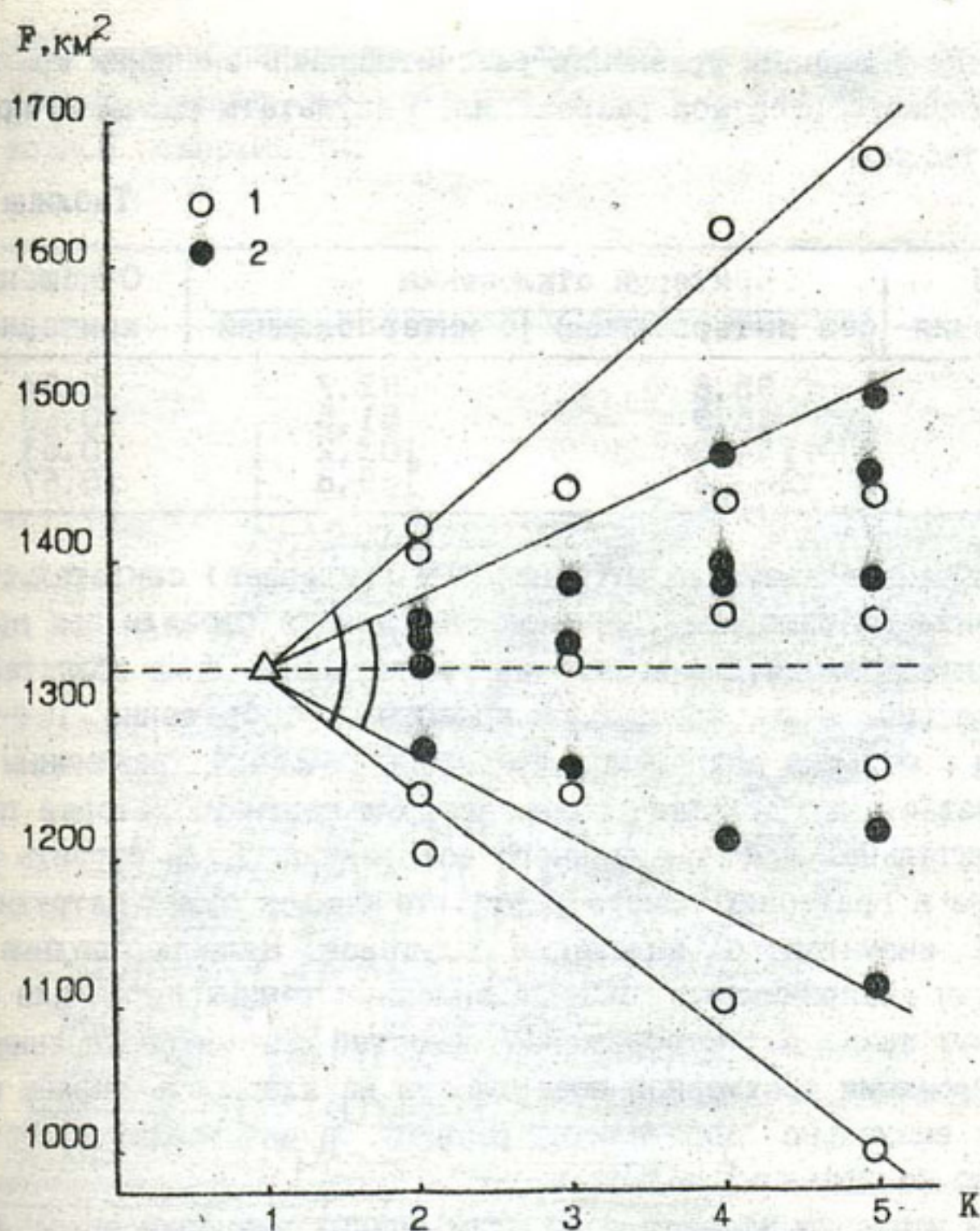


Рис.3. График разброса точности расчета площади поверхности моря при разрежении матрицы.
 K – число сокращений, значения площади F приведены в условных единицах: 1 – без сглаживания, 2 – со сглаживанием.

По приведенному уравнению рассчитывались значения критерия для различного масштаба разрежения. Результаты расчетов приведены в таблице.

Таблица

Масштаб увеличения	Критерий отклонения		Отношение критериев
	без интерполяции	с интерполяцией	
2	95,8	32,7	0,34
3	85,9	51,5	0,60
4	194,9	103,2	0,53
5	222,4	149,8	0,67

полученные результаты (отношение критериев) свидетельствуют о снижении разброса погрешности расчета площади при применении интерполяции для выделения границ однородных областей.

Выделение ярких интервалов яркости. Отображение цифровой матрицы с большим диапазоном яркости (0-255) различным цветом создает на дисплее очень пеструю картину, которая также затруднительна для визуального восприятия. Если строить изображение в градациях одного цвета, то снимок будет затруднителен для визуального выделения полутонов. Например водные поверхности воспринимаются в виде сплошных темных пятен для всех частотных каналов. Отображение яркостей спутникового снимка в виде проекции трехмерной поверхности на плоскость экрана позволяет визуально определить разницу в интервалах яркостей, особенно на границах областей.

Для усиления эффекта в области низких значений яркости используется степенное уравнение преобразования матрицы по вертикальной оси в виде выражения :

$$L = (L_1 / R) \exp(1/p) \quad (3)$$

где R - величина предельно-значимой яркости, p - степень выравнивания, L - новое значение яркости, L_1 - старое значение яркости.

Параметры уравнения подбираются исследователем по гистограмме распределения яркостей. Результаты применения метода

при анализе водной поверхности Аральского моря приведены на рис. 4. Хорошо заметна значительная разница между яркостями земной и водной поверхности.

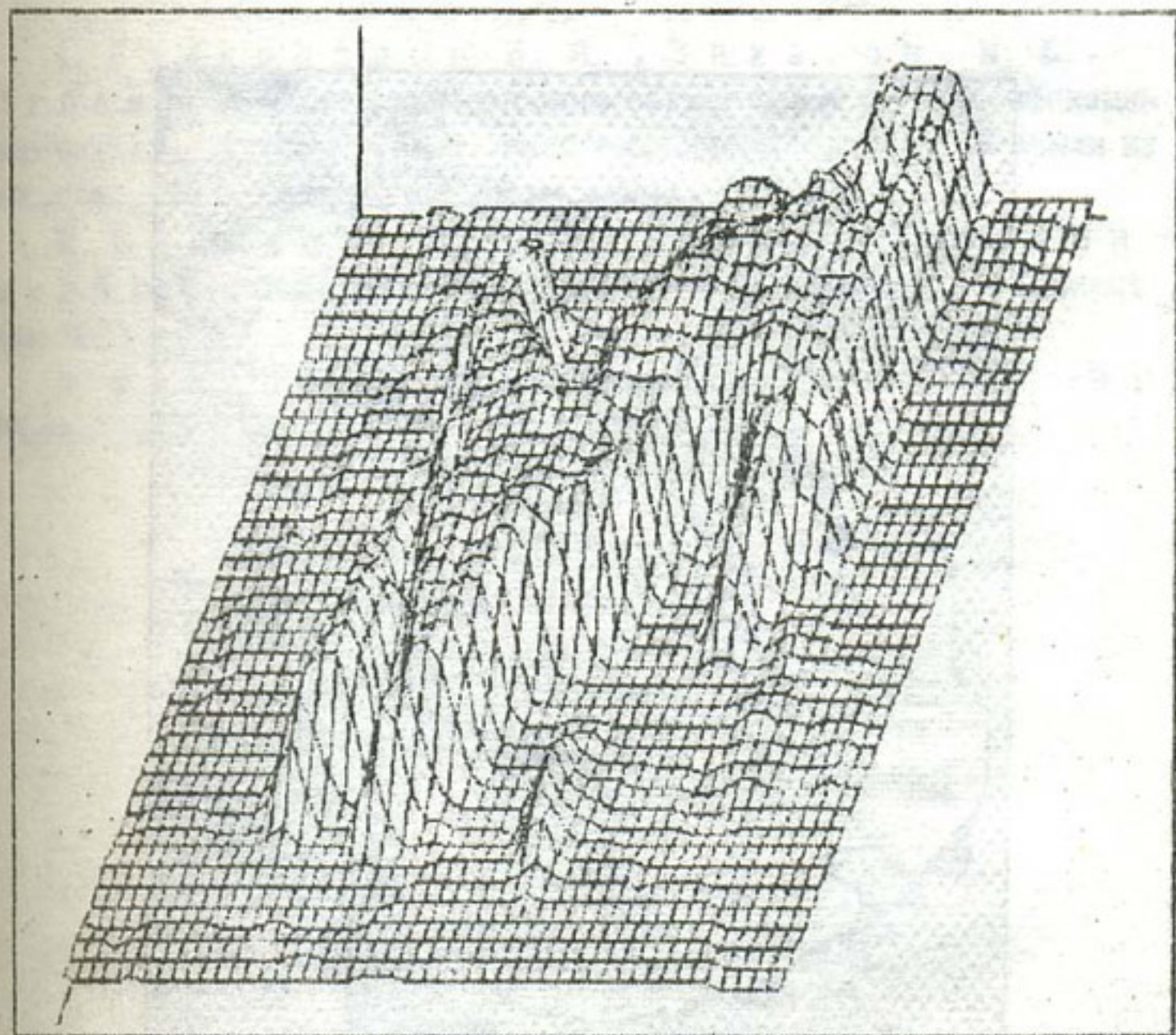


Рис. 4. Проекция на плоскость экрана трехмерной матрицы яркостей с применением уравнения преобразования для больших значений яркости.

Данный метод позволил выделить распределение яркости изображения водной поверхности (рис.5). Подобная картина на поверхности Аральского моря наблюдается в основном в летне-осенний период и обуславливается влиянием на морские течения Амударьи.

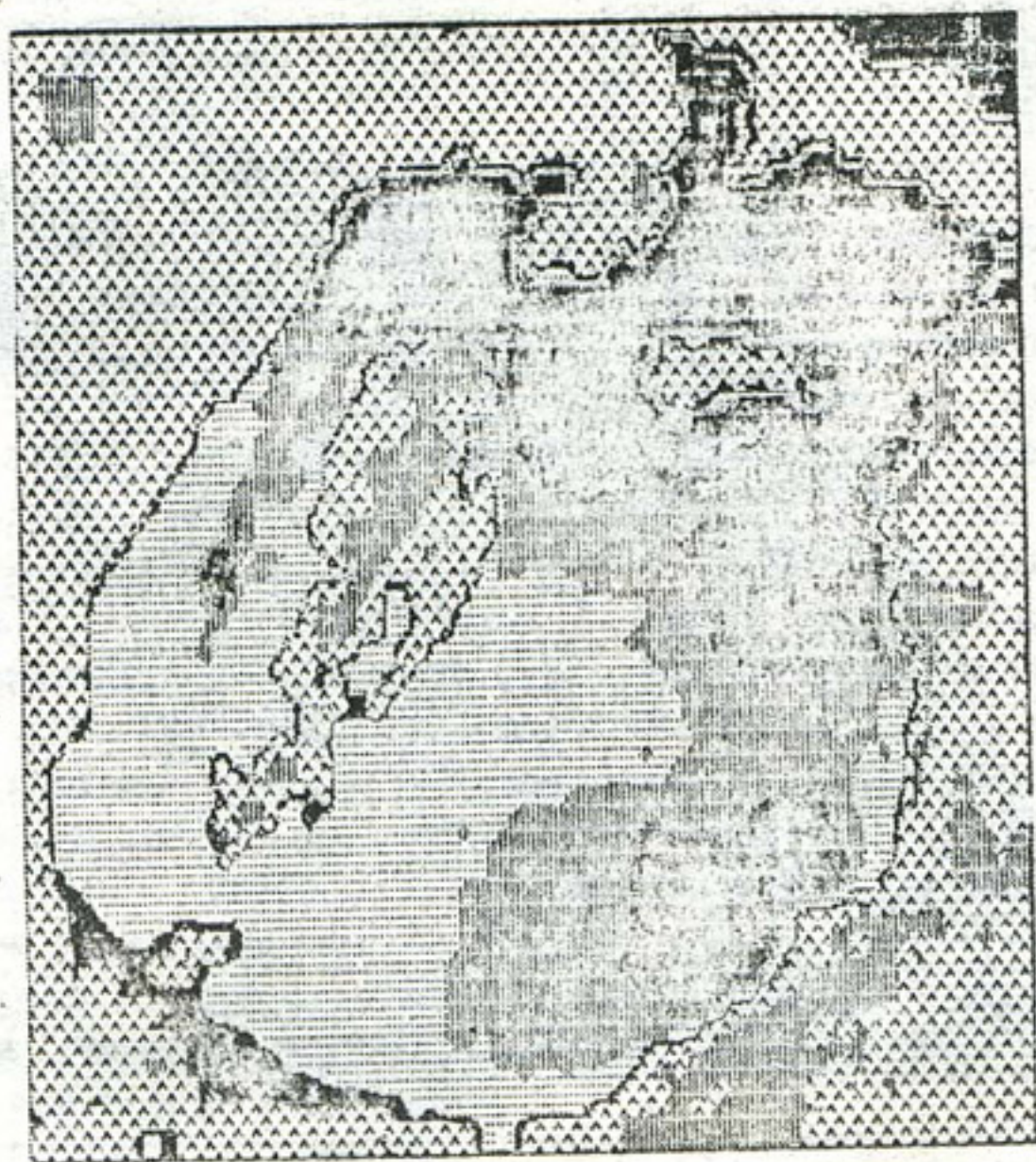


Рис.5. Распределение яркости на поверхности Аральского моря (3 августа 1994). Изображение получено с использованием интерполяционного сглаживания.

Практическое использование приведенных возможностей при тематической обработке спутниковых снимков, представляющих собой цифровую матрицу, позволит улучшить качество анализа объектов окружающей среды.

Список литературы

1. Долгополов Б. Я., Захаров М. Ю., Лупян Е. А. Комплекс программ сегментации и классификации многоканальных спутниковых изображений // Исследование земли из космоса. - 1993. - №3 - С. 49-56.
2. Садыков С. С., Кадырова Г. Х., Азиев Ш. Р. Системы цифровой обработки изображений. - Ташкент: Фан, 1988. - 167 с.
3. Шелест А. Е. Микрокалькуляторы в физике. - М.: Наука, 1988. - 270 с.

РАДИОЛОКАЦИОННАЯ И СПУТНИКОВАЯ ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗА СЕЛЕОПАСНОСТИ В ФЕРГАНСКОЙ ДОЛИНЕ

Для прогноза различных метеозлементов, в том числе сильных осадков, гроз, града широко используются снимки облачности ИСЗ и наблюдения МРЛ [1,2,3,5]. В гидрологии круг использования этой информации ограничен и распространен лишь для оценки пространственных параметров, в частности, затопления речных пойм при паводках, картирования снежного покрова, ледовой обстановки и т.д.

Прогноз селеопасности на территории Средней Азии построен на основе использования данных радиозондирования [4,7] и с достаточной заблаговременностью дает хорошие результаты, но возникший дефицит радиозондирующей информации подтолкнул на поиск новой, а именно, к спутниковым снимкам облачности и наблюдениям МРЛ.

Ливневые осадки, являющиеся, как правило, причиной формирования селей в предгорных зонах Ферганской долины, выпадают из мощных кучевых и кучево-дождевых облаков. Хорошая идентичность в определении этих форм облаков по спутниковым снимкам и по наблюдениям с Земли, дает основание использовать снимки облачности для анализа зон осадков, а следовательно, и зон с формированием селей.

Основными признаками, позволяющими различать изображения облаков разного типа и земной поверхности, являются тон (яркость) и рисунок изображения. Яркостные характеристики изображений одной и той же облачности, полученные одновременно в видимом (ТВ) и инфракрасном (ИИ) участках спектра, можно использовать для количественной оценки форм, толщины облачных слоев и положения верхней границы облачности, а вероятность выпадения осадков из этих облаков определяется линейными размерами отдельных облаков и их количеством [6].

Для анализа селеопасной ситуации по снимкам ИСЗ "NOAA" (США) за утренние сроки периода в 10 лет (1983-1992годы) собрана информация, включающая синоптический процесс, тип процес-

са по ИСЗ, вид и тип облачности, количество облаков, яркостные характеристики на ТВ и ИК снимках, размеры облачности по широте и долготе, направление перемещения по АТ-500, наличие очагов Сб, их расположение и размеры.

Из всей совокупности собранной информации следует выделить характеристики, разделяющие случаи с селями и без селей с надежной вероятностью, например, яркостные характеристики изображения облаков в ТВ и ИК диапазонах спектра. В дни с селями облачность над исследуемым районом в 90-94% случаев на снимках ТВ и ИК ярко-белая и белая, при этом ярко-белая облачность на обоих снимках повторяется в 77% дней с селями. Для класса без селей картина обратная - повторяемость серого и серо-белого изображения составляет 72, а для класса с селями всего 8% случаев.

В 85% с селями на снимках ТВ и ИК на белом фоне облачности выделяются ярко-белые очаги кучево-дождевых облаков диаметром 75-200 км. В облачные дни без селей очаги кучево-дождевых облаков или отсутствуют, или они мелкие порядка 25-50 км на серо-белом фоне ТВ снимков или белом фоне ИК снимков. Вместе с тем в 88-91% положение очага облачности на снимках определяет место прохождения селей.

Используя для прогноза комплексные карты, на которых облачные массивы наложены на карты АТ-500, можно судить о направлении и скорости их перемещения. Облачные системы с севера, северо-запада, а также с юго-запада, где весной формируются южнокаспийские и мургабские циклоны, перемещаются в среднем со скоростью 40-60 км/ч, реже 30-80. Осадкообразующие синоптические процессы становятся более мощными, если облачности с юго-запада и северо-запада объединяются и смещаются по ведущему потоку на селеактивные районы [8].

С точки зрения физики атмосферы, мощные кучево-дождевые облака образуются в результате конвективной неустойчивости в атмосфере. Существуют связи между количественными характеристиками неустойчивости (конвекции, скорости вертикального движения) и радиолокационными параметрами облака. С характеристиками неустойчивости наиболее тесно связаны максимальная верхняя граница радиозохи от системы облаков (H_m) и максимальная

радиолокационная отражаемость от нижней границы облака (lg_{zm}).

Радиоэхо отражает суммарный вклад упорядоченных вертикальных движений и развивающейся конвекции в процессе образования осадков. Данные наблюдений сети МРЛ наносятся на комплексные карты, по которым можно выявить районы с конвективной облачностью, высоту радиоэхо от конвективных облаков, вид явления, интенсивность радиоэхо явления.

Анализ радиолокационной информации по данным МРЛ Ташкент, Коканд и Ош за 03 ч мск.вр. показал, что селевые паводки в Ферганской долине образуются в облачные дни при высоте верхней границы радиоэхо от облаков 11–13 км с интенсивностью 4–8 единиц в коде RADOB. Однако четкого различия радиолокационных характеристик в дни с селями и без селей не обнаружено. Статистическая обработка количественных параметров облачности выделила такие как количество очагов грозовых явлений, вид облачности, осадков, интенсивность радиоэхо от ливней. Критерий различия двух классов Фишера составил 0,58 – 0,48, что позволяет описать тремя параметрами каждый класс всего на 60%.

Представляется интересным рассмотреть возможность использования совокупности спутниковой и радиолокационной информации наряду с характеристиками воздушных масс по данным радиозондирования для прогноза селеопасности.

Вектор-предиктор составлен из 20 параметров, учитывающих состояние воздушной массы по данным радиозондирования: температура воздуха (T), точка росы (T_d), температура конденсации (T_k) и дефицит точки росы ($T - T_d$) на поверхностях 850, 700 и 500 гПа; состояние облачности по наблюдениям МРЛ: верхняя граница отражения от ливней ($H_{\text{л}}$), интенсивность отражения от ливней ($int_{\text{л}}$), число ячеек с ливнями ($n_{\text{л}}$), число ячеек с грозами ($n_{\text{г}}$); состояние облачности по снимкам ИСЗ: яркость облачности в видимом диапазоне ($Ярк_{\text{ТВ}}$) и в инфракрасном излучении ($Ярк_{\text{ИК}}$) по четырем градациям, принятым в службе анализа спутниковых снимков (серая – 1, серо-белая – 2, белая – 3, ярко-белая – 4).

Весь архив данных был разделен на два: 1) случаи с селями и без селей при синоптических процессах, характеризующихся прохождением холодного фронта над исследуемой территорией; 2) случаи с селями и без селей при высотных и высоких циклонах

над центральными и восточными районами Средней Азии. Такой подход связан со спецификой отбора предикторов, учитывающей характерные особенности взаимодействия воздушных масс при каждом из этих процессов.

Статистический анализ вектора-предиктора показал, что именно данные МРЛ и ИСЗ имеют высокие коэффициенты различия двух классов ($NR_{\text{Ярк ИК+ТВ}} = 1,88 - 1,43$; $NR_{\text{int}_{\phi}} = 1,05 - 0,84$). При пошаговом дискриминантном анализе эти предикторы были выбраны вместе с температурой точки росы в холодной воздушной массе при прохождении холодных фронтов:

$$V(x) = 1,55 \text{Ярк}_{\text{ИК+ТВ}} + 0,64 \text{int}_{\phi} + 0,12 T_{d,850,x} - 10,8, \quad (1)$$

где $V(x)$ — дискриминантная функция, $\text{Ярк}_{\text{ИК+ТВ}}$ — суммарная яркость облаков на снимках ИК и ТВ, int_{ϕ} — интенсивность отражения радиозоо от ливней, $T_{d,850,x}$ — температура точки росы на поверхности 850 гПа в холодной воздушной массе.

Оправдываемость прогнозов, составленных по уравнению (1) на обучающей выборке составила 87%, предупрежденность селей 91, а на независимой выборке 95 и 92, соответственно.

Для синоптических процессов с высотными и высокими циклонами над Средней Азией наряду с яркостью облачности на снимках ТВ и ИК и интенсивностью отражения радиозоо от ливней, выбрана температура конденсации на высоте 1,5 км ($T_{k,850}$) по данным радиозонда Ташкент:

$$V(x) = 1,19 \text{Ярк}_{\text{ТВ+ИК}} + 0,32 T_{k,850} + 0,53 \text{int}_{\phi} - 8,57. \quad (2)$$

Оправдываемость прогнозов селей и их предупрежденность по уравнению (2) на обучающей выборке составила 88%, а на независимой выборке 91 и 100, соответственно. Характеристики успешности прогнозов по Н.А.Багрову и А.М.Обухову в обоих случаях достаточно высокие (0,7 — 0,8).

Следует отметить, что сочетание предикторов в прогностических схемах 1 и 2 косвенно отражает основные параметры селеформирующих факторов, характерных для предгорьев Ферганской долины — это количество, интенсивность и вид выпадающих осадков.

Хочется надеяться, что попытки использования данных МРЛ и

ИСЗ для прогноза селеопасности послужат толчком в развитии дешифрирования и получения широкого аспекта количественных параметров по снимкам облачности и наблюдениям МРЛ как более перспективной и надежной информации.

Список литературы

1. Глушкова Н. И., Алексеева А. А. Прогноз града и размеров градин по радиолокационным данным //Тр. Гидрометцентра СССР. - 1989. - Вып. 299. - С. 16-21.
2. Лапчева В. Ф. Исследование условий формирования осадков в холодный период года с использованием данных наблюдений ИСЗ и МРЛ //Тр. Гидрометцентра СССР. - 1989. - Вып. 299. С. 81-92.
3. Лапчева В. Ф. Метод прогноза количества осадков, в том числе сильных и очень сильных в холодный период года по данным МРЛ и ИСЗ. //Тр. Гидрометцентра СССР. - 1988. - Вып. 292. - С. 53-59.
4. Ляховская Л. Ф. Селевая опасность в Ташкентской области и ее краткосрочный прогноз //Тр. САННИ Госкомгидромета. - 1987. - Вып. 127(208). - С. 105-113.
5. Решетов Г. Д. Прогноз дневных и ночных гроз //Тр. Гидрометцентра СССР. - 1977. - Вып. 176 - С. 86-99.
6. Руководство по использованию спутниковых данных в анализе и прогнозе погоды /Под ред. И.П.Ветлова, Н.Ф.Ветлищева - Л: Гидрометиздат, - 1982. - 299 с.
7. Салихова Д. Х., Ляховская Л. Ф. Метод прогноза селевой опасности в предгорьях Ферганской долины //Тр. САННИ Госкомгидромета. - 1986. - Вып. 119(200). - С. 75-78.
8. Синоптические процессы Средней Азии /В. А. Бугаев, В. А. Джорджио, Е. М. Козик, М. А. Петросянц, А. Я. Пшеничный Н. Н. Романов, О. Н. Чернышова - Ташкент: АН УзССР, 1957. - 477 с.

ДОЛГОСРОЧНЫЙ ПРОГНОЗ ПРИТОКА В НУРЕКСКОЕ ВОДОХРАНИЛИЩЕ НА РЕКЕ ВАХШ

В условиях Центральноазиатского региона, для которого характерна засухливость климата и крайняя ограниченность водных ресурсов, задача долгосрочного прогноза притока в Нурекское водохранилище на р.Вахш является весьма актуальной.

Прогноз притока строился на основе модели, которая успешно адаптирована для ряда горных рек бассейна Сырдарьи, и полученные методы прогнозов успешно используются в прогностической практике.

Для бассейна Амударьи решение такой задачи оказалось более сложным в связи с тем, что здесь мы имеем гидрологические объекты со значительно большими площадями водосборов, расположенных в сложных орографических районах и с очень слабым информационным обеспечением.

Разработка метода прогноза притока в Нурекское водохранилище на р.Вахш потребовала адаптации модельного комплекса, состоящего из трех основных блоков:

- модель расчета снегозапасов, талого и дождевого поступления на основе стандартной гидрометеорологической информации;
- модель В.Г.Коновалова расчета стока с ледников, информация для работы с которой получена из банка данных "Ледники";
- модель трансформации всех видов поступления в сток в замыкающем створе.

Расчет динамики снежного покрова ведется на основе численного представления полей метеозадающих элементов, и здесь особого внимания требует численное описание полей осадков.

В качестве источников информации об осадках были привлечены данные 27 станций и постов, расположенных на площади 29500 км^2 в основном не выше 2,5 км, при этом верхние зоны бассейна оказались практически не освещенными информацией.

Информация об осадках несколько дополнена данными суммарных осадкомеров. Однако качество этих данных таково, что оценить годовую сумму осадков удалось не по всем из них.

Дополнительные сведения об осадках удалось получить с помощью гляциоклиматического метода А.Н.Кренке [1]. По карте аккумуляции-абляции твердых осадков на высоте фирновой границы ледников были получены оценки этих величин в рассматриваемом бассейне. Некоторые оценки осадков были получены по максимальным снегозапасам с использованием методических рекомендаций по определению характеристик режима снежного покрова в горах, составленных М.И.Геткером и Б.К.Царевым [3].

Поскольку суммарные осадкомеры и гляциоклиматический метод дают лишь оценки годовых сумм осадков, а необходимы по крайней мере месячные суммы, встал вопрос об оценке внутригодового распределения осадков. Для этой цели были построены зависимости сезонных и месячных долей осадков от высоты местности по данным наблюдений на станциях и постах.

Получив и проанализировав некоторое поле норм осадков в качестве ведущего аргумента, была выбрана высота местности и выделено 7 подрайонов по характеру формирования осадков. Это деление не лишено субъективизма, так как выделение типов связей недостаточно обосновано данными, сгущенная осадкомерная сеть в бассейне р. Вахш отсутствует.

В бассейне Кызылсу восточная и Обихингоу было выделено по 3 подрайона, а для бассейна Муксу выбрана единая расчетная зависимость распределения осадков от высоты, так как весь бассейн внутригорный, сильно экранирован барьерами макросклонов, контактирующих с периферийными хребтами. Неблагоприятно ориентирован по отношению к влагонесущим воздушным массам с запада и юго-запада бассейн Обихингоу.

Северные и северо-западные склоны Дарвазского хребта представляют собой "среднеэкранированные" хребты первого порядка и как бы разбивают бассейн на 3 подрайона: верховья, средняя часть и низовья до впадения в р.Вахш.

Нижний подрайон Кызылсу открыт западным и северо-западным воздушным потокам и здесь наблюдается относительно высокая увлажненность территории. По мере продвижения вглубь долины появляется эффект уменьшения осадков за счет экранированности, усиливающейся в верховьях Кызылсу (рис.1).

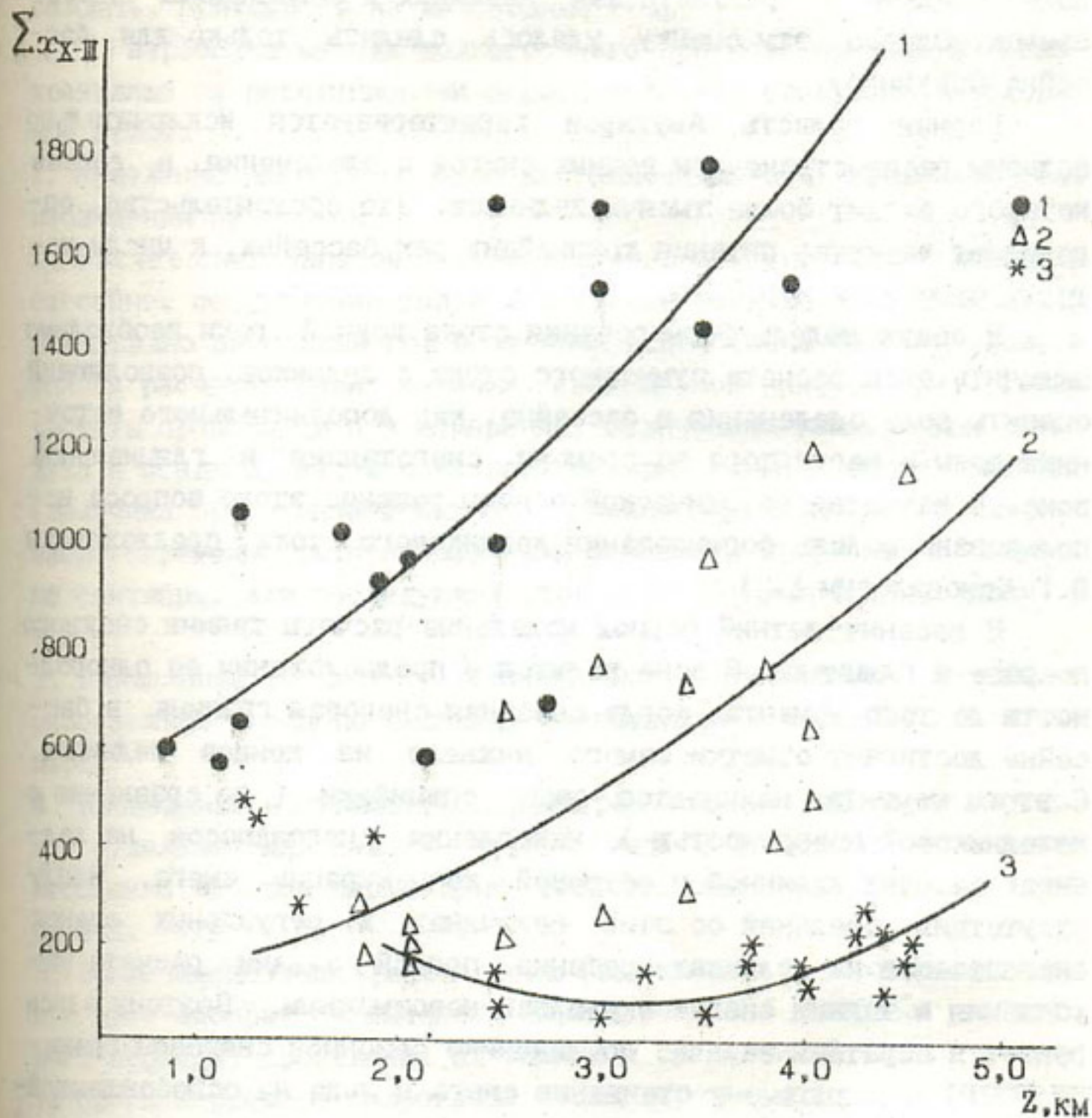


Рис.1. Зависимость сумм осадков за октябрь-март от высоты местности в бассейне р.Кызылсу.
1 - верхний подрайон, 2 - средний, 3 - нижний.

Положительной оценкой точности метода явилось удовлетворительное совпадение величин снегозапасов, определенных по модели формирования снежного покрова на основе рассчитанных полей осадков с результатами наземных и авиационных снего съемок. Однако эту оценку удалось сделать только для бассейна Обихингоу.

Горная область Амударьи характеризуется исключительно большим распространением вечных снегов и оледенения, в состав которого входит более тысячи ледников. Это обстоятельство определяет характер питания крупнейших рек бассейна, к числу которых относится и р. Вахш.

В общую модель формирования стока горной реки необходимо включить блок расчета суммарного стока с ледников, позволяющий оценить роль оледенения в бассейне, как дополнительного источника воды и регулятора во времени снеготаяния в гляциальной зоне. В качестве методической основы решение этого вопроса использована модель формирования ледникового стока, предложенная В.Г. Коноваловым [2].

В весенне-летний период модельные расчеты таяния снежного покрова в гляциальной зоне ведутся в предположении ее однородности до того момента, когда сезонная снеговая граница в бассейне достигает отметки самого нижнего из концов ледников. С этого момента начинается учет специфики (по сравнению с неледниковой поверхностью) накопления снегозапасов на ледниках за счет лавинной и ветровой концентрации снега. Ввиду отсутствия сведений об этих величинах и регулярных оценок снегозапасов на ледниках решение прямой задачи расчета накопления и таяния снега оказалось невозможным. Поэтому здесь решается обратная задача: по динамике сезонной снеговой границы (ССГ) и возможному стаиванию снега и льда на освобождающейся ледниковой поверхности проводится оценка стока с ледников. Последующие снегопады формируют так называемый летний снег, динамика которого рассчитывается отдельно, как решение прямой задачи.

Для целей гидропрогнозов необходимо рассчитать весь сток с ледников независимо от того, какая его часть сформирована

атмосферными осадками данного года, а какая за счет таяния самого ледника.

Наибольший вклад ледникового поступления, как и следовало ожидать, приходится на маловодные годы.

Разработка метода долгосрочного прогноза притока в водохранилище за вегетационный период включает следующие необходимые этапы:

1. Выделение расчетного периода, включающего в себя все годы наблюдения за стоком.
2. Расчет снегозапасов и динамики сезонной снеговой границы в бассейне, поступления талой и дождевой воды по высотным зонам ежедекадно за полный год в течение всего расчетного периода и оценка расчета (при наличии снегомерной информации). Такие расчеты проводятся по измеренным величинам температуры воздуха и осадков, затем повторяются при климатических оценках (величина 50% обеспеченности) температуры осадков на период заблаговременности прогноза (для основного прогноза с апреля по сентябрь, для последующих уточнений начиная с мая, июля и т.д.).
3. Разделение расчетного периода на многоснежные, средние и малоснежные годы по величине снегозапаса в бассейне в конце марта.
4. Проведение оптимизации параметров модели трансформации стока отдельно для каждой группы лет. В результате получается несколько наборов параметров трансформации на вегетационный период.
5. Вычисление гидрографов стока (расчетных и прогнозируемых) при этих наборах оптимальных параметров и за все годы расчетного периода, проведение их оценки и сравнение. В случае расчета прогнозируемого гидрографа стока используется соответствующий вариант расчетного поступления на период заблаговременности прогноза и норм месячных величин дефицита влажности воздуха.

Далее в таблице приводятся оценки прогноза по модели средних месячных и средних за вегетационный период расходов воды по состоянию информации на конец марта.

Оценка прогноза по модели средних месячных и
вегетационного расходов воды р. Вахи (п. Консонолабад)

Оценки	IV	V	VI	VII	VIII	IX	IV-IX
$Q_{\text{мн}}$	496	1099	1385	1891	1731	825	1238
$Q_{\text{ср}}$	426	804	925	1498	1462	636	969
$Q_{\text{мл}}$	314	711	773	1257	1232	561	808
Q	413	842	1023	1529	1460	657	985
σ	91,8	176,3	274,9	258,0	214,4	134,1	155,6
$S_{\text{мн}}$	92,6	202,0	202,8	171,2	149,4	112,5	61,4
$S_{\text{ср}}$	55,4	147,5	254,9	168,0	182,4	92,0	54,7
$S_{\text{мл}}$	50,6	97,4	158,6	82,0	126,5	64,9	39,5
S	63,8	146,0	201,8	139,4	166,2	91,9	53,5
S/σ	0,7	0,8	0,7	0,5	0,8	0,7	0,3
$\delta_{\text{доп}}$	61,9	118,8	185,3	173,9	144,5	90,4	104,9
P	72	69	69	72	70	80	92

П р и м е ч а н и е. $Q_{\text{мн}}, Q_{\text{ср}}, Q_{\text{мл}}, Q$ - средние расходы по группам лет, $\text{м}^3/\text{с}$; σ - стандарт изменчивости, $\text{м}^3/\text{с}$; $S_{\text{мн}}, S_{\text{ср}}, S_{\text{мл}}, S$ - средние квадратические ошибки по группам лет за расчетный период, $\text{м}^3/\text{с}$; S/σ - эффективность; $\delta_{\text{доп}}$ - допустимая погрешность, $\text{м}^3/\text{с}$; P - оправдываемость, %.

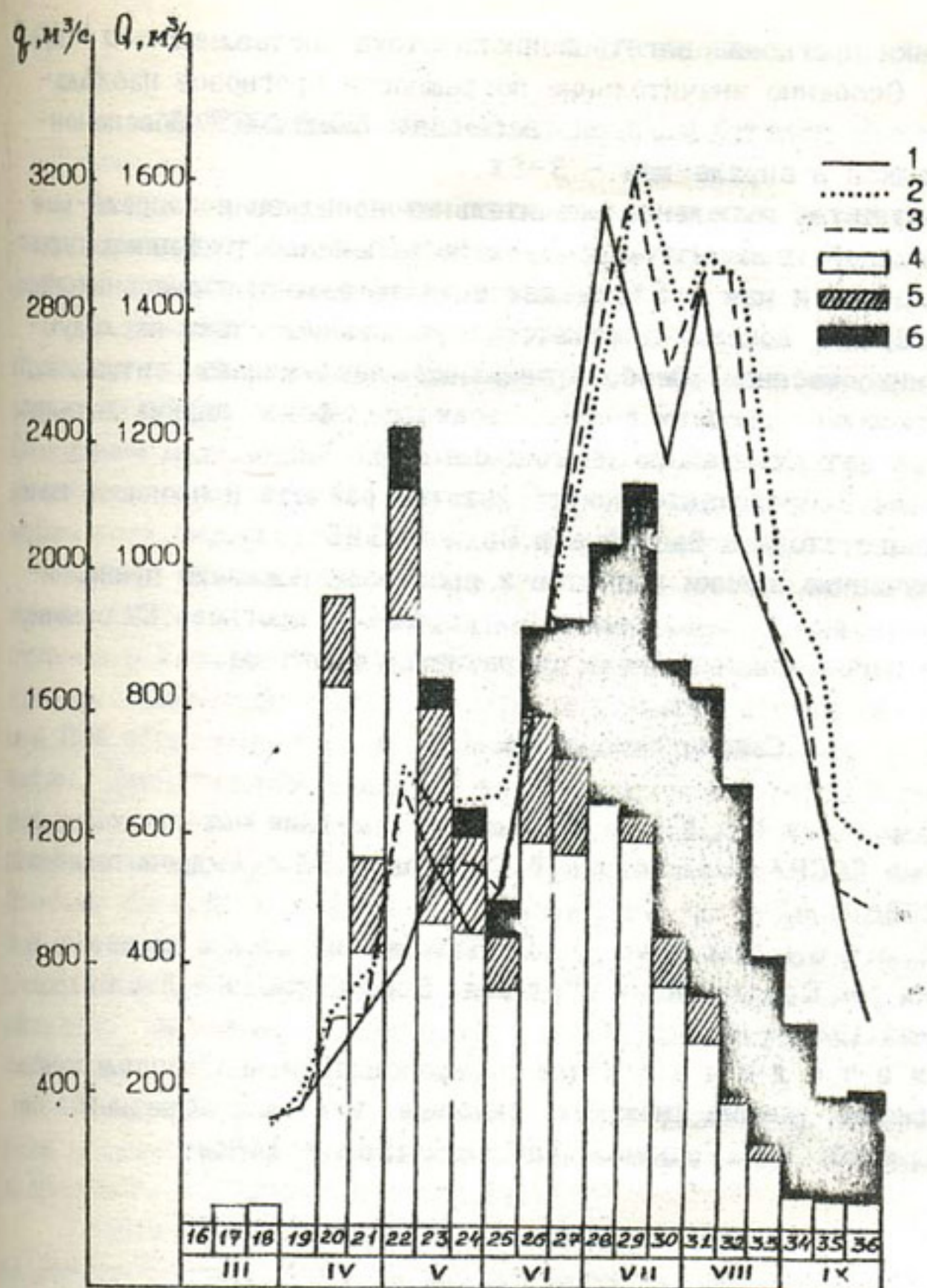


Рис.2. Результаты расчета и прогноза вегетационного стока в бассейне р.Вахш (п.Комсомолобад) в 1986 году.

1 - измеренные расходы, 2 - рассчитанные, 3 - прогнозируемые, 4 - талое поступление, 5 - дождевое, 6 - ледниковое.

Оценки прогноза вегетационного стока составляют $S/\sigma = 0,3$ и $p=92\%$. Особенно значительные погрешности прогнозов наблюдаются в годы с экстремальными весенними осадками: обеспеченность осадков в апреле-мае — 3-5%.

Кроме того, выпадение значительных осадков в апреле-мае на фоне низкой температуры воздуха (обеспеченность температуры воздуха апреля и мая 3-5%) может вызвать заметное снегонакопление в верхних зонах и скажется в увеличении стока последующих летних месяцев. Особого внимания заслуживает ситуация, при экстремально высоких снегозапасах на фоне низких летних температур нет ожидаемого многоводья.

На рис.2 представлены результаты расчета и прогноза вегетационного стока в бассейне р.Вахш в 1986 году.

Полученные оценки расчетов и прогнозов показали принципиальную возможность построения долгосрочного прогноза на основе модели и использования его в оперативной практике.

Список литературы

1. К р е н к е А.Н. Массообмен в ледниковых системах на территории СССР/ Под ред. Г.И.Слабкович. — Л.: Гидрометеиздат, 1982. — 288с.
2. К о н о в а л о в В. Г. Таяние и сток с ледников в бассейнах рек Средней Азии /Под ред. В.Ф. Суслова — Л.: Гидрометеиздат, 1985. — 238с.
3. М е т о д и ч е с к и е рекомендации по определению характеристик режима снежного покрова в горах Средней Азии /САНИИ: сост. М.И.Геткер. — Ташкент, 1988. — 146с.

ДОЛГОСРОЧНЫЙ ПРОГНОЗ СТОКА РЕКИ КАФИРНИГАН

Долгосрочные прогнозы стока горных рек за весенне-летнее половодье имеют большое практическое значение, особенно для районов развитого поливного земледелия.

В данной работе рассматривается метод долгосрочного прогноза стока р.Кафирниган, который основан на использовании математических моделей формирования стока в горном бассейне. Основными модельными блоками здесь являются: блок расчета динамики снегозапасов [1], расчет стока с ледников и трансформации всех видов поступлений в сток в замыкающем створе [2].

Общая площадь бассейна р.Кафирниган составляет 11590 км^2 , из них 8070 км^2 или 70% приходится на горную область. Основное питание р.Кафирниган получает на южном склоне Гиссарского хребта. Суммарный сток с Гиссарского хребта составляет не менее 80% общего притока в равнинную часть бассейна р.Кафирниган. Значительный удельный вес Гиссарского хребта в питании реки объясняется его благоприятной ориентацией по отношению к влажным воздушным массам и его сравнительно большой высотой. Поэтому бассейн р.Кафирниган относится к числу наиболее богатых осадками и наиболее водоносных районов Средней Азии. Южная ориентация Гиссарского хребта, а следовательно, и сравнительно небольшое количество ледников обусловили снегово-ледниковый тип питания р.Кафирниган.

Модельные расчеты показали, что в различные по водности годы несущественно изменяется соотношение талого, дождевого и ледникового поступления (табл.1).

Гидрологический режим р. Кафирниган типичен для горных бассейнов Средней Азии. Он характеризуется меньшей долей участия в стоке ледников, снежников и высокогорных снегов, большей изменчивостью стока, смещением половодья на более ранний период, а также обычно двумя периодами, первый из которых обусловлен таянием сезонных снегозапасов и приходится на вегетационный период. Прогноз водности реки на предстоящий вегетационный

период представляет наибольший интерес для планирования сельскохозяйственного производства.

Таблица 1

Соотношение талой снеговой, дождевой и ледниковой составляющих поступления воды на водосбор р Кафирниган за год.

Характеристика года по степени снежности	Вклады составляющих, %		
	талой снеговой	дождевой	ледниковой
Многоснежные	58	40	1
Средние	58	40	2
Малоснежные	54	43	3

Для прогноза стока на вегетационный период используются данные об осадках информационной сети станций, расположенных в рассматриваемом районе. Однако основные закономерности распространения осадков хорошо прослеживаются на полях их норм, для описания которых используется информация об осадках гораздо большего объема, чем для отдельных временных реализаций поля. Достигается это за счет привлечения наблюдений по суммарным осадкомерам и использования косвенных оценок осадков на основе гляциоклиматической и снегомерной информации.

Поскольку суммарные осадкомеры и гляциоклиматический метод дают лишь оценки годовых сумм осадков, а нам требуются, по крайней мере, месячные суммы, то встает вопрос об оценке внутригодового распределения осадков. Для этой цели были построены зависимости сезонных и месячных долей осадков от высоты местности по данным наблюдений на станциях и постах. Как видно, доля осадков холодного периода убывает, а теплого возрастает (рис.1). Аналогично выглядят и месячные графики,

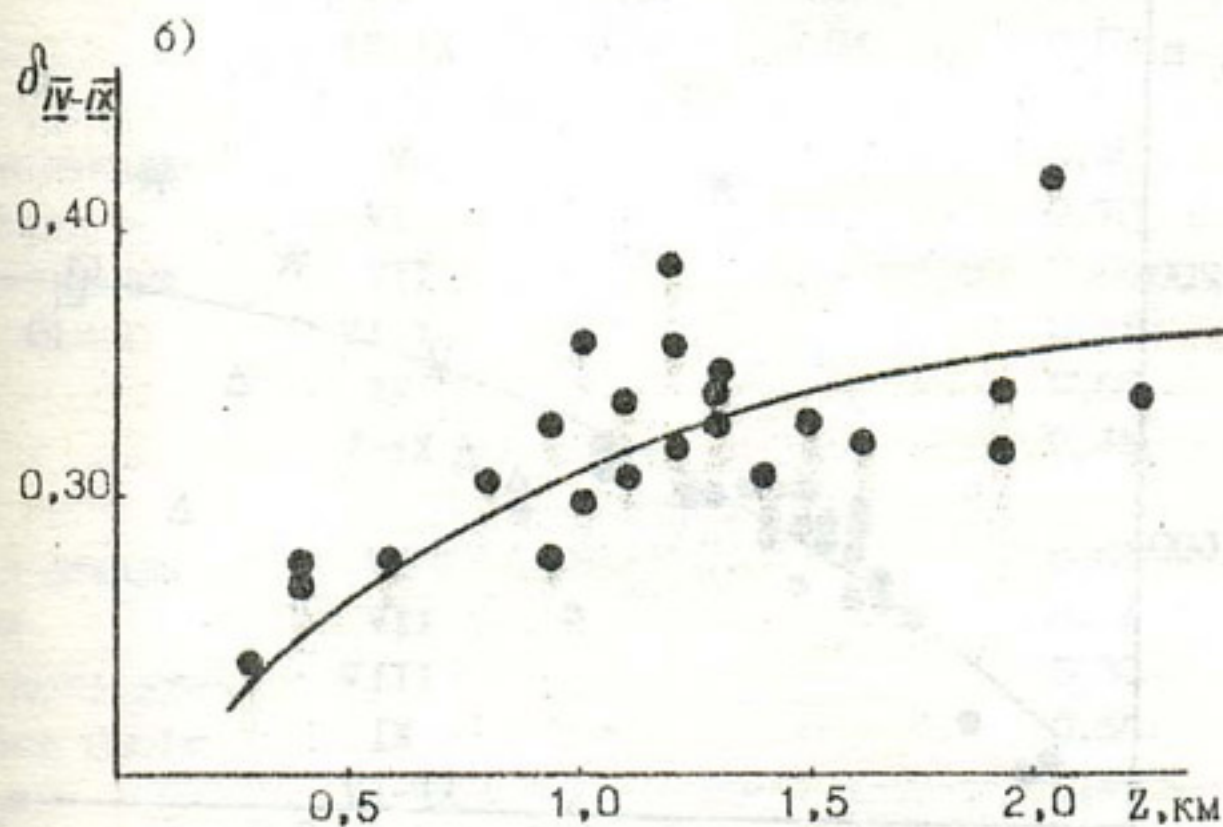
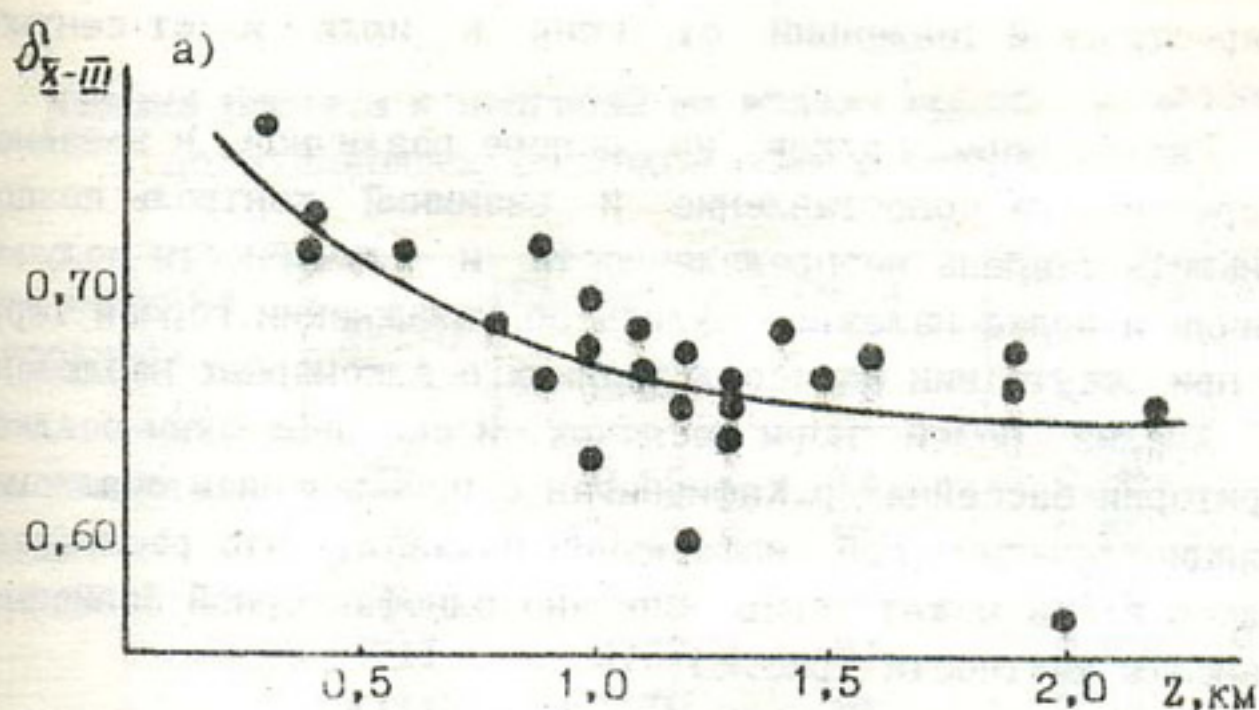


Рис.1. Зависимость доли осадков октября-март (а) и апреля-сентября (б) в годовой сумме от высоты местности в бассейне р. Кафирниган.

с перестройкой тенденций от июня к июлю и от сентября к октябрю.

Расчет норм осадков на основе различной и независимой информации, их сопоставление и взаимный контроль позволили уменьшить степень неопределенности и случайности полученных величин и более надежно судить об увлажнении горной территории при отсутствии непосредственных осадкомерных наблюдений.

Анализ полей норм месячных и сезонных сумм осадков на территории бассейна р.Кафирниган с привлечением осадкомерной и гляциоклиматической информации показал, что распределение осадков здесь может быть описано однофакторной зависимостью от высоты местности (рис.2).

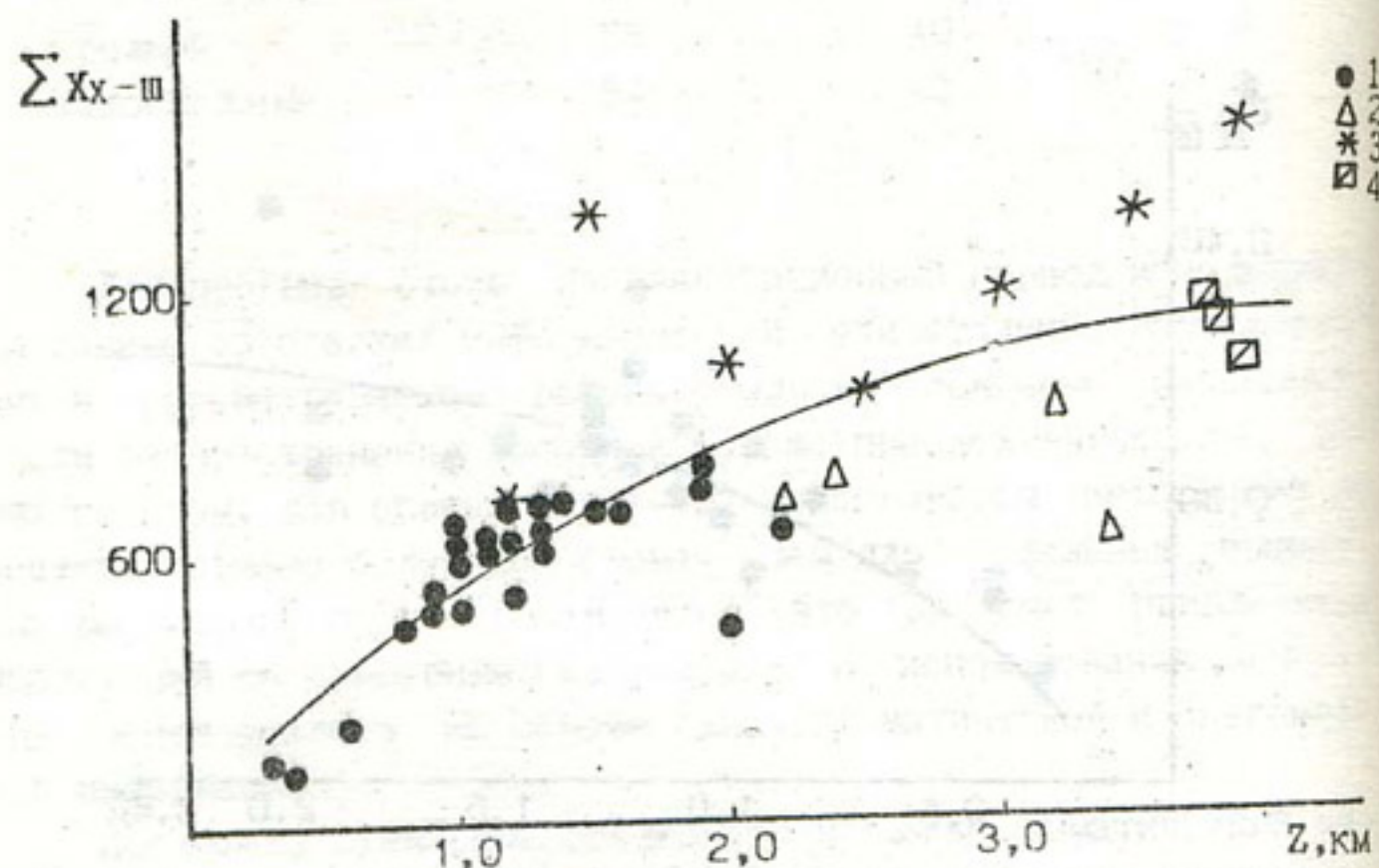


Рис.2. Зависимость суммы осадков холодного периода (октябрь-март) от высоты местности.

1 - осадки на станциях и постах, 2 - осадки по суммарным осадкомерам, 3 - осадки, рассчитанные по снегозапасам, 4 - осадки, рассчитанные на фирновой линии ледников.

**Оценка расчета и прогноза по модели средних месячных и
вегетационных расходов воды р. Кафирниган**

Срок выпуска прогноза	Месяц	Расчет по модели		Прогноз по модели	
		S/σ	P%	S/σ	P%
III-я декада марта (прогноз)	IV	0,65	74	0,88	64
	V	0,42	91	0,55	74
	VI	0,49	84	0,70	68
	VII	0,52	84	0,80	74
	VIII	0,70	81	0,78	75
	IX	0,85	65	0,86	65
	IV-IX	0,41	84	0,60	80
II-я декада апреля (уточнение прогноза)	V			0,48	85
	VI			0,70	75
	VII			0,55	85
	VIII			0,41	90
	IX			0,60	75
	V-IX			0,48	90
II-я декада мая (второе уточ- нение прог- ноза)	VI			0,80	75
	VII			0,54	85
	VIII			0,33	90
	IX			0,56	80
	VI-IX			0,49	90

П р и м е ч а н и е. S/σ – эффективность, P – оправдываемость.

В модели формирования снежного покрова блоки численного описания полей норм осадков и их внутригодового распределения являются лишь частными вопросами. Однако корректное решение этих вопросов во многом определяет точность решения основной задачи.

Результаты расчетов и прогнозов стока (табл.2) оценивались по показателю эффективности — S/σ , где S — средняя квадратическая погрешность прогноза, σ — средняя квадратическая изменчивость расходов воды в замыкающем створе. Анализ значительных погрешностей показал, что они имели место в годы с экстремальными погодными условиями в период вегетации. Так, аномально высокие осадки апреля и мая в отдельные годы обусловили повышенный сток, который оказался больше прогнозируемого. Расчет по модели проводился с декадным шагом. На период заблаговременности прогноза были приняты климатические оценки осадков, температуры и дефицита влажности. Это не позволило учесть аномально высокие осадки мая и июня в отдельные годы, сформировавшие значительное дождевое поступление, и привело к ухудшению оценок прогноза. Однако модельный метод прогноза позволяет задавать на период заблаговременности прогноза экстремальные погодные условия и переходить к формулировке прогноза в вероятностной форме.

Оценки представленного в работе метода прогнозов позволяют использовать его в оперативной гидропрогностической практике, а также метод может быть полезен при составлении прогнозов по Амударье.

Список литературы

1. Шенцис И.Д. Макромасштабная модель формирования снежного покрова на территории горного региона //Тр. САННИ Госкомгидромета. —1986. —Вып.111(192). —С.15-27.
2. Шенцис И.Д. Усовершенствованная модель трансформации стока //Тр.САННИ Госкомгидромета. —1986. —Вып.125(206). —С.3-13.

РАСЧЕТ ПОЛЯ ОСАДКОВ И КОМПЛЕКСНАЯ ОЦЕНКА СНЕГОЗАПАСОВ В БАССЕЙНЕ РЕКИ ПЯНДЖ

Решение задач оптимального водопользования в районах дефицита водных ресурсов требует, в свою очередь, пристального внимания к области их формирования.

Крупнейшим водным объектом Средней Азии является Амударья, более 50% стока которой составляет сток р.Пяндж. В данной работе представлены результаты исследования поля осадков и комплексной оценки снегозапасов в бассейне р. Пяндж.

Помимо сложного рельефа, представленного хребтами первого и второго порядка различной ориентации, бассейн р.Пяндж имеет очень низкую информационную обеспеченность, которая катастрофически снижается с каждым годом. Ситуация осложнена также пограничным положением этого бассейна. Левый берег Пянджа, находящийся на территории Афганистана, практически не освещен стационарными наблюдениями. Имеющаяся информация по четырем станциям, расположенным в бассейне р. Кокча, может считаться достоверной лишь в годовом разрезе.

Методика исследования полей осадков была неоднократно описана [3,4,5]. К работе нами были привлечены данные 41 станции и поста. Большинство пунктов наблюдений расположены ниже 3,5км, поэтому для оценки распределения осадков в верхних зонах были привлечены данные 32 суммарных осадкомеров. Использовалась также дополнительная информация о распределении максимальных снегозапасов, рассчитанных по рекомендациям М.И. Геткера [2], и количестве твердых осадков на высоте границы питания ледников, рассчитанных по методу А.Н. Кренке [1].

В связи с практически полным отсутствием информации об осадках по левому берегу Пянджа, а также из соображений единства орографии и основных направлений воздушной циркуляции, было принято решение об использовании имеющихся данных по правому берегу для описания поля осадков и на территории Афганистана. Анализ всей независимой информации позволил более надежно судить об увлажнении бассейна р.Пяндж при отсутствии не-

посредственных наблюдений.

Исследование зависимостей доли осадков за октябрь-март $\delta(X-III)$ в годовой сумме от высоты местности показало существование двух типов внутригодового распределения осадков в этом бассейне (рис. 1). Первый — с преобладанием зимних и зимне-весенних осадков. Это территория Западного Памира. Второй — с преобладанием летних осадков, к которому относится Восточный Памир и верховья Пянджа.

Как показал опыт предыдущих исследований, поля осадков во внутригорных районах имеют весьма сложную структуру, зависящую от многих факторов, таких как высота местности, удаление от орографических узлов, степень открытости влагонесущим потокам и т. д. Одновременный учет их далеко не всегда приводит к положительным результатам. Мы пошли по пути выделения отдельных районов, имеющих различное распределение осадков по высоте.

В бассейне Пянджа было выделено шесть районов (табл. 1).

Таблица 1

Деление бассейна р. Пяндж на районы однородного распределения осадков

№ района	Бассейны рек, входящих в район
1	Кызылсу, Яхсу
2	Правые притоки Пянджа между Кызылсу и Ванч, р. Кокча, левые притоки Пянджа между Кокчей и Варфод
3	Ванч, Язгулем и Варфод
4	Низовья Бартанга, Гунта, бассейн р. Шева и оз. Шева
5	Верховья Бартанга, Гунта и Шахдара
6	Верховья Пянджа, Мургаб, верховья р. Кокуйбель

По полученным зависимостям были рассчитаны параметры полей норм сезонных и месячных сумм осадков. Оценки на численной аппроксимации свидетельствуют об удовлетворительных результатах расчета (табл. 2, рис. 2).

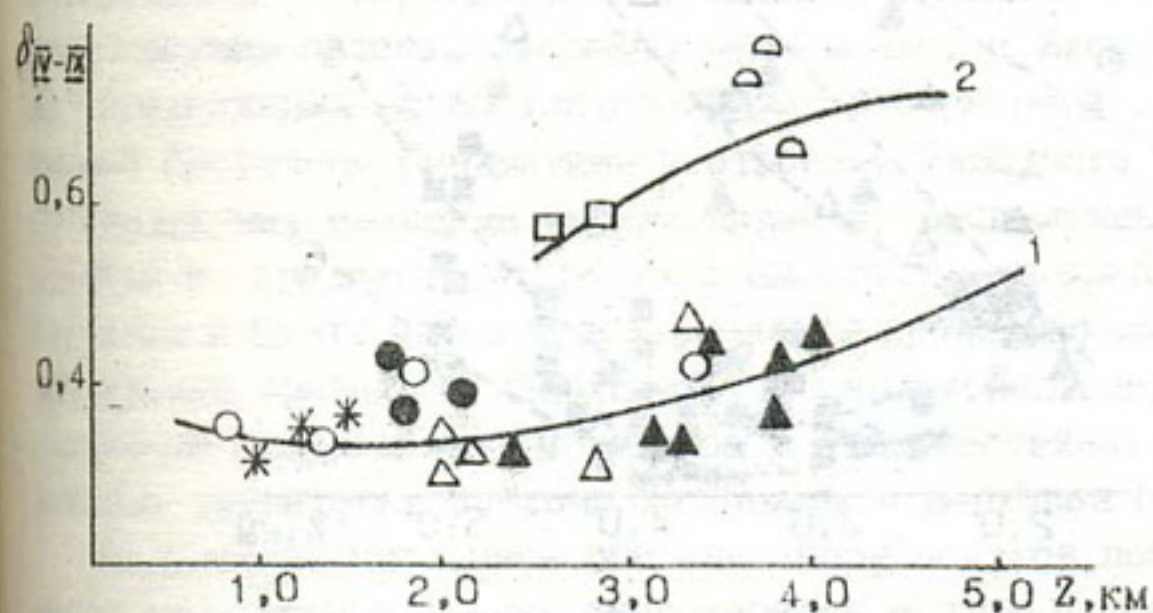
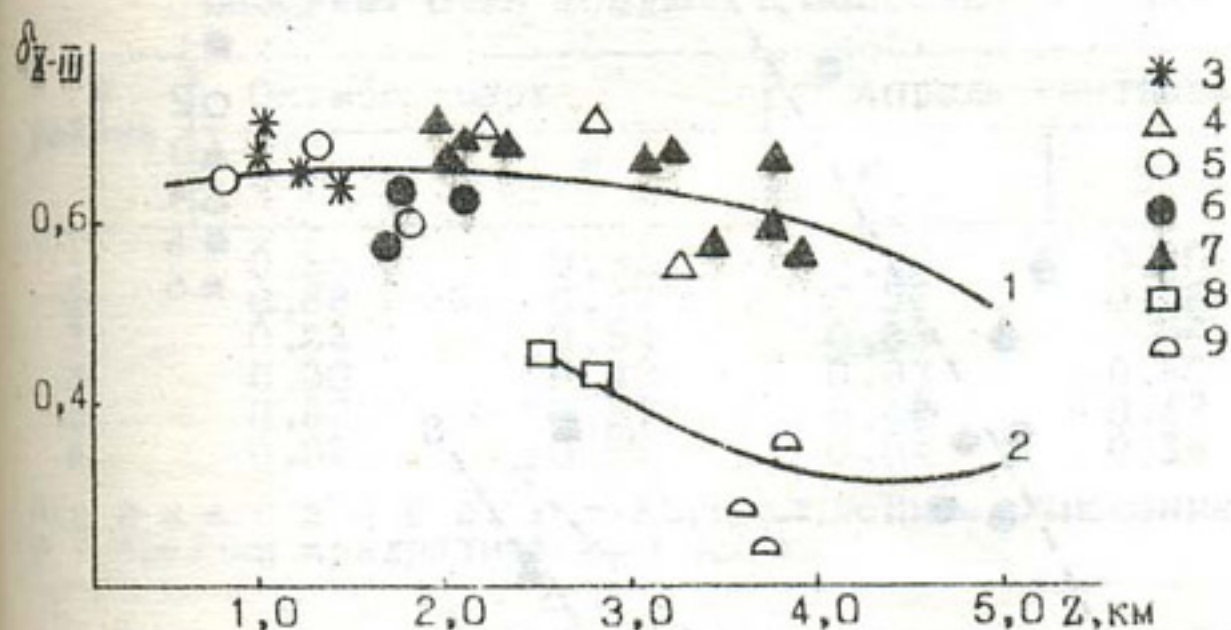


Рис.1. Зависимости доли сезонных сумм осадков от высоты местности в бассейне р. Пяндж.

1 - Западный Памир, 2 - Верховья Пянджа и Восточный Памир, 3 - Кызылсу, Яхсу, 4 - Бартанг, 5 - Ванч, 6 - Обухумбоу, Обивисхарви, 7 - Гунт, Шахдара, 8 - Восточный Памир, 9 - Мургаб

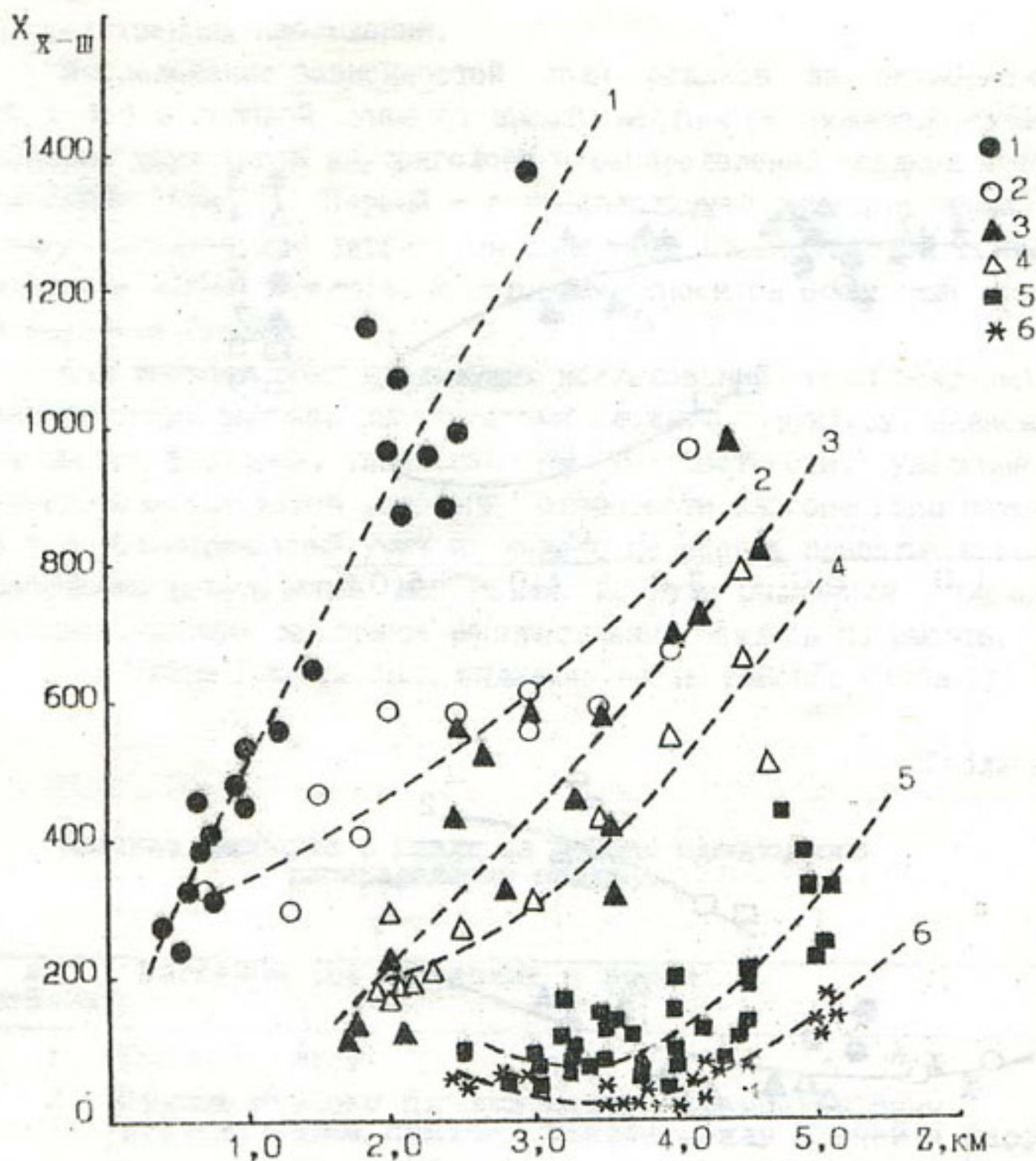


Рис.2. Зависимости осадков за октябрь-март от высоты местности в бассейне р.Пяндж.

1 - Кызылсу, Яхсу, 2 - притоки Пянджа между Кызылсу и Ванчем, Кокча, 3 - Банч, Язгулем, 4 - низовья Бартанга и Гунта, оз. Шева, 5 - верховья Бартанга и Гунта, 6 - верховья Пянджа, Мургаб.

**Оценки точности численного описания полей нори
сезонных сумм осадков в бассейне р. Пяндж**

№ района	Октябрь-март		Апрель-сентябрь	
	г	σ	г	σ
1	0,95	0,32	0,96	0,30
2	0,88	0,47	0,93	0,38
3	0,84	0,54	0,83	0,56
4	0,90	0,43	0,93	0,36
5	0,82	0,57	0,88	0,47
6	0,92	0,38	0,94	0,34

Примечание. г - корреляционное отношение,
σ - средняя квадратическая ошибка.

Таким образом, полученное поле осадков в исследуемом бассейне согласуется с общей картиной атмосферных процессов в этом регионе. Наиболее увлажненными являются благоприятно ориентированные, открытые по отношению к западным и юго-западным влагонесущим потокам бассейны рек Кызылсу и Яхсу. Далее, по мере продвижения на восток, проявляется барьерный эффект, создаваемый Восточным Гиндукушем и отрогами Западного и Центрального Гиндукуша, имеющими меридиональное расположение. Количество осадков и градиент их роста с высотой уменьшается. В долинах Бартанга и Гунта четко прослеживается продольно-циркуляционный эффект, что привело к необходимости выделения двух районов с различным распределением осадков в этих бассейнах. Наименее увлажнена территория Восточного Памира и верховья Пянджа.

Полученное численное описание поля осадков позволило провести комплексную оценку снегозапасов в этом бассейне.

Для расчета снегозапасов была использована модель формирования снежного покрова в горах [5]. В результате ее адаптации для 22 частных бассейнов были получены ряды талого и дождевого поступления, распределения снегозапасов по высотным зонам и динамика сезонной снеговой границы.

Для оценки расчета использованы данные наземных маршрутных и декадных снегосъемок и измерений толщины снежного покрова по

авиадистанционным рейкам. Несмотря на различный масштаб осреднения, данные измерений позволяют оценить степень соответствия результатов расчета по модели общему фону снегонакопления в бассейне. К сожалению, маршрутные снегосъемки охватывают лишь нижние зоны долин, а дистанционные рейки установлены только в бассейнах рек Кызылсу и Яхсу. Тем не менее расчеты показали вполне удовлетворительное соответствие рассчитанных и измеренных снегозапасов.

Полученные результаты могут быть использованы в практике для оценки фоновое снегонакопления в зонах формирования стока а также для дальнейших исследований в области расчетов и прогнозов стока.

Список литературы

1. К р е н к е А.Н. Массообмен в ледниковых системах на территории СССР/Под ред. Г.И.Слабкович. - Л.: Гидрометеиздат, 1982. - 288с.
2. М е т о д и ч е с к и е рекомендации по определению характеристик режима снежного покрова в горах Средней Азии /САННИ: сост. М.И. Геткер. - Ташкент, 1988. - 146с.
3. Ш е н ц и с И.Д. Численное описание полей норм осадков для модели формирования снежного покрова в горах // Тр. САНИГМИ. - 1988. - Вып. 127(208). - С. 39-49.
4. Ш е н ц и с И.Д. Метод расчета макромасштабного поля осадков в горах // Тр. САННИ Госкомгидромета. - 1982. - Вып. 94(175) - С. 40-52.
5. Ш е н ц и с И.Д. Макромасштабная модель формирования снежного покрова на территории горного района // Тр. САННИ Госкомгидромета. - 1986. - Вып. 111(192). - С. 15-27.

МЕТОД РАСЧЕТА БОКОВОЙ ПРИТОЧНОСТИ НА УЧАСТКАХ РЕК НАРЫН, КАРАДАРЬЯ И СЫРДАРЬЯ В ПРЕДЕЛАХ ОРОШАЕМОЙ ЗОНЫ ФЕРГАНСКОЙ ДОЛИНЫ

Вопросы использования стока рек на орошение, его перераспределение по мелиорируемой территории и формирование стока воды в коллекторно-дренажной сети и вновь поступление ее в речную сеть, являются предметом многочисленных исследований как в плане рационального использования водных ресурсов региона, так и оценки возвратного стока (с учетом подземной составляющей) с орошаемых земель и изменения гидрологического и гидрохимического режима реки по ее длине.

В настоящее время расчеты водного режима орошаемых массивов и боковой приточности для бассейнов рек с интенсивным орошаемым земледелием на перспективу основываются на методах русловых и территориальных балансов при заданном внутригодовом режиме водопотребления и режиме плановых попусков из русловых водохранилищ. Однако эти методы не позволяют выявить при заданной водообеспеченности года всю полноту изменения водного режима орошаемых земель и величины боковой приточности в русло реки. Они не дают представление об объективных закономерностях формирования водного режима орошаемой территории и стока бокового притока в ствол реки, что приводит к невязкам при составлении водохозяйственных балансов для орошаемых массивов на перспективу. Кроме того, эти методы не всегда приводят к желаемым результатам из-за неучета более сложного характера трансформации, приводящего к сдвигу фаз и сглаживанию экстремумов. В предлагаемой статье задача решается с помощью метода математического моделирования взаимосвязи системы "река-орошаемый массив", где в единой совокупности рассматриваются процессы формирования стока воды с орошаемых земель, их поступление в речную сеть и изменение гидрологического режима реки.

На рис. 1 представлена схема взаимосвязи реки с орошаемой территорией, которая позволяет увидеть взаимодействие основ-

ных факторов, определяющих изменение водно-солевого режима мелиорируемой территории и гидрологического и гидрохимического режима реки.

Боковая приточность на участке реки является результатом трансформации водозабора и стока малых рек на орошаемой части бассейна реки. Для описания процесса трансформации стока воды как в русле реки, так и на орошаемой территории составлена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которая подробно описана в работе / 1/. Здесь приведем лишь основные уравнения, описывающие изменение стока воды по участкам реки и водного режима участков орошения.

Для k -го участка реки

$$\frac{d Y_k}{d t} + \frac{A_k^{1/\lambda_k}}{(1 + 1/P_{bk}) L_k B_k} Y_k^{\lambda_k} = \frac{A_k^{1/\lambda_k}}{(1 + 1/P_{bk}) L_k B_k} x$$

$$x \left\{ Y_{k-1}^{\lambda_{k-1}} + L_k B_k \left[(A_x + P_x) - E_E \right]_k + M_k \right\}, \quad (1)$$

где

$$Y_k = Q_k^{1/\lambda_k}, \quad (2)$$

Q_k - расход воды, λ_k , P_{bk} , A_k - обобщенные параметры, определяющие морфометрические и гидравлические характеристики русла реки [1], L_k и B_k - длина участка реки и средняя ширина русла, $B_k L_k \left[(A_x + P_x) - E_E \right]_k$ - поступление и потеря воды за счет таяния сезонного снега, выпадения жидких осадков и суммарного испарения,

$$M_k = \sum_{i=1}^N Q_{cik} - \sum_{i=1}^N Q_{bki} + \sum_{i=1}^N Q_{Rik} + \sum_{i=1}^N Q_{vik}. \quad (3)$$

Выражение (3) для M_k определяет взаимодействие поверхностных и подземных вод i -ых орошаемых участков мелиорируемой территории с k -ым участком реки, а сумма двух последних членов составляет величину боковой приточности. В этом выражении введены следующие обозначения: $\sum_{i=1}^N Q_{bki}$ - водозабор; $\sum_{i=1}^N Q_{cik}$ -

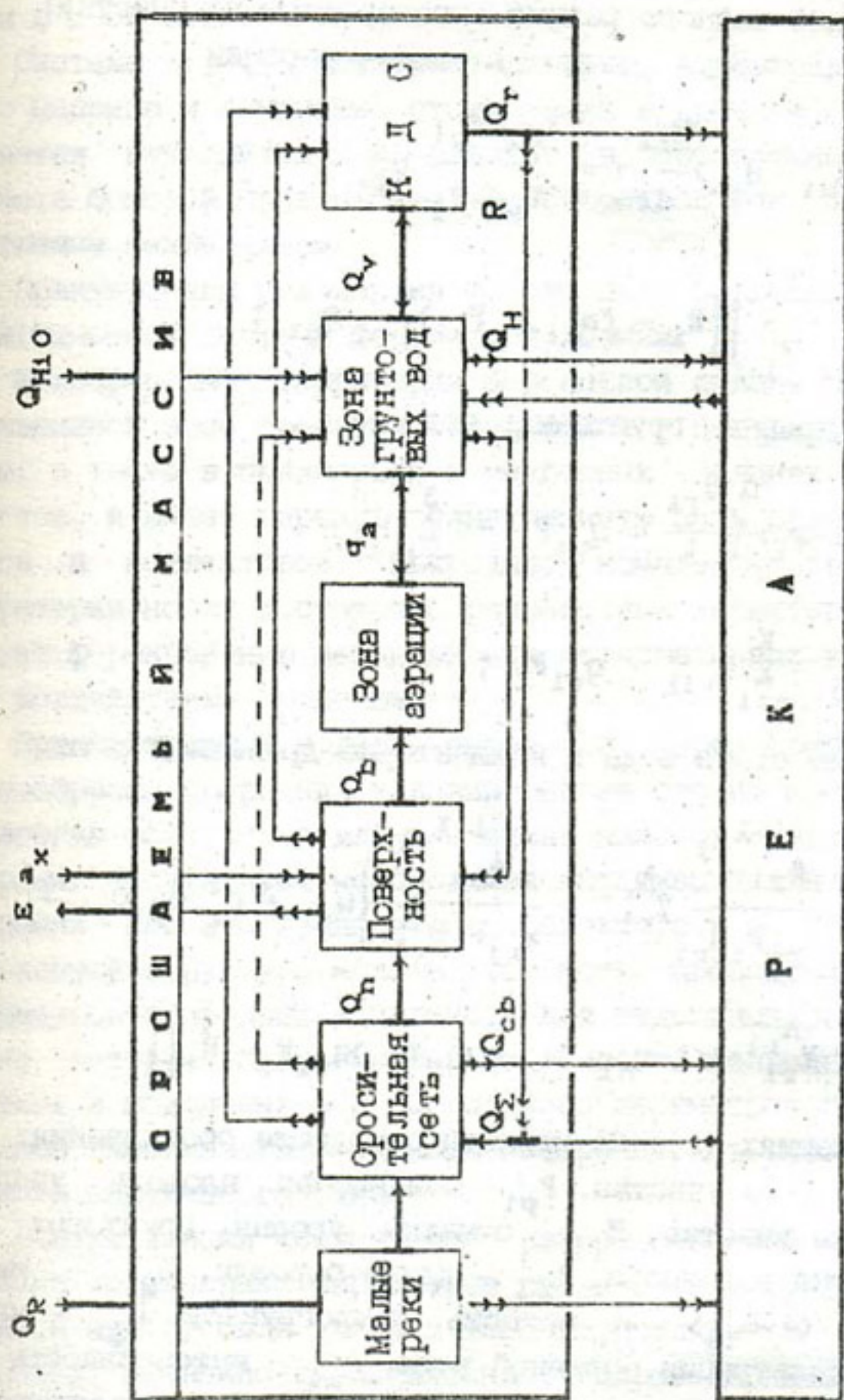


Рис. 1. Функциональная схема взаимодействия в системе "река-орошаемая территория".

сброс (катастрофический) воды из магистральных каналов;
 $\sum_{i=1}^N Q_{Rik}$ - приток воды по коллекторно-дренажной сети;
 $\sum_{i=1}^N Q_{vik}$ - выклинивание грунтовых вод.

Формирование водного режима i -го орошаемого участка:
 - изменение влажности почвы в зоне аэрации

$$(1 - \alpha_{1i})(Z_{ni} - H_{ri}) \frac{d\phi_i}{dt} = \frac{L_{\phi i}}{b_{mi}} \frac{P_{pi}}{F_i} U_{\phi i} - \left[1 - \frac{L_{\phi i}}{b_{mi}} \frac{P_{pi}}{F_i} \right] [E_i - (a_{xi} + P_{xi})] - q_{ai}; \quad (4)$$

- изменение уровня грунтовых вод

$$(1 - \alpha_{1i})(1 - \phi_i) \frac{dH_{ri}}{dt} = q_{ai} F_i - \sum_{r=1}^3 Q_{rri} - \sum_{j=0}^N Q_{Hij} - \sum_{r=1}^K Q_{vik} - q_{vi} F_i; \quad (5)$$

- формирование стока воды в коллекторно-дренажной сети

$$\frac{dY_{ri}}{dt} + \frac{A_{ri}}{\chi_{ri} F_i B_{ri}} Y_{ri}^{\lambda_{ri}} = \frac{A_{ri}}{\chi_{ri} F_i B_{ri}} \left\{ Q_{ri} + \delta_r^2 \delta_{pi} Q_{pi} + \delta_r^3 \left[\sum_{r=1}^3 Y_{ri}^{\lambda_{ri}} + (1 - \eta_{ni}) Q_{ni} + (1 - \eta_{vi}) q_{vi} F_i - R_i \right] \right\}. \quad (6)$$

В уравнениях (1)-(6) приняты следующие обозначения:
 F_i - площадь i -го участка, P_{pi} - поливаемая площадь участка,
 Z_{ni} - отметка участка, H_{ri} - отметка уровня грунтовых вод,
 Z_{bgi} - отметка водоупора, $L_{\phi i}$ - длина борозды, b_{mi} - ширина междурядьев, $(1 - \alpha_{1i})$ - пористость почвогрунтов, $U_{\phi i}$ - интенсивность инфильтрации поливной воды, q_{ai} - интенсивность влагообмена зоны аэрации с грунтовыми водами, E_i - суммарное испарение, Q_{rri} - выклинивание грунтовых вод в r -ую коллектор-

но-дренажную сеть, Q_{nij} - переток грунтовых вод из i -го участка в j -ый, Q_{bik} - выклинивание грунтовых вод в k -ый участок реки, q_{vi} - удельный дебит скважин вертикального дренажа, R_i - забор воды на орошение из коллекторной сети, h_{ri} - глубина воды в r -ой сети.

Система (1)-(6) описывает динамику водного режима орошаемого массива и изменение стока воды в речной системе. Она является вычислительной основой в программном комплексе расчета боковой приточности для бассейнов рек с интенсивным орошаемым земледелием.

Практическая реализация метода была проведена на примере ирригационной системы Ферганской долины.

Мелиорируемая территория Ферганской долины располагается в равнинной зоне орошения, находящейся в центральной части долины, а также в предгорьях и межгорных долинах, скаймляющих хребтов, и имеет широкую разветвленную сеть оросительных каналов и коллекторов. Природные комплексы рассматриваемой территории носят достаточно разнородный характер, что способствует формированию неодинаковых мелиоративных условий земель под воздействием орошения.

При построении модели орошаемой территории учесть все разнообразие природных условий весьма сложно. Кроме того, это не всегда эффективно для различных классов задач. С другой стороны, отсутствует необходимая информация для их численного описания. Все это приводит к необходимости построения генерализованной структуры модели, то есть проведению осреднения параметров природных комплексов для отдельных районов территории, которые взаимосвязаны между собой посредством поверхностных и подземных вод. Осреднение параметров природных комплексов выполнялось по данным измерений, которые имеются для данного выделенного района.

Генерализация исследуемого района бассейна Сырдарьи выполнена по основным параметрам русла реки и орошаемой территории. В основу были приняты топографические (М 1:500 000 и крупнее), почвенно-климатические, гидрогеологические и мелиоративные карты района.

На основе проведенного анализа природных условий мелиори-

руемой территории Ферганской долины, учитывающие особенности трансформации поверхностного стока, формирования водного режима орошаемых земель и возвратного стока, а также наличия исходной гидрометеорологической информации, определена модель системы "река-орошаемый массив", состоящая из взаимосвязанных участков реки и участков орошаемой территории.

Ствол Сырдарьи состоит из четырех участков, разделенных основными гидрометрическими створами: первый участок - здесь условно принято, что русло Нарына от створа Учкурган и Карадарьи от створа кишл. Карабагиш до их слияния представляет собой как единое русло с осредненными параметрами; второй участок - от слияния рек Нарын и Карадарья до кишл. Каль; третий участок - от кишл. Каль до кишл. Акджар; четвертый участок - от кишл. Акджар до Чильмахрама.

Численные значения основных морфометрических и гидравлических характеристик для участков реки определялись по данным измеренных расходов воды на гидрометрических постах рек Нарын, Карадарья и Сырдарья за ряд лет различной водности.

Участки мелиорируемой зоны бассейна реки определялись для междуречья рек Нарын и Карадарья, левобережья и правобережья Сырдарьи.

Для областей лево- и правобережья проведено разбиение их на равнинную и предгорную зоны. Это вызвано прежде всего различием источников орошения. Если предгорные области орошаются стоком малых рек, стекающих с окаймляющих гор Ферганской долины, то равнинная часть мелиорируемой территории орошается в основном водами рек Нарын, Карадарья и Сырдарья, поступающих по магистральным каналам.

Участки орошаемой территории Ферганской долины:

первый участок - расположен в междуречье Нарына и Карадарьи, ограниченный на востоке в предгорной части изогипсой 1000 м;

второй участок - предгорная часть левобережной орошаемой зоны, ограниченная в верхней части линией возможного орошения в предгорной зоне Алайского хребта (800-1000 м), нижняя линия проходит от Андижанского водохранилища по каналу Савай до р. Акбура, далее по Южному Ферганскому каналу до Исфайрам-Ша-

химарданской системы, где по Язъяваскому соросу переходит до Большого Ферганского канала, по которому граница данного участка доходит до Кайраксумского водохранилища;

третий участок - равнинная часть левобережной орошаемой зоны Ферганской долины. Верхняя граница проходит по линии нижней границы второго участка, а нижняя - по левому берегу Сырдарьи;

четвертый участок - предгорная часть правобережной орошаемой зоны, ограниченная верхней линией возможного орошения в предгорьях Атсайского и Чаткальского хребтов (800-1000 м) и Северным Ферганским каналом;

пятый участок - равнинная часть правобережной зоны орошения, расположенная между Северным Ферганским каналом и правым берегом Сырдарьи.

Для каждого участка были определены численные значения основных их характеристик, которые определяют площадные, почвенные, климатические и мелиоративные условия участков орошаемой зоны бассейна реки.

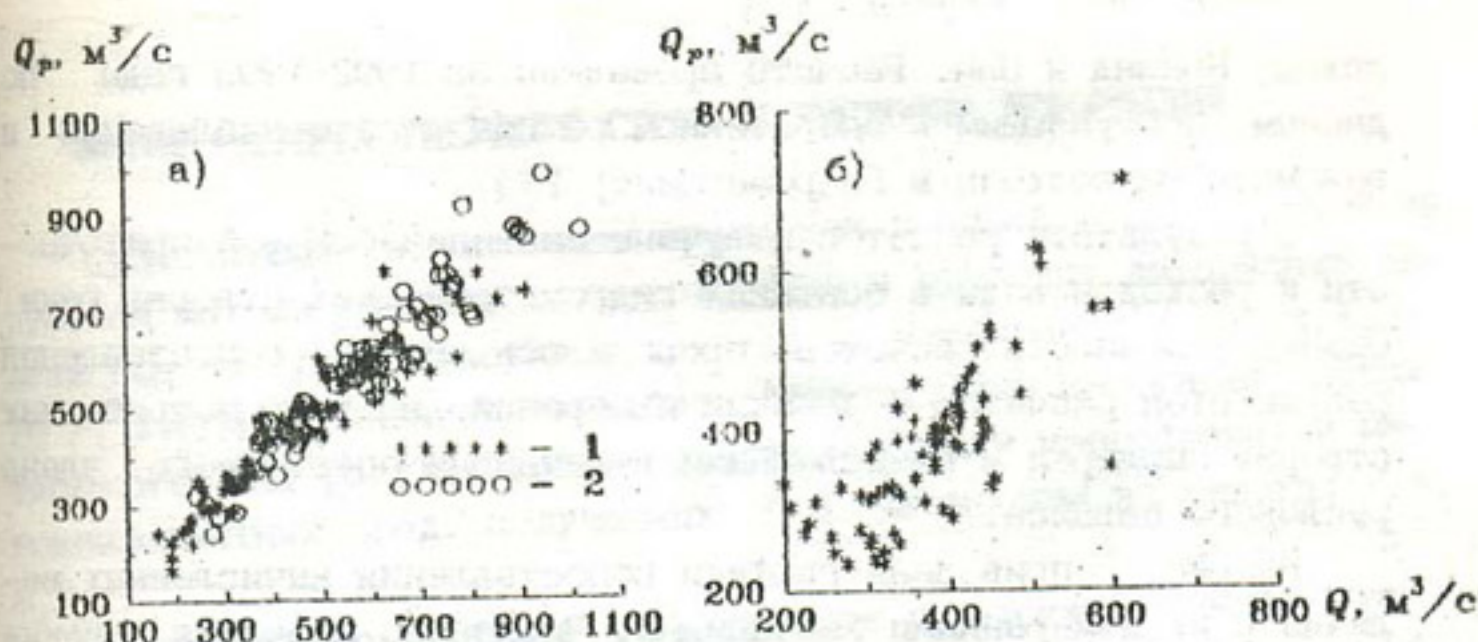
Ирригационная система Ферганской долины представляет собой сложную сеть оросительных и дренажных каналов. В настоящее время не имеется достаточно полной информации о использовании воды на орошение. Поэтому по отдельным характеристикам приходится довольствоваться некоторыми средними их значениями или строить оптимизационный процесс по их определению. Это довольно не простой вопрос и однозначного решения можно не получить, так как данная задача многокритериальная. Определение параметров будет зависеть от выбранной минимизируемой функции.

Входными данными являлись: расходы воды по р. Нарын - п. Учсурган и р. Карадарья - кишл. Карабагиш, водозаборы по головным сооружениям основных магистральных каналов, среднесуточные расходы по створам малых рек. В таблице приведены основные водотоки, по которым поступает вода на орошение участков мелиорируемой территории Ферганской долины.

Метеорологические условия участков орошения, включая дефицит влажности воздуха, суточные суммы осадков и температуру воздуха, характеризовались данными наблюдений по станциям Ан-

**Распределение естественных водотоков,
каналов и сбросов между орошаемыми участками
орошаемой зоны Ферганской долины**

Река	Пост	Каналы	Сбросы из каналов
Участок 1			
Кугарт	Михайловское	Левобережный	ПК442-28
Чангет	Чангет	Большой Ферганский	
Тентексай	Чарвак	Правобережный	
Шайдан	Шайдан	Подпитывающий	
Майлису	Кайрагач	Сиза	
		Мелкие ответвления из Карадарьи	
		Пахтабад	
Участок 2			
Араван Сай	Каракол		
Акбура	Паган		
Абширсай	Уч-Терек		
Исфайрамсай	Лянгар		
Шахмардан	Пульган		
С о х	Сарыканда		
Исфара	Таш-Курган		
Участок 3			
		Тополино	ПК-469
		Улугнар	ПК-77
		Большой Ферганский	Ахунбабаева
		на Куйганьяре	
		Ахунбабаева	
		Чиганакский	
		Фрунзенский	
		Временные насосные станции	
Участок 4			
Падша Ата	Тосту		
Кассансай	нижний бьеф		
	водохранилища		
Гавасай	Гава		
Чадак	Устье р. Джулай- сай		
Участок 5			
		Большой Наманганский	
		Северный Ферганский	



Ри . 2. Сравнение результатов расчетов (Q_p) с измеренными их значениями: а) среднедекадные расходы воды р.Сырдарья по створам Каль(1) и Акджар(2); б) среднедекадная величина боковой приточности на участке р.Нарын-Учкурган и р. Карадарья-Карабагиш до р.Сырдарья-Акджар за 1992-1993 годы.

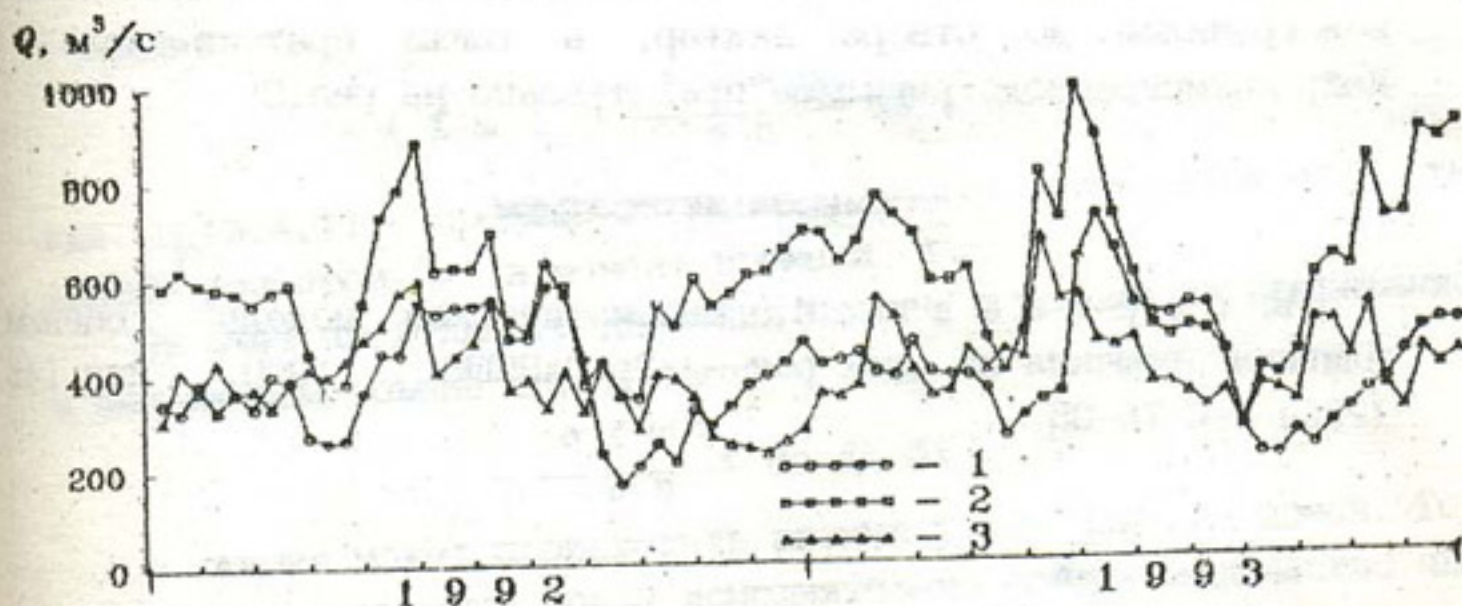


Рис.3. Внутригодовой ход рассчитанных среднедекадных величин боковой приточности в русло Сырдарьи в пределах Ферганской долины и притока воды в Кайракумское водохранилище за 1992-1993 годы (1 - приток по рекам Нарын и Карадарья, 2 - сток в Кайракумское водохранилище, 3-боковой приток).

джен, Коканд и Пап. Расчеты проведены за 1992-1993 годы по данным, поступающим в оперативном режиме с сети наблюдений и ведомств Минводхоза в Гидрометцентр РУз.

В результате расчетов получены значения боковой приточности и расходов воды в основных гидрометрических створах реки. Оценка успешности расчетов проводилась путем сопоставления результатов расчетов с данными измерений в гидрометрических створах Сырдарьи и вычисленными величинами остаточного члена руслового баланса.

На рис. 2 приведены графики сопоставления вычисленных величин с их измеренными значениями. Численные значения оценки (з/о) для среднедекадных значений расходов воды по гидрометрическим створам Каль и Акдзар соответственно равны 0,35 и 0,31, для среднемесячных величин - 0,30 и 0,22. Для величины боковой приточности эти оценки несколько выше и для участка р.Нарын-Учкуган и Карадарья-Карабагиш до р.Сырдарья-Акдзар составляют по среднедекадным величинам 0,72, а среднемесячным - 0,62.

Внутригодовой ход рассчитанных среднедекадных величин боковой приточности в русло рек Нарын, Карадарья и Сырдарья на участке от нижнего бьефа Токтогульского и Андижанского водохранилищ до створа Акдзар, а также притока воды в Кайрыкумское водохранилище представлено на рис.2.

Список литературы

1. Сергеев А. И. Математическая модель оценки влияния орошения на сток рек //Тр. САНИГМИ. -1990. -Вып.145 (226). -С.76-85.

МЕТОД РАСЧЕТА ТВЕРДОГО СТОКА И РУСЛОВЫХ ДЕФОРМАЦИИ

Существующие в настоящее время как в нашей стране, так и за рубежом методы расчета твердого стока и русловых деформаций далеки еще от совершенства и требуют их уточнения / 1,2,3,4,9, 10 /. Такое уточнение может быть осуществлено на основе новых теоретических результатов в области механики многофазных и многокомпонентных сред, полученных Ю.М. Денисовым в работах / 5, 6,7 /.

Обозначим через $f(s, \delta, t)$ - среднее по живому сечению потока число частиц размером от $\delta - 1/2 d\delta$ до $\delta + 1/2 d\delta$ в единице фазового объема, находящегося на расстоянии s по формуле от некоторого выбранного начала, в момент времени t .

Выделим в потоке геометрический объем $\omega(s, t) ds$, где $\omega(s, t)$ - площадь живого сечения потока на расстоянии s в момент времени t . Число частиц указанного размера в этом объеме равно $f(s, \delta, t) \omega(s, t) ds d\delta$.

За время dt в выделенный объем войдет число частиц

$$f \omega u_p(s, \delta, t) d\delta dt$$

и выйдет

$$- \left(f \omega u_p + \frac{\partial f \omega u_p}{\partial s} ds \right) d\delta dt,$$

где $u_p(s, \delta, t)$ - средняя по живому сечению продольная скорость частиц размером δ в момент времени t .

За счет продольного движения частиц в потоке их приращение в выделенном объеме определится

$$- \frac{\partial f \omega u_p}{\partial s} ds d\delta dt.$$

В потоке может происходить размыв русла или его намыв. Тогда в рассматриваемый объем дополнительно войдет количество частиц

$$\varepsilon_p(s, \delta, t) \chi_B(s, t) ds d\delta dt,$$

где $\varepsilon_p(s, \delta, t)$ есть поток частиц размером δ в интервале $d\delta$ с единицы площади дна в единицу времени, а $\chi_B(s, t)$ - длина смо-

ченного параметра. При осаждении частиц из потока величина ε_p будет отрицательной.

Приращение числа частиц размером δ в выделенном объеме за время dt равно :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \omega \, ds \, d\delta \, dt .$$

Последнее выражение равно сумме всех предыдущих поступлений числа частиц в рассматриваемый объем. Складывая все эти поступления и поделив их на $ds \, d\delta \, dt$, найдем уравнение баланса числа частиц размером δ в русловом потоке:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \omega + \frac{\partial f}{\partial s} \omega u_p = \varepsilon_p \chi_B . \quad (1)$$

Согласно исследованиям К.М. Денисова, при распределении в потоке частиц размером δ , не сильно отличающимся от равновесного, их скорость вдоль потока равна :

$$u_p(s, \delta, t) = u(s, t) + \frac{k_2 \delta^2}{\eta \nu_0} \left[\frac{\rho_p}{\rho} \right] \left[\left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right) (\vec{g} \cdot \vec{\tau}) - \frac{\sigma_{up}^2}{3} \frac{1}{r} (\vec{\tau} \text{ grad } r) \right] . \quad (2)$$

Здесь $u(s, t)$ — средняя по живому сечению скорость жидкой фазы; k_2 — безразмерный параметр, зависящий от формы частиц и равный примерно 0,20 — 0,25; η — безразмерный коэффициент стесненности движения; ν_0 — коэффициент кинематической вязкости воды; ρ и ρ_p — соответственно плотность воды и плотность частицы; $\vec{g}$ — вектор ускорения силы тяжести; $\vec{\tau}$ — единичный вектор, касательный к оси потока; $\sigma_{up}^2 = \sigma_{up}^2(s, \delta, t)$ — дисперсия скорости частиц размером δ .

$$\sigma_{up}^2 = \sigma_{ups}^2 + \sigma_{uph}^2 + \sigma_{upb}^2 , \quad (3)$$

где σ_{ups}^2 , σ_{uph}^2 и σ_{upb}^2 есть соответственно дисперсии скорости частиц вдоль потока, в вертикальном направлении и поперек потока. Выражения для них будут приведены ниже.

Согласно векторному анализу относительно производных

$$\dot{t} \operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial s}, \quad (4)$$

$$\dot{g} \dot{t} = -g (\dot{K} \dot{t}) = -g \frac{\partial z_B}{\partial s}. \quad (5)$$

Здесь $\dot{K}$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх, $z_B = z_B(s, t)$ — отметка уровня воды в створе s в момент времени t .

Подставляя (2), (4) и (5) в (1), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} \omega + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ f \omega \left[u - \left(\frac{\rho_p}{\rho} - 1 \right) \frac{k_2 \delta^2}{\eta v_0} g \frac{\partial z_B}{\partial s} \right] \right\} = \\ = \frac{k_2 \delta^2}{\eta v_0} \left[\frac{\rho_p}{\rho} \right] \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\sigma_{up}}{3} \omega \frac{\partial f}{\partial s} \right) + \varepsilon_p \chi_B. \end{aligned} \quad (6)$$

Дифференциальное уравнение в частных производных (6) второго порядка по s и первого по t (параболическое) решается при начальных условиях $f(s, \delta, 0) = \psi_f(s, \delta)$ и следующих граничных условиях:

$$f(s_0, \delta, t) = \alpha_0(s_0, \delta, t); \quad \frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{s=L} = 0.$$

Перейдем теперь к наиболее важной в данной проблеме задаче определения величины $\varepsilon_p(s, \delta, t)$, то есть к расчету размыва или намыва русла. Условимся все характеристики потока у дна, но над дном снабжать индексом o , а характеристики у дна, но под дном индексом n .

Согласно указанным работам Е.М. Денисова [5 — 8] и из рассмотренных там краевых условий, можно показать, что если пренебречь квадратом уклона дна, то скорость движения частиц у дна над дном по нормали к нему u_{pno} есть

$$\begin{aligned} u_{pno} = \frac{k_2 \delta^2}{\eta v_0} \left[\frac{\rho_p}{\rho} \right] \left[- \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right) g - \right. \\ \left. - \frac{\sigma_{up}}{3} \frac{k_n}{R} \frac{(f - f_0)}{f_0} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где R — гидравлический радиус потока, k_n — безразмерный коэффициент пропорциональности.

Поток объема частиц размером δ в интервале $d\delta$ через еди-

нищу поверхности в единицу времени $q_{pн0}$ равен объему частицы $k_w \delta^3$, умноженному на число частиц f_0 и на их скорость $u_{pн0}$; k_w - безразмерный коэффициент пропорциональности объема частицы v_p кубу характерного ее радиуса δ .

$$q_{pн0} = \frac{k_2 k_w}{\eta v_0} \left(\frac{\rho_p}{\rho} \right) \delta^5 \left\{ \left[\frac{k_R}{3} \frac{\sigma_{up}^2}{R} - \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right) g \right] f_0 - \frac{k_R}{3} \frac{\sigma_{up}^2}{R} f \right\}. \quad (8)$$

Скорость движения частиц у дна под дном по нормали к нему $u_{pнп}$ равна

$$u_{pнп} = \frac{k_2 \delta^2}{\eta v_0} \left(\frac{\rho_p}{\rho} \right) \left[- \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right) g - \frac{\sigma_{up}^2 (f_0 - f_{п})}{6 \delta f_{п}} - \frac{\varepsilon_a}{\delta_e \rho_p k_w \delta^3} \right], \quad (9)$$

где ε_a - энергия связи частицы с другими частицами; δ_e - характерное расстояние этой связи; $k_w \delta^3 = v_p$ - объем частицы.

Поток объема частиц $q_{pнп}$ размером δ в интервале $d\delta$ у дна с поддонной области через единицу поверхности в единицу времени есть

$$q_{pнп} = \frac{k_2 k_w}{\eta v_0} \left(\frac{\rho_p}{\rho} \right) \delta^5 \left\{ \left[\frac{\sigma_{up}^2}{6 \delta} - \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right) g - \frac{\varepsilon_a}{\delta_e \rho_p k_w \delta^3} \right] f_{п} - \frac{\sigma_{up}^2}{6 \delta} f_0 \right\}. \quad (10)$$

Граничным условием здесь является равенство потоков через границу раздела (дно) по обе ее стороны, $q_{pн0} = q_{pнп}$.

Приравнивая (8) и (10), получим

$$\begin{aligned} & \left[\frac{k_R}{3} \frac{\sigma_{up}^2}{R} - \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right) g \right] f_0 - \frac{k_R}{3} \frac{\sigma_{up}^2}{R} f = \\ & = \left[\frac{\sigma_{up}^2}{6 \delta} - \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right) g - \frac{\varepsilon_a}{\delta_e \rho_p k_w \delta^3} \right] f_{п} - \frac{\sigma_{up}^2}{6 \delta} f_0. \quad (11) \end{aligned}$$

Из равенства (II) найдем f_0 :

$$f_0 = \left\{ \left[\frac{\sigma_{up}^2}{6\delta} - \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right) g - \frac{\epsilon_a}{\delta \rho_p k_w \delta^3} \right] f_H + \frac{k_a}{3} \frac{\sigma_{up}^2}{R} f \right\} / \left[\frac{k_a}{3} \frac{\sigma_{up}^2}{R} + \frac{\sigma_{up}^2}{6\delta} - \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right) g \right] . \quad (12)$$

Подставив найденное значение f_0 в (8), выразим q_{pno} через f , f_H и σ_{up}^2 :

$$q_{pno} = \frac{\frac{k_a}{3R} \frac{k_2 k_w}{\eta \nu} \delta^3 \sigma_{up}^2}{\left(1 + 2 k_a \frac{\delta}{R} \right) S_{\pi\delta}} \left(\frac{\rho_p}{\rho} \right) \left(S_\pi S_\delta S_{\epsilon\delta} f_H - f \right) . \quad (13)$$

Здесь

$$S_{\pi\delta} = 1 - \frac{6 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right)}{\left(1 + 2 k_a \frac{\delta}{R} \right)} \left(\frac{\delta g}{\sigma_{up}^2} \right) , \quad (14)$$

$$S_\pi = 1 - \frac{3}{k_a} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right) \left(\frac{R g}{\sigma_{up}^2} \right) , \quad (15)$$

$$S_\delta = 1 - 6 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right) \left(\frac{\delta g}{\sigma_{up}^2} \right) , \quad (16)$$

$$S_{\epsilon\delta} = 1 - \frac{6 \delta \epsilon_a}{\delta \rho_p k_w \delta^3 \sigma_{up}^2 S_\delta} . \quad (17)$$

Как не трудно понять, величина ϵ_p равна потоку объема частиц q_{pno} размером δ , деленному на объем частицы $k_w \delta^3$:

$$\epsilon_p = \frac{\frac{k_a}{3R} \frac{k_2 \delta^2}{\eta \nu} \sigma_{up}^2}{\left(1 + 2 k_a \frac{\delta}{R} \right) S_{\pi\delta}} \left(\frac{\rho_p}{\rho} \right) \left(S_\pi S_\delta S_{\epsilon\delta} f_H - f \right) . \quad (18)$$

Здесь нужно отметить, что поскольку мы работаем в геометрическом, а в фазовом пространстве, то размерность f об-

ратна длине в четвертой степени, q_{pno} — обратна времени и ε_p — обратна приведению времени на длину в кубе.

Величина $S_{r\delta}$ практически всегда больше нуля и размыв или осаждение наносов будет зависеть от знака множителя в круглых скобках

$$S_r S_\delta S_{\varepsilon\delta} f_{\Pi} - f.$$

Если он положительный, то будет происходить размыв донных отложений размером δ . При его отрицательном значении будет осаждение наносов указанной величины. Если этот множитель равен нулю, то наносы с эффективным радиусом δ не будут ни оседать, ни взмучиваться, то есть будут находиться в равновесии с потоком и руслом. Значение f , при котором наблюдается такое состояние, обозначим через f^* и назовем насыщающим для данного размера наносов и состояния реки. Оно равно:

$$f^* = S_r S_\delta S_{\varepsilon\delta} f_{\Pi}. \quad (19)$$

Тогда (18) можно записать

$$\varepsilon_p = \frac{\frac{k_r}{3R} \frac{k_2 \delta^2}{\eta \nu} \sigma_{up}^2}{\left(1 + 2 \frac{k_r \delta}{R}\right) S_{r\delta}} \left\{ \frac{\rho_p}{\rho} \right\} (f^* - f). \quad (20)$$

Заметим, что при отсутствии сведений о функции α_0 , определяющей левое граничное условие, ее величина может быть принята равной равновесной концентрации числа частиц $f_0^*(s, \delta, t)$ размером δ .

Очень важной характеристикой в описании поведения наносов является дисперсия скорости частиц размером δ . Она определена К.М. Денисовым в зависимости от дисперсии скорости жидкости σ_u^2 , периода или круговой частоты ее пульсации Ω , вязкости жидкости, отношения плотности частицы к плотности жидкости и модуля разности релаксационных скоростей частицы и жидкости.

$$\sigma_{up1}^2 = \sigma_{u1}^2 / \left\{ 1 + k_2^2 \left(\frac{\rho_p}{\rho} \right)^2 \frac{\Omega^2 \delta^4}{[v_0 + k_1 \delta |u_p - u|]^2} \right\}, \quad (21)$$

где индекс 1 обозначает номер пространственной координаты, $\Omega = 2\pi / T_u$ и T_u есть период пульсации скорости жидкости, k_1 — безразмерный параметр, равный примерно 0,14.

Дисперсия скорости сплошной среды определена им следующим образом:

$$\sigma_{u1}^2 = A_1 u_1^2 + B_1 v_0 | \text{grad } u_1 |, \quad (22)$$

где A_1 и B_1 — безразмерные параметры, большие или равные нулю.

В нашем случае, как было сказано выше, мы имеем три составляющие дисперсии скорости частиц — σ_{ups}^2 , σ_{uph}^2 и σ_{upb}^2 . Им будут соответствовать согласно (21) и (22) три дисперсии скорости жидкости

$$\sigma_{us}^2 = A_s u^2 + B_s v_0 \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|, \quad (23)$$

$$\sigma_{uh}^2 = B_h v_0 \left| \frac{u}{R} \right|, \quad (24)$$

$$\sigma_{ub}^2 = B_b v_0 \left| \frac{u}{B_B} \right|. \quad (25)$$

Здесь B_B — ширина живого сечения по урезам; A_s , B_s , B_h , B_b — безразмерные параметры.

Запишем окончательное выражение для σ_{up}^2 с учетом равенств (3), (21), (23), (24) и (25)

$$\sigma_{up}^2 = \left[A_s u^2 + B_s v \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right| + B_h v \left| \frac{u}{R} \right| + B_b v \left| \frac{u}{B_B} \right| \right] / \left\{ 1 + k_2^2 \left(\frac{\rho_p}{\rho} \right)^2 \frac{\Omega^2 \delta^4}{[v + k_1 \delta |u_p - u|]^2} \right\}. \quad (26)$$

Для дальнейшего изложения введем понятия относительного объема фаз, их удельной поверхности и других характеристик многофазной среды.

Относительный объем твердой фазы

$$\alpha_p = \alpha_1 = \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} k_w \delta f(s, \delta, t) d\delta. \quad (27)$$

Относительный объем жидкой фазы

$$\alpha = \alpha_2 = I - \alpha_p = I - \alpha_1. \quad (28)$$

Удельная поверхность контакта твердой и жидкой фазы

$$\beta_{12} = \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} k_s \delta^2 f(s, \delta, t) d\delta \quad (29)$$

Характерная толщина жидкой фазы

$$\delta_2 = \begin{cases} k_\delta \frac{(1 - \alpha_p)}{\beta_{12}} & \text{для } \alpha_p > 0 \text{ и } k_\delta \frac{(1 - \alpha_p)}{\beta_{12}} < R, \\ R & \text{для } \alpha_p = 0 \text{ или } k_\delta \frac{(1 - \alpha_p)}{\beta_{12}} \geq R. \end{cases} \quad (30)$$

Кинематическая вязкость твердой частицы размером δ в двухфазной среде равна

$$\nu_p = \nu_{p0} + k_1 \delta |u_p(s, \delta, t) - u(s, t)| \quad (31)$$

Кинематическая вязкость жидкой фазы в двухфазной среде есть

$$\nu = \nu_0 + k_2 \delta_2 |u_p(s, \delta, t) - u(s, t)| \quad (32)$$

В приведенных формулах $\delta_{\min}$ и $\delta_{\max}$ — наименьший и наибольший характерный радиус частиц; k_w , k_s и k_δ — безразмерные коэффициенты пропорциональности объема частицы кубу ее размера, площади частицы ее квадрату размера и линейного размера частицы отношению ее объема к площади поверхности частицы; ν_{p0} и ν_0 — кинематические коэффициенты молекулярной вязкости частиц и жидкости, соответственно; k_1 и k_2 — безразмерные параметры соответственно равные приблизительно 0,14 и 0,018.

Чтобы найти скорость движения жидкости в двухфазной среде, рассмотрим силы на нее действующие.

1. Составляющая по потоку сила тяжести

$$- \alpha \rho_w ds g \frac{\partial z_B(s, t)}{\partial s}$$

2. Внутренняя для потока сила трения, обусловленная взаимодействием твердых частиц с жидкостью / 7 /

$$\omega ds \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} \frac{\chi_u \rho_p \nu_p \rho \nu}{(\delta_2 \rho_p \nu_p + \delta \rho \nu)} k_s \delta^2 f(s, \delta, t) \times$$

$$\times \left[u_p(s, \delta, t) - u(s, t) \right] d\delta \quad .$$

Так как для твердых частичек величину v_{p0} можно считать как угодно большой, то

$$\lim_{v_{p0} \rightarrow \infty} \frac{\chi_u \rho_p v_p \rho v}{(\delta_2 \rho_p v_p + \delta \rho v)} = \frac{\chi_u \rho}{\delta_2} \left[v_0 + k_2 \delta_2 \times \right. \\ \left. \times | u_p(s, \delta, t) - u(s, t) | \right] \quad .$$

Это выражение и следует использовать в дальнейшем в практических расчетах.

3. Диффузная сила, действующая на сплошную среду, согласно равенству действия и противодействия направлена в обратную сторону в сравнении с твердыми частицами

$$\omega ds \int_{\delta_{min}}^{\delta_{max}} \rho_p k_w \delta^3 \frac{\sigma_{up}^2}{3} \frac{\partial f}{\partial s} d\delta \quad .$$

4. Силы внешнего трения жидкой фазы с ложем потока :

а) сила вязкого трения

$$- k_v \alpha \rho v_0 \chi_B ds \frac{[u(s, t) - u_d(s, t)]}{R} \quad ,$$

б) сила квадратичного (инерционного трения)

$$- k_{II} \alpha \rho \chi_B ds | u(s, t) - u_d(s, t) | [u(s, t) - u_d(s, t)] \quad .$$

Общая сила внешнего трения равна

$$- k_v \alpha \frac{\rho}{R} \chi_B ds v_r [u(s, t) - u_d(s, t)] \quad ,$$

где

$$v_r = v_0 + k_r R | u(s, t) - u_d(s, t) | \quad , \quad (33)$$

$$k_r = k_{II} / k_v \quad .$$

5. Результирующая торцовых сил потока, действующая на жид-

$$\beta_{12} = \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} k_s \delta^2 f(s, \delta, t) d\delta \quad (29)$$

Характерная толщина жидкой фазы

$$\delta_2 = \begin{cases} k_\delta \frac{(1 - \alpha_p)}{\beta_{12}} & \text{для } \alpha_p > 0 \text{ и } k_\delta \frac{(1 - \alpha_p)}{\beta_{12}} < R, \\ R & \text{для } \alpha_p = 0 \text{ или } k_\delta \frac{(1 - \alpha_p)}{\beta_{12}} \geq R. \end{cases} \quad (30)$$

Кинематическая вязкость твердой частицы размером δ в двухфазной среде равна

$$\nu_p = \nu_{p0} + k_1 \delta |u_p(s, \delta, t) - u(s, t)| \quad (31)$$

Кинематическая вязкость жидкой фазы в двухфазной среде есть

$$\nu = \nu_0 + k_2 \delta_2 |u_p(s, \delta, t) - u(s, t)| \quad (32)$$

В приведенных формулах $\delta_{\min}$ и $\delta_{\max}$ — наименьший и наибольший характерный радиус частиц; k_w , k_s и k_δ — безразмерные коэффициенты пропорциональности объема частицы кубу ее размера, площади частицы ее квадрату размера и линейного размера частицы отношению ее объема к площади поверхности частицы; ν_{p0} и ν_0 — кинематические коэффициенты молекулярной вязкости частиц и жидкости, соответственно; k_1 и k_2 — безразмерные параметры соответственно равные приблизительно 0,14 и 0,018.

Чтобы найти скорость движения жидкости в двухфазной среде, рассмотрим силы на нее действующие.

1. Составляющая по потоку сила тяжести

$$- \alpha \rho_w ds g \frac{\partial z_B(s, t)}{\partial s}$$

2. Внутренняя для потока сила трения, обусловленная взаимодействием твердых частиц с жидкостью / 7 /

$$\omega ds \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} \frac{\chi_w \rho_p \nu_p \rho \nu}{(\delta_2 \rho_p \nu_p + \delta \rho \nu)} k_s \delta^2 f(s, \delta, t) \times$$

$$\times \left[u_p(s, \delta, t) - u(s, t) \right] d\delta \quad .$$

Так как для твердых частичек величину v_{p0} можно считать как угодно большой, то

$$\lim_{v_{p0} \rightarrow \infty} \frac{\chi_u \rho_p v_p \rho v}{(\delta_2 \rho_p v_p + \delta \rho v)} = \frac{\chi_u \rho}{\delta_2} \left[v_0 + k_2 \delta_2 \times \right. \\ \left. \times | u_p(s, \delta, t) - u(s, t) | \right] \quad .$$

Это выражение и следует использовать в дальнейшем в практических расчетах.

3. Диффузная сила, действующая на сплошную среду, согласно равенству действия и противодействия направлена в обратную сторону в сравнении с твердыми частицами

$$\omega ds \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} \rho_p k_w \delta^3 \frac{\sigma_{up}^2}{3} \frac{\partial f}{\partial s} d\delta \quad .$$

4. Силы внешнего трения жидкой фазы с ложем потока :

а) сила вязкого трения

$$- k_v \alpha \rho v_0 \chi_B ds \frac{| u(s, t) - u_d(s, t) |}{R} \quad ,$$

б) сила квадратичного (инерционного трения)

$$- k_{II} \alpha \rho \chi_B ds | u(s, t) - u_d(s, t) | | u(s, t) - u_d(s, t) | \quad .$$

Общая сила внешнего трения равна

$$- k_v \alpha \frac{\rho}{R} \chi_B ds v_T | u(s, t) - u_d(s, t) | \quad ,$$

где

$$v_T = v_0 + k_T R | u(s, t) - u_d(s, t) | \quad , \quad (33)$$

$$k_T = k_{II} / k_v \quad .$$

5. Результирующая торцовых сил потока, действующая на жид-

кую фазу, разна / 8 / :

$$\alpha \omega ds \rho v_T \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}.$$

6. Сила инерции жидкой фазы

$$- \omega ds \rho \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} \right).$$

Если есть сосредоточенные притоки и оттоки жидкой фазы, то их нужно соответствующим образом добавить в приведенное выражение для силы инерции / 8 /. Вклад в инерционный член распределенных притоков и оттоков крайне незначительный и намного меньше погрешностей определения учитываемых членов.

В приведенных выше выражениях χ_u - безразмерный параметр, равный примерно 9 ; k_v , k_H и k_T - также безразмерные параметры, причем два последних зависят от шероховатости русла.

Величина $u_d = u_d(t, s)$ - скорость движения донных наносов. Последняя, согласно М.А. Великанова и других исследователей / 2 - 4 /, может быть принята равной нулю, так как движение донных наносов обусловлено осаждением и поднятием взвешенных наносов.

Уравнение движения жидкой фазы найдется путем суммирования всех указанных сил и сокращения их на $\alpha \rho \omega ds$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = & -g \frac{\partial z_B(s, t)}{\partial s} + \\ & + \frac{1}{\rho \alpha} \int_{\delta_{min}}^{\delta_{max}} \left\{ \frac{\chi_u \rho_p v_p \rho v}{(\delta_z \rho_p v_p + \delta \rho v)} k_s \delta^2 f(s, \delta, t) \times \right. \\ & \times \left[u_p(s, \delta, t) - u(s, t) \right] + \rho_p k_w \delta^3 \frac{\sigma_{up}^2}{3} \frac{\partial f}{\partial s} \left. \right\} d\delta - \\ & - \frac{k_v}{R^2} \left[v_0 + k_T R |u(s, t)| \right] u(s, t) + \left[v_0 + \right. \\ & \left. + k_T R |u(s, t)| \right] \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

В этом уравнении коэффициенты кинематической вязкости ν_p и ν находятся по формулам (31) и (32), а скорость донных наносов $u_d(t, z)$, согласно изложенному выше, принята равной нулю.

Уравнение баланса объема жидкой фазы в дифференциальной форме запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \alpha \omega}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \omega u}{\partial z} = V_B (a_x - B) - \chi_B I_{\Phi} \quad (35)$$

Из динамического уравнения (34) следует, что влияние твердой фазы на движение жидкости в двухфазном потоке учитывается вторым членом правой части этого уравнения. Так, если скорость частиц будет больше скорости жидкости, то они станут ускорять движение жидкой фазы. Такой же эффект на ускорение течения жидкости оказывает увеличение концентрации взвешенных наносов по направлению течения, что в каком-то смысле аналогично влиянию осмотического давления на жидкость при неодинаковой концентрации солености в пространстве.

В полученные выражения входит, вообще говоря, неизвестная функция $f_{\Pi}(z, \delta, t)$ представляющая собой число частиц размером δ , находящихся на дне в единице объема фазового пространства в момент времени t , на расстоянии z от выбранного начала.

В фазовом объеме $\chi_B dz (2\delta) d\delta$ число частиц размером δ равно

$$f_{\Pi} \chi_B dz (2\delta) d\delta.$$

За время dt оно изменится на величину

$$\begin{aligned} -u_{p\pi 0} f_0 \chi_B dz d\delta dt &= -u_{p\pi \Pi} f_{\Pi} \chi_B dz d\delta dt = \\ &= -\varepsilon_p \chi_B dz d\delta dt. \end{aligned}$$

Тогда можно записать

$$2\delta \frac{\partial f_{\Pi} \chi_B}{\partial t} dz d\delta dt = -\varepsilon_p \chi_B dz d\delta dt,$$

или

$$\frac{\partial f_{\Pi}}{\partial t} + \frac{1}{\chi_B} \frac{\partial \chi_B}{\partial t} f_{\Pi} = -\frac{\varepsilon_p}{2\delta} \quad (36)$$

Однако, если учесть, что функция f_{Π} может быть только равной или больше нуля, то более точным выражением для f_{Π} будет:

$$\frac{\partial f_{\Pi}}{\partial t} + \frac{1}{\chi_B} \frac{\partial \chi_B}{\partial t} f_{\Pi} = \begin{cases} -\frac{\varepsilon_p}{2\delta} & \text{для } f_{\Pi} > 0 \text{ или } \varepsilon_p \leq 0, \\ 0 & \text{для } f_{\Pi} = 0 \text{ и } \varepsilon_p > 0. \end{cases} \quad (37)$$

Уравнение (37) решается при следующих начальных условиях

$$f_{\Pi}(s, \delta, 0) = \varphi_{\Pi}(s, \delta) \quad (38)$$

После всего сказанного запишем выражение для массового расхода взвешенных наносов $Q_R(s, t)$

$$Q_R(s, t) = \rho_p \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} k_w \delta^3 f(s, \delta, t) \omega(s, t) u_p(s, \delta, t) d\delta \quad (39)$$

Введем в рассмотрение функцию $F(s, z, t)$, представляющую собой площадь русла ниже горизонтали z на расстоянии s от выбранного начала в момент времени t .

Пусть $B(s, z, t)$ есть ширина русла на уровне z на расстоянии s в момент времени t . Она выражается через $F(s, z, t)$ следующим образом:

$$B(s, z, t) = \frac{\partial F}{\partial z} \quad (40)$$

Обозначим через $\chi(s, z, t)$ длину периметра руслового сечения и через $z_d(s, t)$ отметку наинизшей точки дна.

Связь между площадью живого сечения потока $\omega(s, t)$ и функцией $F(s, z, t)$ следующая:

если $z_B(s, t)$ есть отметка уровня воды в створе s в момент времени t , то

$$\omega(s, t) = F(s, z_B(s, t), t) \quad (41)$$

ширина живого сечения $B_B(s, t)$ есть

$$B_B(s, t) = \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=z_B} \quad (42)$$

длина смоченного периметра $\chi_B(s, t)$ равна

$$\chi_B(s, t) = \chi(s, z_B(s, t), t) \quad (43)$$

Из равенств (40), (41) и (42) следует

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{z=z_B} + B_B \frac{\partial z_B}{\partial t} \quad (44)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial s} \Big|_{z=z_B} + B_B \frac{\partial z_B}{\partial s} . \quad (45)$$

Так как z_D есть наименьшая точка дна, то

$$F(s, z_D(s, t), t) = 0 . \quad (46)$$

Продифференцируем (46) по s

$$\frac{\partial F}{\partial s} \Big|_{z=z_D} + \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=z_D} \frac{\partial z_D}{\partial s} = 0 . \quad (47)$$

Но

$$-\frac{\partial z_D}{\partial s} = 1_D , \quad (48)$$

где 1_D — есть уклон дна. Тогда из (47) и (48) следует важное соотношение :

$$1_D = - \left[\frac{\partial F}{\partial s} / \frac{\partial F}{\partial z} \right] \Big|_{z=z_D} \quad (49)$$

Для нахождения длины периметра сечения русла χ знание функции $F(s, z, t)$ недостаточно, так как одному и тому же F могут соответствовать различные значения χ . Однако с помощью функции F можно получить приближенную оценку периметра сечения русла. Она будет следующей :

$$\chi(s, t) = B(s, z_D(s, t), t) + [z_B(s, t) - z_D(s, t)] + \\ + \int_{z_D}^{z_B} \sqrt{1 + \left[\frac{\partial^2 F(s, z, t)}{\partial z^2} \right]^2} dz . \quad (50)$$

Перейдем к расчету изменения площади сечения русла в результате процессов намыва или размыва.

При оценки площади сечения функцией $F(s, z, t)$ невозможно учесть и описать конкретное место размыва или намыва в этом сечении. По этой причине общую площадь размыва за единицу времени мы будем равномерно распределять по смоченному периметру. Среднюю глубину размыва по нормали к смоченному периметру обозначим через $a_n(s, t)$. Ее величина, согласно изложенному выше,

равна :

$$a_n(s, t) = \frac{1}{a_d} \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} k_w \delta^3 \varepsilon_p(s, \delta, t) d\delta, \quad (51)$$

где a_d — относительный объем донных отложений у дна.
Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \begin{cases} \chi(s, z, t) a_n(s, t) & \text{для } z_d \leq z \leq z_B, \\ \chi(s, z_B(s, t), t) a_n(s, t) & \text{для } z > z_B. \end{cases} \quad (52)$$

В дифференциальное уравнение (52) входят две неизвестные функции F и χ . Чтобы получить уравнение от одной искомой функции, продифференцируем (52) по z , и учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial F}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial F}{\partial z} \right] = \frac{\partial B}{\partial t},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial z} &= 1 + \sqrt{1 + \left[\frac{\partial^2 F(s, z, t)}{\partial z^2} \right]^2} = \\ &= 1 + \sqrt{1 + \left[\frac{\partial B(s, z, t)}{\partial z} \right]^2}, \end{aligned}$$

а также

$$\frac{\partial \chi(s, z_B(s, t), t)}{\partial z} = 0,$$

найдем :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \begin{cases} a_n(s, t) \left[1 + \sqrt{1 + \left[\frac{\partial B}{\partial z} \right]^2} \right] & \text{для } z_d \leq z \leq z_B, \\ 0 & \text{для } z > z_B. \end{cases} \quad (53)$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка относительно $B(s, z, t)$ или второго порядка относительно $F(s, z, t)$, решается в общем случае численными методами при заданных начальных и граничных для F условиях.

$$B(s, z, 0) = \frac{\partial F}{\partial z} = \psi(s, z), \quad (54)$$

$$F(s, z_d(s, t), t) = 0, \quad (55)$$

где

$$z_d(s, t) = z_d(s, 0) - \int_0^t a_n(s, \tau) d\tau . \quad (56)$$

Список литературы

1. Б у е в и ч Ю. А. К статистической механике частиц, взвешенных в потоке газа // Прикладная математика и механика. - 1968. - Т. 32. - Вып. I. - С. 95 - 105.
2. В е л и к а н о в М. А. Динамика русловых потоков. - Л.: Гидрометеоиздат, 1949. - 473 с.
3. Г о н ч а р о в В. Н. Динамика русловых потоков. - Л.: Гидрометеоиздат, 1962. - 373 с.
4. Г р и ш а н и н К. В. Динамика русловых потоков. - Л.: Гидрометеоиздат, 1969. - 427 с.
5. Д е н и с о в Ю. М., Б о р о в и к о в а Л. Н. Описание движения твердых частиц в жидкости (газе) с помощью кинетических уравнений // Тр. САННИ Госкомгидромета. - 1981. - Вып. 81(162). - С. 67 - 76.
6. Д е н и с о в Ю. М., Д ж у р а е в А. А. Математическая модель смешанного облака // Тр. САННИ Госкомгидромета. - 1981. - Вып. 81(162). - С. 53 - 59.
7. Д е н и с о в Ю. М., О в ч а р е н к о В. П. Структура коэффициента сопротивления в уравнениях двухфазной системы // Тр. САННИГМИ. - 1975. - Вып. 26(107). - С. 127 - 132.
8. Д е н и с о в Ю. М., З и я х о д ж а е в М. З. О движении воды в руслах рек (каналов) с учетом динамических возмущений // Изв. АН УзССР, сер. техн. наук. - 1977. - N 6. - С. 68 - 74.
9. К а р а у ш е в А. В. Речная гидравлика. - Л.: Гидрометеоиздат, 1969. - 416 с.
10. М и р ц х у л а в а П. Е. Основы физики и механики эрозии русел. - Л.: Гидрометеоиздат, 1988. - 303 с.

ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЛАГИ, ПАРА И ТЕПЛА В НЕНАСЫЩЕННЫХ ПОЧВОГРУНТАХ

Приведенная система уравнений в работе [1], описывающая перенос влаги и тепла в почвогрунтах при неполном ее насыщении, представлена нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Решение этой системы в общем виде связано с большими математическими трудностями. Кроме того, для ее решения необходима обширная информация о полях водно-физических и тепловых характеристик почвогрунтов, которой в настоящее время мы не имеем. Поэтому нами решается одномерная нестационарная задача при следующих предположениях: а) почвогрунты однородны и изотропны; б) температура всех фаз одинакова; в) поток пара обусловлен, в основном, пространственными различиями его плотности; г) конвективный перенос тепла осуществляется только за счет движения воды; д) распределение солей в зоне аэрации ($C_s(x, y, z, t)$) как в пространстве, так и во времени не меняется, то есть

$$\text{grad } C_s = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} = 0; \quad (2)$$

е) тепловые характеристики почвогрунтов (c, λ) приняты постоянными [3].

С учетом этого имеем следующую упрощенную систему уравнений, описывающую:

– перенос почвенной влаги

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_4(1-\alpha_1)} \frac{\partial q_{4z}}{\partial z} = \frac{\varepsilon_{n4}}{\rho_4(1-\alpha_1)}, \quad (3)$$

- перенос пара

$$\frac{\partial(1-\varphi)\rho_n}{\partial t} - \frac{\partial q_{nz}}{\partial z} = \frac{\varepsilon_{4n}}{(1-\alpha_1)}, \quad (4)$$

- перенос тепла

$$c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial q_{Tz}}{\partial z} = -L_{4n} \varepsilon_{4n}, \quad (5)$$

- поток почвенной влаги

$$q_{4z} = -\kappa_\delta \frac{\partial}{\partial z} (\chi - \Phi), \quad (6)$$

- коэффициент влагопроводности.

$$\kappa_\delta = \kappa_\Phi \frac{\varphi^3}{1+\sqrt{1-\varphi}}, \quad (7)$$

- потенциал почвенной влаги

$$\Phi = M \left[\frac{1+\sqrt{1-\varphi}}{\varphi} \right]^m - M \ln \frac{1+\sqrt{1-\varphi}}{1-\sqrt{1-\varphi}}, \quad (8)$$

- поток пара

$$q_{nz} = - (1-\varphi) D_n \frac{\partial \rho_n}{\partial z}, \quad (9)$$

- поток тепла

$$q_{Tz} = -\chi \frac{\partial \theta}{\partial z} + c_4 \rho_4 q_{4z} \theta, \quad (10)$$

- интенсивность фазовых превращений в порах почвы

$$\varepsilon_{4n} = -\varepsilon_{n4}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_{4n} = \frac{2D_n \beta_c^2}{(1-\alpha_1)} (\rho_{nH} - \rho_n), \quad (12)$$

- зависимость плотности насыщающего пара от температуры

$$\rho_{nH} = q_1 + q_2 \theta, \quad (13)$$

$$q_1 = 0,622 \rho_4 \frac{b_1}{p_a}, \quad q_2 = 0,622 \rho_4 \frac{b_2}{p_a}, \quad (14)$$

$$-H_T \leq z \leq 0 \quad (15)$$

Здесь введены следующие обозначения: α_1 — относительный объем скелета почвы, β_c — удельная поверхность почвенного скелета, $(1 - \alpha_1)$ — пористость почвогрунтов, κ_ϕ — коэффициент фильтрации, ρ_4 — плотность воды, ϕ — насыщенность почвогрунтов, равная отношению объема влаги (α_2), содержащейся в объеме почвы к объему пор $(1 - \alpha_1)$; ρ_n — плотность пара внутри почвенного влажного воздуха, θ — температура почвогрунтов, ρ — плотность почвогрунтов, c — коэффициент теплоемкости, λ — коэффициент теплопроводности, φ — потенциал положения, M, N, m — обобщенные параметры почвогрунтов, определяемые по данным лабораторных измерений потенциала почвенной влаги [4], D_n — коэффициент диффузии пара в воздухе, q_1, q_2 — коэффициенты разложения формулы Магнуса в ряд Тейлора, P_a — атмосферное давление.

Граничные условия:

на нижней границе зоны аэрации (уровень грунтовых вод) $z = -H_T$

$$\phi(-H_T, t) = 1, \quad (16)$$

$$\rho_n(-H_T, t) = \rho_n(\theta_T(t)), \quad (17)$$

$$\theta(-H_T, t) = \theta_T(t); \quad (18)$$

на верхней границе (поверхность Земли) $z = 0$

$$q_{4z}(z, t)|_{z=0} = -U_\phi + E_B, \quad (19)$$

$$q_{nz}(z, t)|_{z=0} = \rho_4 E_n, \quad (20)$$

$$q_T(z, t)|_{z=0} = Gf(u)(\theta_B - \theta) + (1-r)S - \rho_4 E_B L_n - R_\Sigma - c_4 \rho_4 U_\phi \theta_\phi, \quad (21)$$

$$E_B = Af(u)(1 - \alpha_1)\phi(0, t)[e_{\text{пн}}(\theta(0, t)) - e_B], \quad (22)$$

$$E_n = Af(u)(1 - \alpha_1)(1 - \phi(0, t))(e_n - e_B), \quad (23)$$

где θ_T — температура поверхности грунтовых вод, U_ϕ — интенсивность впитывания воды в зону аэрации; L_n — удельная теплота

парообразования, E_B - интенсивность испарения с поверхности водной пленки; E_H - интенсивность испарения из пор почвогрунтов, e_H , e_B - абсолютная влажность воздуха на уровне поверхности Земли и метеорологической будки, соответственно; A - числовой параметр, характеризующий влагообмен на границе почва-воздух; $f(u)$ - функция, зависящая от скорости ветра:

$$f(u) = u_0 + bu ; \quad (24)$$

u_0 , b - параметры, u - скорость ветра на высоте флигера, G - коэффициент, учитывающий турбулентный теплообмен, равный $0,0121P_a$, r - альбеда поверхности почвы, S - поступление суммарной солнечной радиации на поверхность почвы, R_z - эффективное излучение, θ_B и θ_ϕ - температура воздуха и температура впитавшейся воды, соответственно.

Необходимо отметить, что процессы испарения и впитывания воды в почву (снеготаяние, жидкие осадки, поливы) могут происходить одновременно. Однако вследствие того, что при впитывании интенсивность испарения влаги непосредственно с почвы резко уменьшается или оно прекращается вовсе, можно считать, что

$$E = \begin{cases} E_B + E_H & \text{при } U_\phi = 0, \\ 0 & \text{при } U_\phi > 0. \end{cases} \quad (25)$$

Начальные условия

$$\varphi(z, 0) = \varphi^*(z), \quad \rho_n(z, 0) = \rho_n^*(z), \quad \theta(z, 0) = \theta^*(z). \quad (26)$$

Прежде чем перейти к численному решению системы, запишем ее относительно искомых величин.

Выражение (6) с учетом (7) и (8) запишется

$$q_{4z} = -\kappa_\phi \frac{\varphi^3}{(1+\sqrt{1-\varphi})} \left\{ 1 + \frac{1}{2\sqrt{1-\varphi}} \left[m^n \left(\frac{1+\sqrt{1-\varphi}}{\varphi} \right)^{m+1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2\sqrt{\varphi}}{\varphi} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\}. \quad (27)$$

Производная потока q_{4z} (27) по z равна:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{4z}}{\partial z} = & - \kappa_{\phi} \frac{\varphi^2}{2\sqrt{1-\varphi}} \left[1 + \frac{\sqrt{1-\varphi}}{1+\sqrt{1-\varphi}} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \\ & - \frac{\kappa_{\phi}}{2} \left\{ \frac{\varphi^2}{2(1-\varphi)} \left[\frac{1}{\sqrt{1-\varphi}} + 4 \frac{\sqrt{1-\varphi}}{1+\sqrt{1-\varphi}} \right] \times \right. \\ & \times \left[\frac{mM}{(1-\sqrt{1-\varphi})} + \frac{2M}{\varphi} \right] - \frac{\varphi^2(1-\sqrt{1-\varphi})}{\sqrt{1-\varphi}} \times \\ & \times \left[\frac{m(m+1)M}{2} \frac{1}{(1-\sqrt{1-\varphi})^{m+2} \sqrt{1-\varphi}} + \frac{2M}{\varphi^2} \right] \left. \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\kappa_{\phi}}{2} \frac{\varphi^2(1-\sqrt{1-\varphi})}{\sqrt{1-\varphi}} \left[\frac{mM}{(1-\sqrt{1-\varphi})} + \frac{2M}{\varphi} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставив (28) и (12) с учетом (13) в уравнение переноса почвенной влаги (3), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{f_1}{\rho_4(1-\alpha_1)} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{f_2}{\rho_4(1-\alpha_1)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \\ = - \frac{2D_n \beta_c}{\rho_4(1-\alpha_1)^2} (q_1 + q_2 \theta - \rho_n) \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} f_1 \left[\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] = & \kappa_{\phi} \frac{\varphi^2}{2\sqrt{1-\varphi}} \left[1 + 4 \frac{\sqrt{1-\varphi}}{1+\sqrt{1-\varphi}} \right] + \\ & + \kappa_{\phi} \frac{\varphi^2}{2(1-\varphi)} \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{1-\varphi}} + 4 \frac{\sqrt{1-\varphi}}{(1+\sqrt{1-\varphi})} \right] \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \left[\frac{mM}{(1-\sqrt{1-\varphi})^{m+1}} + \frac{2N}{\varphi} \right] - \left[\frac{m(m+1)M}{(1-\sqrt{1-\varphi})^{m+1}} + \right. \\ \left. + 4N \frac{\sqrt{1-\varphi}}{\varphi(1+\sqrt{1-\varphi})} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (30)$$

$$f_2(\varphi) = \frac{x_\varphi}{2} \frac{\varphi^2(1+\sqrt{1-\varphi})}{\sqrt{1-\varphi}} \left[\frac{mM}{(1-\sqrt{1-\varphi})} + \frac{2N}{\varphi} \right], \quad (31)$$

Уравнение для пара (4) с учетом (12) и (13) после некоторых преобразований запишется

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} - D_n \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial z^2} + D_n \frac{1}{(1-\varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \rho_n}{\partial z} + \\ + \frac{1}{(1-\varphi)} \left[\frac{2D_n \beta_c^2}{(1-\alpha_1)^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \rho_n = \frac{2D_n \beta_c^2}{(1-\alpha_1)^2} \frac{(q_1 + q_2 \theta)}{(1-\varphi_4)}. \quad (32)$$

Уравнение переноса тепла (5) с учетом (10), (12), (13) (27) примет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{c_4 \rho_4}{c\rho} \left[\eta_1 + \eta_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] \frac{\partial \theta}{\partial z} - \\ - \frac{c_4 \rho_4}{c\rho} \left[f_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + f_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{2D_n \beta_c^2 L_n}{(1-\alpha_1)} q_2 \right] \theta = \frac{2D_n L_n \beta_c^2}{c\rho(1-\alpha_1)} (q_1 - \rho_n). \quad (33)$$

Запишем граничные условия (16)-(21) относительно искомых величин φ , ρ_n , θ :

для $z = -H_T$

$$\varphi = 1, \quad (34)$$

$$\rho_n = q_1 + q_2 \theta_T, \quad (35)$$

$$\theta = \theta_T; \quad (36)$$

для $z = 0$.

$$- \eta_1 - \eta_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = - U_\Phi +$$

$$+ Af(u)(1-\alpha_1)[b_1 + b_2\theta(\varphi, t) - e_4]\varphi(\varphi), \quad (37)$$

$$D_n \frac{\partial \rho_n}{\partial z} \Big|_{z=0} + 1,64Af(u)(1-\alpha_1)P_a\rho_4 = Af(u)(1-\alpha_1)\rho_4 e_4. \quad (38)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} - \left[C_4 \rho_4 \left[\eta_1 + \eta_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} \right] - Gf(u) - \right.$$

$$- Af(u)L_n\rho_4(1-\alpha_1)\varphi(0)b_2 - 9,36] \theta = Gf(u)\theta_B +$$

$$+ (1-r)S - Af(u)\rho_4 L_n(1-\alpha_1)\varphi(0)(b_1 - e_B) -$$

$$- 642 \left[1 - A^* \chi_N + 0,0146A^* \chi_N \theta_B \right]. \quad (39)$$

Для численного решения системы дифференциальных уравнений (29), (32), (33) при граничных условиях (34)–(39) использовалась неявная левосторонняя трехточечная разностная схема [2]. Аппроксимируя производные разностными их аналогами, приходим к системе трехточечных разностных алгебраических уравнений вида

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = - F_i, \quad (40)$$

где $i=1, 2, \dots, N-1$, а граничные условия приводятся к форме

$$- C_0 y_0 + \beta_0 y_1 = - F_0, \quad A_N y_{N-1} - C_N y_N = - F_N, \quad (41)$$

где $A_i, \beta_i, C_i, F_i, C_0, \beta_0, F_0, A_N, \beta_N, C_N, F_N$ — известные коэффициенты. Система уравнений (40) с граничными условиями (41) решается с помощью метода прогонки [2].

Для решения системы (29), (32), (33) с граничными условиями (34)–(39), представленных в виде (40), (41), использовался метод отдельных или последовательных прогонок. Суть его заключается в следующем.

Определение искомых величин φ, ρ_n, θ разделено на три

этапа. На первом этапе решается уравнение для воды, то есть определяются φ_i на временном шаге $j+1$. При этом величины ρ_{ni} , θ_i , которые вычисляются в других уравнениях, считаются неизменными, "замороженными" во времени. Далее решается уравнение для пара, где используются найденные значения на первом этапе (φ_i). Уравнение теплопроводности решается на третьем этапе. Для вычисления коэффициентов уравнений используются полученные значения для φ_i , ρ_{ni} на последующих этапах.

На каждом этапе уравнение решается с помощью своего итерационного процесса. Количество итераций для каждого уравнения подбирается так, чтобы обеспечить нужную точность

$$\left| y_i^{(N+1)} - y_i^{(N)} \right| \leq \varepsilon_k, \quad (42)$$

где N - номер итерации, ε_k - критерий сходимости.

Эти итерационные процессы можно назвать внутренними, так как они проводятся в рамках одного уравнения. Помимо них имеются внешние итерации. Внешний итерационный процесс замыкает внутренние и вышеописанная процедура повторяется. Критерий сходимости внешнего итерационного процесса имеет вид

$$\left| \varepsilon_{4n}^{(k+1)} - \varepsilon_{4n}^{(k)} \right| \leq \delta. \quad (43)$$

Алгоритм решения задачи с помощью метода последовательных прогонок представлен на рис.1.

Запишем систему уравнений (40), (41) для каждой искомой величины (в обозначениях для простоты записи временной индекс j опущен):

- почвенная влага φ

$$A_{4i}^{(s)} \varphi_{i-1}^{(s+1)} - C_{4i}^{(s)} \varphi_i^{(s+1)} + B_{4i}^{(s)} \varphi_{i+1}^{(s+1)} = - F_i^{(s)}, \quad (44)$$

$i=1, 2, \dots, N-1$

$$- C_{40} \varphi_0 + B_{40} \varphi_1 = - F_{40}, \quad A_{4N} \varphi_{N-1} - C_{4N} \varphi_N = - F_{4N},$$

где

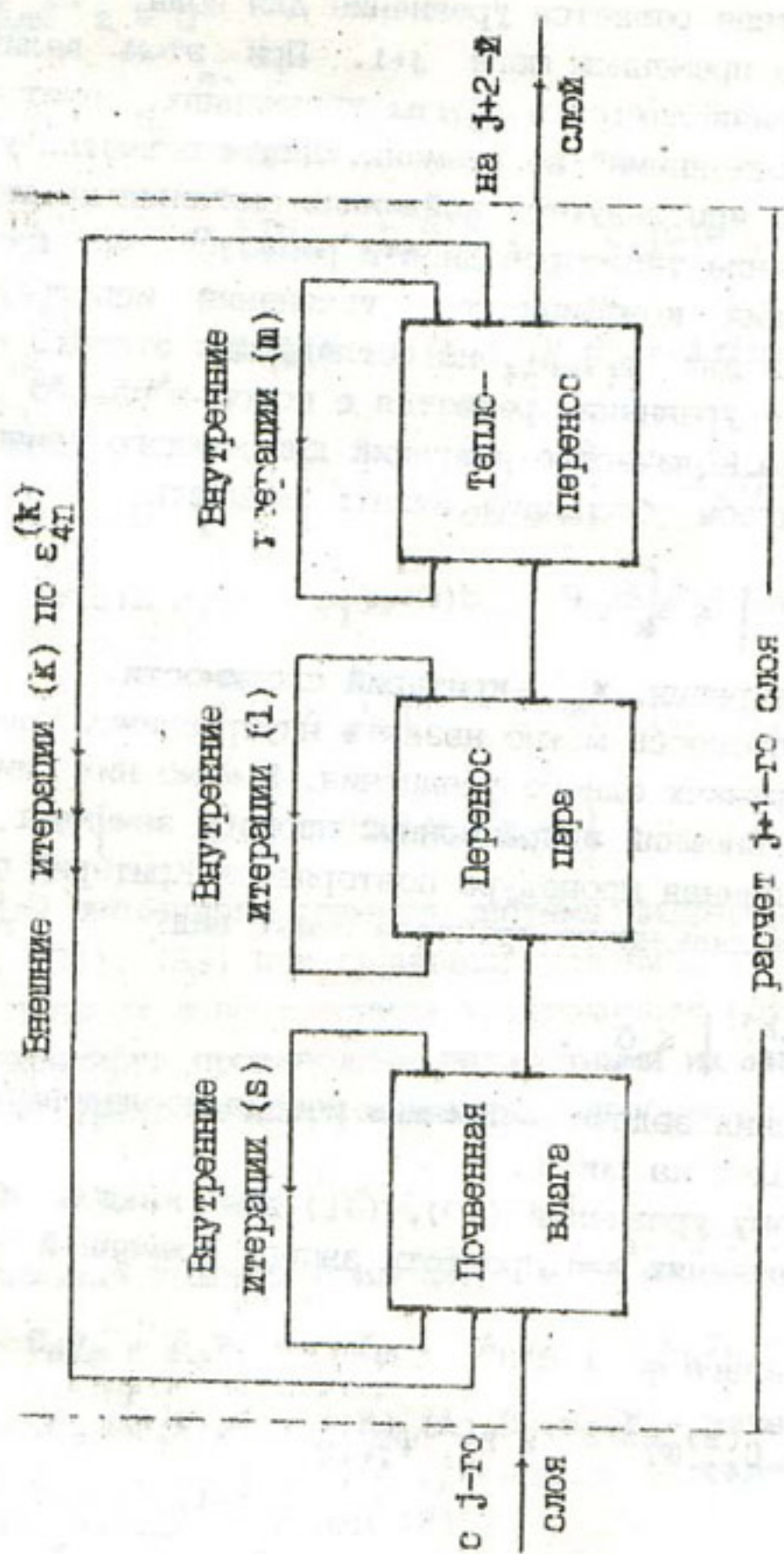


Рис. 1. Функциональная блок-схема решения задачи влаго- и теплопереноса в ненасыщенных почвогрунтах.

$$A_{4i}^{(s)} = \frac{[2f_{2i}^{(s)} - h_i f_{1i}^{(s)}]}{2\rho_4(1-\alpha_1)} \frac{\tau}{h_i^2},$$

$$C_{4i} = 1 + 2 \frac{f_{2i}^{(s)}}{\rho_4(1-\alpha_1)} \frac{\tau}{h_i^2},$$

$$B_{4i}^{(s)} = \frac{[2f_{2i}^{(s)} + h_i f_{1i}^{(s)}]}{2\rho_4(1-\alpha_1)} \frac{\tau}{h_i^2},$$

$$F_{4i} = -\varphi_{4i}^j + \frac{2D_n \beta_c^2}{\rho_4(1-\alpha_1)^2} [q_1 + q_2 \theta_i^{(s)} - \rho_{ni}^{(s)}],$$

$$C_{40} = 1, \quad B_{40} = 0, \quad F_{40} = 1,$$

$$A_{4N}^{(s)} = \eta_2^{(s)},$$

$$C_{4N} = \eta_2^{(s)} + Af(u)(1-\alpha_1)[b_1 + b_2 \theta_N^{(s)} - e_B]h_0,$$

$$F_{4N}^{(s)} = [U_\phi - \eta_1^{(s)}]h_0;$$

- плотность пара

$$A_{ni}^{(1)} \rho_{ni-1}^{(1+1)} - C_{ni}^{(1)} \rho_{ni}^{(1+1)} + B_{ni}^{(1)} \rho_{ni+1}^{(1+1)} = -F_{ni}^{(1)}, \quad (45)$$

$$i=1, 2, \dots, N-1,$$

$$-C_{n0} \rho_{n0} + B_{n0} \rho_{n1} = -F_{n0}, \quad A_{nN} \rho_{nN-1} - C_{nN} \rho_{nN} = -F_{nN},$$

где

$$A_{ni}^{(1)} = D_n \left[1 + \frac{[\varphi_{i+1}^{(s+1)} - \varphi_i^{(s+1)}]}{4[1 - \varphi_i^{(s+1)}]} \right],$$

$$C_{ni}^{(1)} = 1 + 2D_n \frac{\tau}{h_i^2} + \frac{\tau}{[1 - \varphi_i^{(s)}]} \left[\frac{2D_n \beta_c^2}{(1 - \alpha_1)^2} - \frac{\varphi_i^{(s+1)} - \varphi_i^{(s)}}{\tau} \right]$$

$$B_{ni}^{(1)} = D_n \left[1 - \frac{[\varphi_{i+1}^{(s+1)} - \varphi_{i-1}^{(s+1)}]}{4[1 - \varphi_i^{(s+1)}]} \right],$$

$$C_{n0} = 1, \quad B_{n0} = 0, \quad F_{n0} = q_1 + q_2 \theta_\Gamma,$$

$$A_{nN} = D_n,$$

$$C_{nN}^{(1)} = D_n + 1,64 A f(u) (1 - \alpha_1) P_a [1 - \varphi_N^{(s-1)}] h_0,$$

$$F_{nN}^{(1)} = A f(u) (1 - \alpha_1) \rho_4 [1 - \varphi_N^{(s+1)}] e_B h_i;$$

для переноса тепла

$$A_{Ti}^{(m)} \theta_{i-1}^{(m+1)} - C_{Ti}^{(m)} \theta_i^{(m+1)} + B_{Ti}^{(m)} \theta_{i+1}^{(m+1)} = -P_{Ti}^{(m)}, \quad (46)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$-C_{T0} \theta_0 + B_{T0} \theta_1 = -P_{T0}, \quad A_{TN} \theta_{N-1} - C_{TN} \theta_N = -P_{TN},$$

где

$$A_{Ti}^{(m)} = \left\{ \frac{\lambda}{c\rho} - \frac{c_4 \rho_4}{c\rho} \left[\eta_{1i}^{(s+1)} + \eta_{2i}^{(s+1)} \frac{\varphi_{i+1}^{(s+1)} - \varphi_{i-1}^{(s+1)}}{2h} \right] \frac{h_i}{2} \right\} \frac{\tau}{h_i^2},$$

$$C_{Ti}^{(m)} = 1 + 2 \frac{\lambda \tau}{c\rho h_i^2} -$$

$$- \frac{c_4 \rho_4}{c\rho} \left[f_{2i}^{(s+1)} \frac{[\varphi_{i-1}^{(s+1)} - 2\varphi_i^{(s+1)} + \varphi_{i+1}^{(s+1)}]}{h_i^2} + \right. \\ \left. + f_{1i}^{(s+1)} \frac{[\varphi_{i+1}^{(s+1)} - \varphi_{i-1}^{(s+1)}]}{2h_i} + \frac{2D_n \theta_c^2 L_n}{(1 - \alpha_1)} q_2 \right] \tau,$$

$$B_{Ti}^{(m)} = \frac{\lambda}{c\rho} + \frac{c_4 \rho_4}{c\rho} \left[\eta_{1i}^{(s+1)} + \right. \\ \left. + \eta_{2i}^{(s+1)} \frac{[\varphi_{i+1}^{(s+1)} - \varphi_{i-1}^{(s+1)}]}{2h_i} \right] \frac{h_i}{2} \frac{\tau}{h_i^2},$$

$$C_{T0} = 1, \quad B_{T0} = 0, \quad P_{T0} = \theta_r,$$

$$A_{TN} = \lambda,$$

$$C_{TN}^{(m)} = \lambda - \left\{ c_4 \rho_4 \left[\eta_{1i}^{(s+1)} + \eta_{2i}^{(s+1)} \frac{[\varphi_{i+1}^{(s+1)} - \varphi_{i-1}^{(s+1)}]}{2h_i} \right] - \right. \\ \left. - Gf(u) - Af(u)L_n \rho_n (1 - \alpha_1) b_2 \varphi_{4N}^{(s+1)} - 9,36 \right\} h_i,$$

$$P_{TN}^{(m)} = Gf(u)\theta_B + (1 - r)S - Af(u)\rho_4 L_n (1 - \alpha_1) \times \\ \times \varphi_N^{(s+1)} (b_1 - e_B) - 642 \left[1 - A^* \chi_N + 0,0146 A^* \chi_N \theta_B \right].$$

В вышеприведенных соотношениях h_i — шаг по вертикальной координате, отсчитываемый вниз до уровня грунтовых вод (H_T) от поверхности Земли. Значение шага для i -го слоя определяется по следующему соотношению:

$$h_i = h_0 \left[1 + a(i-1) \right], \quad h_0 = \frac{H_T}{N + a \frac{N(N-1)}{2}}, \quad (47)$$

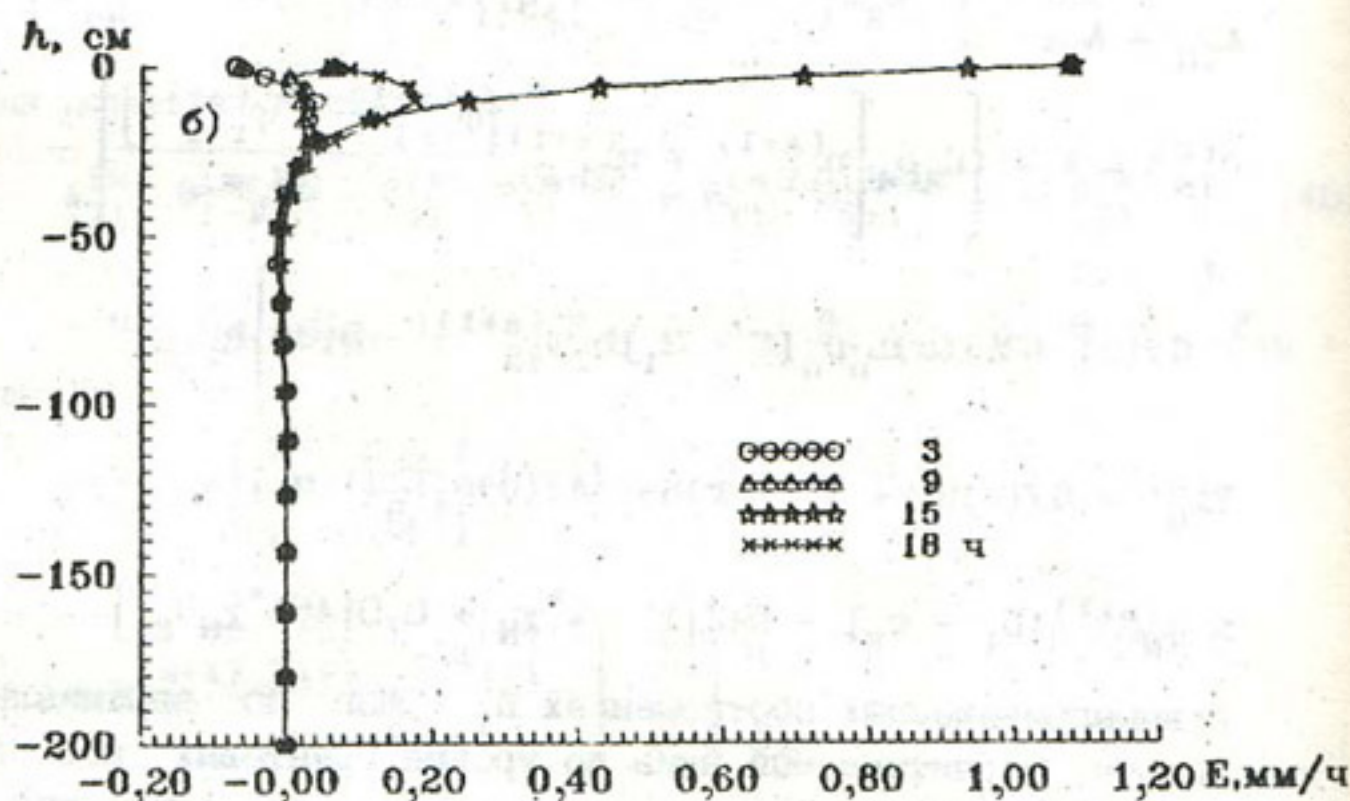
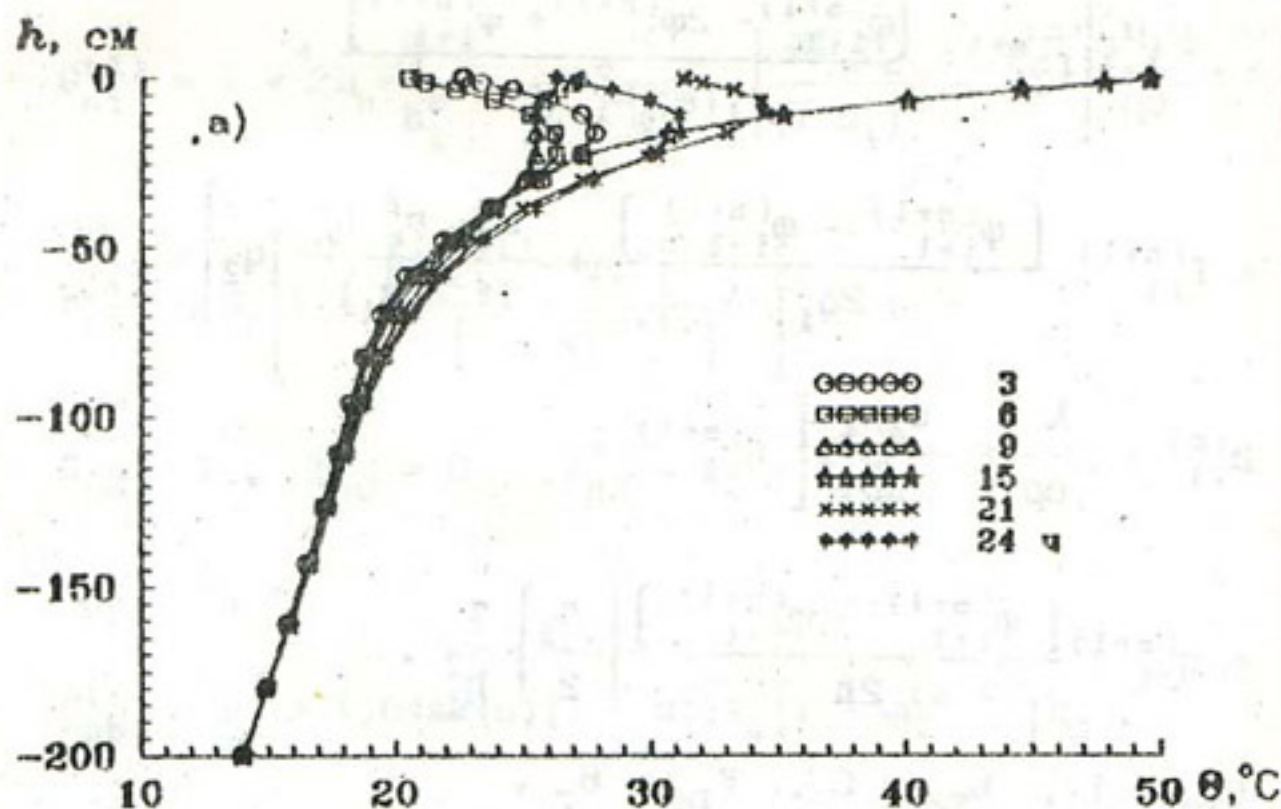


Рис.2. Внутрисуточное распределение профиля температуры (а) и внутрипочвенного испарения (б) в ненасыщенных почвогрунтах.

где a – задаваемый параметр, определяющий степень неравномерности шага по глубине.

Временной шаг τ определяется внутренним итерационным процессом при решении уравнений. Если итерационный процесс не сходится при заданном числе итераций, то τ уменьшается и решение системы начинается сначала.

Предложенная численная схема была апробирована для реальных условий по данным наблюдений в период вегетации на сельскохозяйственных угодьях. Результаты расчетов представлены на рис. 2–3. На рис. 3 показано внутрисуточное изменение профиля температуры почвогрунтов и внутрипочвенного испарения. Расчетный временной шаг равен 1 мин.

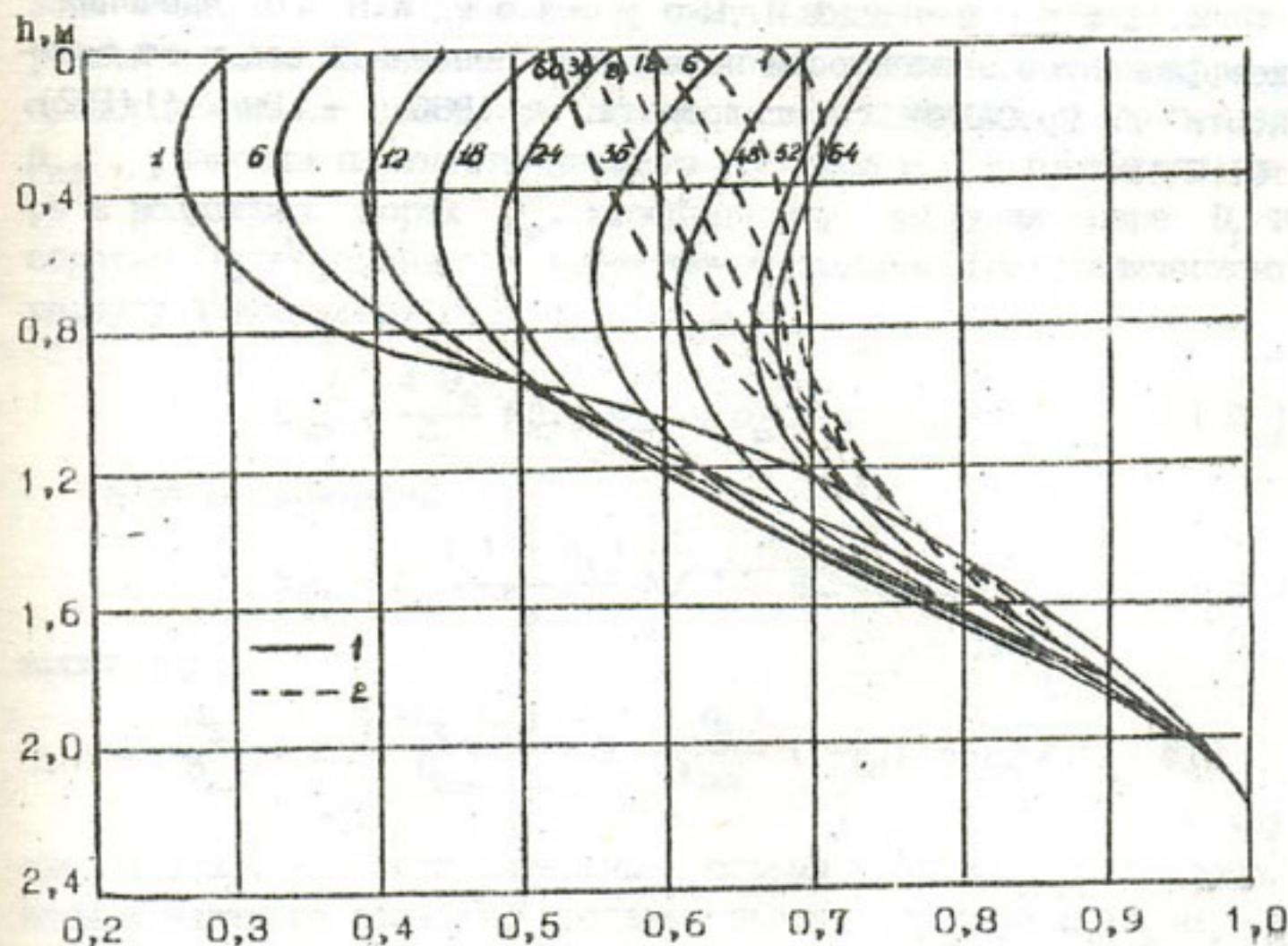
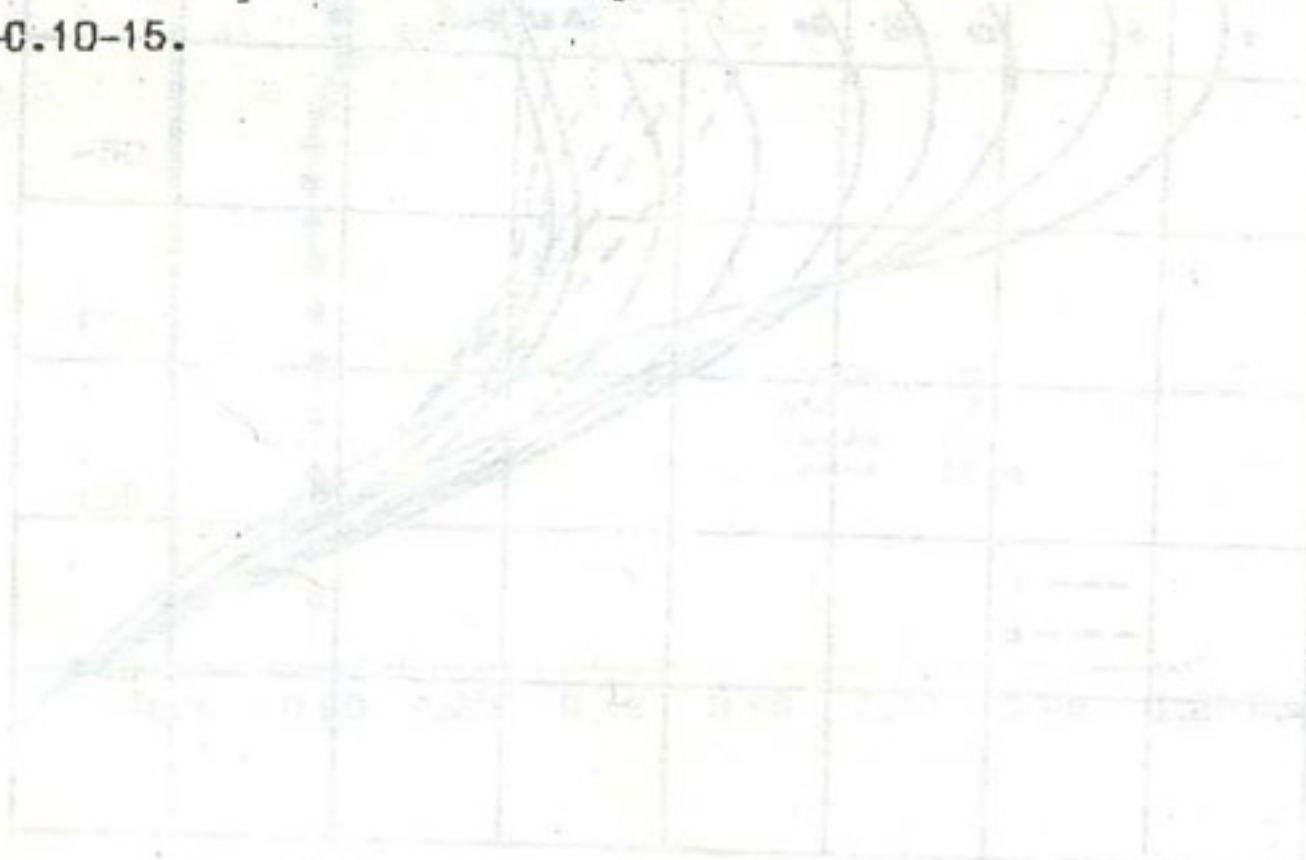


Рис. 3. Распределение влаги в зоне аэрации в процессе увлажнения и иссушения (модельная задача; 1 – увлажнение, 2 – иссушение; цифры у линий – время в часах от начала процесса).

На рис.3 представлены результаты расчетов насыщения зоны аэрации в процессе полива сельскохозяйственного поля и его иссушения в межполивной период.

Список литературы

1. Денисов Е. М. Перенос влаги, тепла и солей в почвогрунтах //Метеорология и гидрология. -1978. -Н 3. -С.71-79.
2. Самарский А.А., Попов Е.П. Разностные схемы газовой динамики. - М: Наука, 1975. -352 с.
3. Сергеев А. И. Влаго- и теплообмен в почве при стационарных условиях // Тр.САНИГМИ. - 1975. - Вып.26(107). -С.154-169.
4. Сергеев А.И., Морозов А.Н. О значении коэффициентов зависимости потенциала почвенной влаги от влажности // Тр.САНИИ Гскомгидромета. - 1986. - Вып.111(192). -С.10-15.



РАСЧЕТ ИСПАРЕНИЯ ВОДЫ ИЗ ПОЧВЫ

Поток пара $\dot{q}_p$ в зоне аэрации почвы осуществляется как за счет диффузии $-\alpha_3 D_p \text{grad } \rho_p$, так и за счет конвективного переноса $\alpha_3 \rho_p \dot{u}_3$:

$$\dot{q}_p = -\alpha_3 D_p \text{grad } \rho_p + \alpha_3 \rho_p \dot{u}_3, \quad (1)$$

где α_3 — относительный объем воздуха в порах почвы, D_p — коэффициент диффузии пара в них, ρ_p — плотность пара в порах, $\dot{u}_3$ — скорость движения влажного воздуха в порах.

Само же испарение, как физический процесс, происходит в зоне аэрации на поверхности раздела вода-воздух. Масса испарившейся воды из единицы объема почвы в единицу времени ε_{2p} пропорциональна удельной поверхности контакта вода-воздух β_{23} , разности плотности насыщающего пара ρ_{pn} и плотности пара в воздушных порах ρ_p , коэффициенту диффузии пара D_p и обратно пропорциональна характерной толщине (гидравлическому радиусу) воздушных пор δ_3 /1,2,3 /:

$$\varepsilon_{2p} = \frac{4 D_p}{\delta_3} \beta_{23} (\rho_{pn} - \rho_p). \quad (2)$$

В этом выражении

$$\beta_{23} = 2 \frac{(1 - \alpha_1)}{\delta_p} \sqrt{1 - \varphi_2}, \quad (3)$$

кроме того,

$$\delta_3 = 2 \frac{\alpha_3}{\beta_{23}} = 2 \frac{(1 - \alpha_1 - \alpha_2)}{\beta_{23}} = 2 \frac{(1 - \alpha_1)}{\beta_{23}} (1 - \varphi_2) = \delta_p \sqrt{1 - \varphi_2}, \quad (4)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — относительные объемы почвенного скелета, воды и влажного воздуха, соответственно, причем $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, φ_2 — влагонасыщенность почвы (доля объема пор, занятых водой).

$$\varphi_2 = \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1}. \quad (5)$$

Величина δ_p есть характерный радиус пор почвы и его значе-

ния определяются следующим выражением с использованием характеристик воды :

$$\delta_D = \sqrt{\frac{2 \chi_u v_2 K_f}{g (1 - \alpha_1)}} \quad (6)$$

где v_2 - кинематическая вязкость воды, χ_u - безразмерный параметр, примерно равный 9, K_f - коэффициент фильтрации воды, g - ускорение силы тяжести.

На основании сказанного уравнение баланса массы пара в почве запишется :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_3 \rho_p}{\partial t} + \operatorname{div} \alpha_3 (\rho_p \vec{u}_3 - D_p \operatorname{grad} \rho_p) = \\ = \frac{8(1 - \alpha_1) D_p}{\delta_D^2} (\rho_{pn} - \rho_p) \end{aligned} \quad (7)$$

Плотность насыщающего пара ρ_{pn} равна

$$\rho_{pn} = \rho_{pn}^0 \left(\frac{T_0}{T_p} \right)^{1 + \frac{a}{R_p}} \exp \left[\frac{(L_{10} + a T_0)}{R_p} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_p} \right) - \frac{\gamma_2 \Phi_2}{\rho_2 R_p T_p} \right], \quad (8)$$

где ρ_{pn}^0 - плотность насыщающего пара при нормальном давлении и температуре $T_0 = 273^\circ \text{K}$, равная $0,4855 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^3$; L_{10} - удельная теплота парообразования 1 - ой фазы при нуле градусов Цельсия, равная для воды 597 кал/г, T_p - температура почвы; R_p - газовая постоянная пара; $\gamma_2 = \rho_2 g$, где ρ_2 - плотность воды; Φ_2 - потенциал почвенной влаги выраженный в слое воды, a - разность между удельной теплоемкостью 1 - ой фазы и удельной теплоемкостью пара при постоянном давлении.

$$\begin{aligned} \Phi_2 = H_1 \left[\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \Phi_2}}{\Phi_2} \right)^m - 1 \right] + H_2 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \Phi_2}}{1 - \sqrt{1 - \Phi_2}} \right) + \\ + \frac{R_s T_p}{\gamma_2} \sum_{s=1}^N C_{2s} \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь H_1 и H_2 - эмпирические параметры, имеющие размерность длины. Величина H_1 равна примерно 0,1 - 5,0 см, а H_2 - сос-

твляает одну четверть капиллярного напора, P_s - газовая постоянная α -ой компоненты, m - показатель степени, равный примерно 3 - 4, а C_{2s} - концентрация α -ой компоненты в жидкости почвы.

Величина $a_3 \dot{u}_3$ равна

$$a_3 \dot{u}_3 = - \frac{\delta_p^2 (1 - \alpha_1)(1 - \varphi_2)^2 g}{2 \chi_u v_3} \left[\text{grad } z + \frac{1}{\rho_3 g} \text{grad } P_3 \right], \quad (10)$$

где v_3 , ρ_3 и P_3 - соответственно кинематическая вязкость, плотность и давление воздуха. Множитель перед градиентами назовем коэффициентом воздухопроводности K_3 . Он имеет размерность коэффициента фильтрации и при прочих равных условиях зависит от влагонасыщенности почвы φ_2 . Таким образом,

$$a_3 \dot{u}_3 = - K_3(\varphi_2) \left[\text{grad } z + \frac{1}{\rho_3 g} \text{grad } P_3 \right]. \quad (11)$$

Плотность и давление воздуха, а следовательно и его градиент будем считать заданными функциями.

Плотность пара в зоне аэрации почвы очень мало отличается от плотности насыщающего пара. Поэтому с целью устранения большого фона, мешающего устойчивому решению задачи, следует ввести безразмерную величину ζ , равную:

$$\zeta = (\rho_{pn} - \rho_p) / \rho_{pn}^0(T_0). \quad (12)$$

Тогда (7) для функции ζ запишется:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a_3 \zeta}{\partial t} + \text{div } a_3 (\zeta \dot{u}_3 - D_p \text{grad } \zeta) + G_p \zeta = \\ & = \frac{\partial a_3 \eta}{\partial t} + \text{div } a_3 (\eta \dot{u}_3 - D_p \text{grad } \eta), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\eta = \rho_{pn} / \rho_{pn}^0(T_0); \quad G_p = \frac{8(1 - \alpha_1) D_p}{\delta_p^2}. \quad (14)$$

Обозначим через $Zg = Zg(x, y, t)$ - уровень грунтовых вод. На уровне грунтовых вод плотность пара равна насыщающей и по-

этому величина ζ равна нулю, то есть

$$\zeta(x, y, Zg, t) = 0. \quad (15)$$

Это есть нижнее граничное условие. Если уровень грунтовых вод находится достаточно глубоко, то для глубины залегания грунтовых вод $Hg = Zp - Zg > 10$ м, где Zp — отметка поверхности почвы, нижнее граничное условие запишется

$$\zeta(x, y, Zp - 10, t) = 0. \quad (16)$$

Верхнее граничное условие заключается в равенстве потоков пара через поверхность почвы (т.е. при $z = Zp$) по нормали к ней $\vec{n}_p$ со стороны почвы и над ней.

$$(\vec{q}_p(x, y, Zp-0, t) \vec{n}_p) = (\vec{q}_p(x, y, Zp+0, t) \vec{n}_p). \quad (17)$$

Скорость воздуха, нормальная к поверхности Земли и проходящая через ее поры, одинаковая с обеих ее сторон. Поэтому

$$(\rho_p \alpha_z \vec{n}_p \vec{u}_z)_{z=Zp-0} = (\rho_p \alpha_z \vec{n}_p \vec{u}_z)_{z=Zp+0}.$$

В отличие от этого коэффициент диффузии с разных сторон подстилающей поверхности будет различным. Со стороны атмосферы (дневной поверхности) он превратится в коэффициент турбулентности Kt . Тогда (17) запишется:

$$D_p \vec{n}_p (\text{grad } \rho_p)_{z=Zp-0} = Kt \vec{n}_p (\text{grad } \rho_p)_{z=Zp+0}. \quad (18)$$

В большинстве случаев при решении практических задач можно пренебречь изменением почвенных характеристик по горизонтали для небольших по площади участков. Тогда уравнение (13) становится одномерным:

$$\begin{aligned} \alpha_z \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \alpha_z D_p \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} - \left[\alpha_z u_{3z} - \frac{\partial \alpha_z D_p}{\partial z} \right] \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \\ &- \left[G_p + \frac{\partial \alpha_z}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_z u_{3z}}{\partial z} \right] \zeta + \Gamma g(\eta). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь функция $\Gamma g(\eta)$ представляет собой правую часть уравнения (13) и считается известной. Нижнее граничное условие есть

$$\zeta(z, t) = 0, \quad (20)$$

а верхнее, с учетом (12), будет

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)_{z=z_p-0} + \frac{\Phi(V)}{D_p} \zeta(z_p) = -\frac{\Phi(V)}{D_p} \left[\eta(z_p-0, t) - \eta_{pv} \right] + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)_{z=z_p-0}, \quad (21)$$

где η_{pv} - плотность пара в воздухе ρ_{pv} на высоте метеорологической будки h_b , отнесенная к $\rho_{pn}(T_0)$; $\Phi(V)$ - ветровая функция, имеющая размерность скорости ветра V на высоте флигера и зависящая от него:

$$\Phi(V) = 1 - \int_0^{h_b} \frac{dz}{Kt(z)}. \quad (22)$$

В этой формуле $Kt(z)$ - коэффициент турбулентности. При некотором его выражении функцию $\Phi(V)$ можно представить в виде:

$$\Phi(V) = \frac{Kt_0}{h_b} \left[1 + \frac{V}{2V_s} \right], \quad (23)$$

где Kt_0 - коэффициент турбулентности у поверхности Земли, равный примерно $0,005 \text{ м}^2/\text{с}$, а V_s - параметр, имеющий размерность скорости и равный примерно $1,25 \text{ м/с}$.

Начальное условие $\zeta(z, 0)$ определим функцией

$$\zeta(z, 0) = f(z). \quad (24)$$

Если же начальные данные получить затруднительно, то следует принять

$$\zeta(z, 0) = 0. \quad (25)$$

Кроме того, что испарение происходит в зоне аэрации, оно осуществляется и на поверхности почвы путем испарения воды из манжетов жидкости, выходящей на поверхность. Поток массы пара из манжетов от единицы поверхности почвы в единицу времени q_{pm} равен:

$$q_{pm} = \Phi(V) (1 - \alpha_1) \varphi_2(z_p, t) [\rho_{pn}(z_p-0, t) - \rho_{pv}]. \quad (26)$$

Если почва вся покрыта водой, то следует рассчитывать испарение с поверхности воды.

Для одномерного случая полезно вместо высоты z ввести безразмерную переменную y , определяемую равенством

$$y = \frac{z_p - z}{z_p - z_g} \quad (27)$$

Тогда (19) запишется

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = & \frac{D_p}{(z_p - z_g)^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \left\{ \frac{u_{3z}}{(z_p - z_g)} + \frac{D_p}{(z_p - z_g)^2} \frac{1}{a_3} \times \right. \\ & \times \left. \frac{\partial a_3}{\partial y} \right\} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{a_3} \left\{ G_p + \frac{\partial a_3}{\partial t} - \frac{1}{(z_p - z_g)} * \frac{\partial a_3 u_{3z}}{\partial y} \right\} \zeta + \\ & + \frac{1}{a_3} \Gamma g(\eta) \quad (28) \end{aligned}$$

Граничными условиями будут:

верхнее $y = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\Phi(V)(z_p - z_g)}{D_p} \zeta(0) = & - \frac{\Phi(V)(z_p - z_g)}{D_p} \times \\ & \times (\eta(0) - \eta_{pv}) + \frac{\partial \eta}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (29) \end{aligned}$$

нижнее $y = 1$,

$$\zeta(1) = 0 \quad (30)$$

Прежде чем переходить к численным методам решения, полезно для качественного анализа получить приближенное, пусть даже грубое, аналитическое решение уравнения (28). Будем искать его решение для квазистационарных условий, считая коэффициенты уравнения и величину η постоянными и равными их среднему значению в рассматриваемом диапазоне изменения высоты. При сделанных предположениях с учетом, что

$$a_3 = (1 - a_1 - a_2) = (1 - a_1)(1 - \varphi_2), \quad (31)$$

уравнение (28) примет вид:

$$\frac{d^2 \zeta}{dy^2} + \frac{u_{3z} (Zp - Zg)}{D_p} \frac{d \zeta}{dy} - \frac{8 (Zp - Zg)^2}{\delta_p^2 (1 - \varphi_2)} \zeta = 0, \quad (32)$$

а корни его характеристического уравнения равны

$$r_{1,2} = -\frac{S_1 S_3}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-\varphi_2}} S_3 \sqrt{1 + \frac{(1-\varphi_2) S_1^2}{32}}, \quad (33)$$

где

$$S_1 = \frac{u_{3z} \delta_p}{D_p}; \quad S_3 = \frac{(Zp - Zg)}{\delta_p}. \quad (34)$$

Общее решение уравнения (32) есть

$$\zeta = C_1 \exp(r_1 y) + C_2 \exp(r_2 y). \quad (35)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 найдутся из граничных условий (29) и (30) с учетом (35), считая, что

$$\partial \eta / \partial y|_{y=0} = 0.$$

$$C_1 \exp(r_1) + C_2 \exp(r_2) = 0, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} C_1 (S_2 S_3 - r_1) + C_2 (S_2 S_3 - r_2) = \\ = S_2 S_3 [\eta(0) - \eta_{pv}]. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь

$$S_2 = \frac{\Phi(V) \delta_p}{D_p}. \quad (38)$$

Тогда искомое решение запишется

$$\begin{aligned} \zeta(y) = \frac{S_2 [\eta(0) - \eta_{pv}] \exp\left(-\frac{S_1 S_3}{2} y\right)}{\left[B + \left(\frac{S_1}{2} + S_2\right) \operatorname{Th}(S_3 B)\right]} \times \\ \times \frac{\operatorname{Sh}[S_3 B(1 - y)]}{\operatorname{Ch}(S_3 B)}, \end{aligned} \quad (39)$$

где параметр B имеет следующую структуру:

$$B = \frac{2\sqrt{Z}}{\sqrt{1-\varphi_2}} \sqrt{1 + \frac{(1-\varphi_2)S_1^2}{32}} \quad (40)$$

Как следует из (12), плотность пара в порах почвы ρ_p равна

$$\rho_p(y) = \rho_{pn} - \rho_{pn}^o(T_o) \zeta(y), \quad (41)$$

где $\rho_{pn}^o(T_o) = 0,485481 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^3$, а масса испарившейся воды из единицы объема почвы в единицу времени ϵ_{2p} есть

$$\epsilon_{2p} = 8(1 - \alpha_1) \frac{D_p}{\delta_p^2} \rho_{pn}^o(T_o) \zeta(y). \quad (42)$$

Общее испарение из почвы осуществляется путем выноса пара из ее воздушных пор

$$= (1 - \alpha_{10})(1 - \varphi_{20}) D_p \frac{\partial \rho_p}{\partial z} \Big|_{z=z_p} + (1 - \alpha_{10})(1 - \varphi_{20}) \times \\ \times \rho_p(z_p) u_{3z}$$

и испарения с поверхности жидких менисков

$$(1 - \alpha_{10}) \varphi_{20} \psi(V) [\rho_{pn}(z_p) - \rho_{pv}].$$

Но (при введенных упрощающих предположениях)

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial z} \Big|_{z=z_p} - \rho_{pn}^o(T_o) \frac{\partial \zeta(z)}{\partial z} \Big|_{z=z_p} = \\ = \frac{\rho_{pn}^o(T_o)}{(z_p - z_g)} \frac{\partial \zeta(y)}{\partial y} \Big|_{y=0}.$$

Тогда искомое испарение q_{pv} равно

$$q_{pv} = (1 - \alpha_{10}) \left[- (1 - \varphi_{20}) D_p \frac{\rho_{pn}^o(T_o)}{(z_p - z_g)} \frac{\partial \zeta(y)}{\partial y} \Big|_{y=0} + \right. \\ \left. + (1 - \varphi_{20}) \rho_p(0) u_{3z} + \varphi_{20} \psi(V) [\rho_{pn}(0) - \rho_{pv}] \right]. \quad (43)$$

Величина $\partial \zeta / \partial y$ при $y = 0$ с учетом того, что $\text{Th}(S_3 B)$ при столь большом аргументе практически не отличается от единицы, равна

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} \Big|_{y=0} = - S_2 S_3 [\eta_{pn}(0) - \eta_{pv}] \times$$

$$\times \frac{\left[\sqrt{1 + \frac{(1-\varphi_2)}{32} \times S_1^2} + \frac{\sqrt{1-\varphi_2}}{4\sqrt{2}} S_1 \right]}{\left[\sqrt{1 + \frac{(1-\varphi_2)}{32} \times S_1^2} + \frac{\sqrt{1-\varphi_2}}{4\sqrt{2}} S_1 + \frac{\sqrt{1-\varphi_2}}{2\sqrt{2}} S_2 \right]} \quad (44)$$

Учитывая сказанное, а также выражения (43) и (44), запишем окончательное приближенное выражение для расчета интенсивности испарения из почвы (масса воды с единицы площади в единицу времени):

$$q_{pv} = (1-\alpha_1) (1-\varphi_{20}) \rho_{pn}(0) u_{3z} + (1-\alpha_1) \Phi(V) [\rho_{pn}(0) - \rho_{pv}] \times$$

$$\times \frac{\left[\sqrt{1 + \frac{(1-\varphi_2)}{32} S_1^2} + \frac{\sqrt{1-\varphi_2}}{2\sqrt{2}} \left[\frac{S_1}{2} + \left((1 + \frac{u_{3z}}{\Phi}) \varphi_{20} - \frac{u_{3z}}{\Phi} \right) S_2 \right] \right]}{\left[\sqrt{1 + \frac{(1-\varphi_2)}{32} S_1^2} + \frac{\sqrt{1-\varphi_2}}{4\sqrt{2}} S_1 + \frac{\sqrt{1-\varphi_2}}{2\sqrt{2}} S_2 \right]} \quad (45)$$

Если пренебречь конвективной составляющей в движении пара, т.е. считать, что $u_{3z} = 0$, то $S_1 = 0$ и (45) запишется:

$$q_{pv} = (1 - \alpha_{10}) \Phi(V) \frac{\left[1 + \varphi_{20} \frac{\sqrt{1-\varphi_2}}{2\sqrt{2}} S_2 \right]}{\left[1 + \frac{\sqrt{1-\varphi_2}}{2\sqrt{2}} S_2 \right]} [\rho_{pn}(0) - \rho_{pv}] \quad (46)$$

Интенсивность испарения в слое воды в единицу времени E_{pv} равна

$$E_{pv} = q_{pv} / \rho_2, \quad (47)$$

где ρ_2 - плотность воды.

Связь плотности пара ρ_p , выраженной в г/см³, с его давлением e^* , выраженным в миллибарах, и абсолютной температурой T имеет следующий вид:

$$\rho_p = 2,17 \cdot 10^{-4} \frac{e^*}{T}, \text{ г/см}^3. \quad (48)$$

В качестве примера (см. таблицу) приведем результаты расчета испарения из почвы (Е, мм/сут) для окрестностей Ташкента в июне. Среднесуточная температура воздуха и его влажность равны соответственно 25°C и 15 мбар, температура поверхности почвы 30°C. Принято также, что $u_{32} = 0$ и $\phi_{20} = \phi^{1,75}$.

Таблица

Интенсивность испарения воды из почвы Е, мм/сут.
при различных ϕ_2 и V

ϕ_2	V, м / с						
	0	1	3	5	7	9	11
0,10	-0,92	-1,18	-1,60	-1,92	-2,17	-2,38	-2,55
0,20	1,30	1,68	2,31	2,81	3,21	3,55	3,85
0,30	1,57	2,05	2,86	3,52	4,09	4,58	5,02
0,40	1,63	2,16	3,07	3,84	4,52	5,13	5,69
0,50	1,69	2,25	3,27	4,16	4,97	5,72	6,42
0,60	1,74	2,36	3,48	4,50	5,46	6,35	7,21
0,70	1,80	2,46	3,70	4,87	5,97	7,04	8,07
0,80	1,86	2,56	3,92	5,23	6,50	7,74	8,95
0,90	1,91	2,66	4,13	5,58	7,01	8,42	9,82
1,00	1,94	2,72	4,27	5,83	7,38	8,93	10,49

Анализ таблицы показывает, что испарение возрастает с увеличением влагонасыщенности почвы и скорости ветра, причем влияние влагонасыщенности усиливается с ростом скорости ветра. Отрицательные значения испарения есть конденсация. Как видим, конденсация происходит при низкой влагонасыщенности

почвы, когда резко возрастает потенциал почвенной влаги и согласно формуле (8) падает плотность насыщающего пара.

Численное решение уравнения (28) можно искать в упрощенном виде, полагая $u_{3z} = 0$ и введя безразмерное время τ :

$$\tau = \frac{D_p}{(z_p - z_g)^2} t \quad (49)$$

Тогда

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{D_p}{(z_p - z_g)^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \quad (50)$$

С учетом того, что $\alpha_3 = (1 - \alpha_1) \varphi_2$, выражение (28) запишется

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{1}{(1 - \varphi_2)} \frac{\partial (1 - \varphi_2)}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \\ &- \frac{1}{(1 - \varphi_2)} \left[8 S_3^2 + \frac{\partial (1 - \varphi_2)}{\partial \tau} \right] \zeta - \\ &- \frac{1}{(1 - \varphi_2)} \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 - \varphi_2) \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \quad (51) \end{aligned}$$

Список литературы

1. Гидрометеорологический режим растительного покрова / Ю.М. Денисов, В.Э. Волькович, А.И. Сергеев, И.Н. Ердякова, И.Б. Токарева // Тр. САНИГМИ. - 1989. - Вып. 103 (184). - С. 41 - 49.

2. Денисов Ю. М. Испарение воды из листа и его водный потенциал // Тр. САНИИ Госкомгидромета. - 1982. - Вып. 94 (175). - С. 9 - 19.

3. Денисов Ю. М. Математическая модель процессов влаго-и солепереноса в почвогрунтах // Математическое моделирование гидрогеологических процессов. - Новосибирск: СО АН СССР, 1984. - С. 49 - 55.

НЕКОТОРЫЕ ЭВРИСТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ПО ОЦЕНКЕ ПОТОКОВ ИМПУЛЬСА, ТЕПЛА И ПАРА

Во многих практических задачах гидрологии, метеорологии и агрометеорологии исследователи сталкиваются с необходимостью определения величин потоков импульса, тепла и пара между подстилающей поверхностью (почва, снежный покров, ледник, вода и др.) и сплошной средой (атмосфера, жидкость).

В строгой постановке этой задачи потоки плотности 1-ой компоненты импульса $\dot{q}_i$, тепла $\dot{q}_T$ и пара $\dot{q}_w$ равны соответственно

$$\dot{q}_i = -\nu \operatorname{grad} \rho u_i + \rho u_i \bar{u} \quad , \quad (1)$$

$$\dot{q}_T = -\lambda \operatorname{grad} T + c_v \rho T \bar{u} \quad , \quad (2)$$

$$\dot{q}_w = -D_w \operatorname{grad} \rho_w + \rho_w \bar{u} \quad , \quad (3)$$

где ν , λ — коэффициенты кинематической вязкости и теплопроводности; c_v — теплоемкость сплошной среды при постоянной объеме; D_w — коэффициент диффузии пара в сплошной среде; ρ и ρ_w — плотность сплошной среды и пара, соответственно; T — температура и $\bar{u}$ — скорость сплошной среды.

Из-за трудности определения вертикальной скорости сплошной среды у подстилающей поверхности потоки, нормальные к этой поверхности, аппроксимируются следующими выражениями /1/:

$$q_{iz} = -K_i \frac{\partial \rho u_i}{\partial z} \quad , \quad (4)$$

$$q_{Tz} = -c_p \rho K_T \frac{\partial T}{\partial z} \quad , \quad (5)$$

$$q_{wz} = -K_w \frac{\partial \rho_w}{\partial z} \quad . \quad (6)$$

Здесь K_i , K_T и K_w — соответственно коэффициенты турбулентности импульса, тепла и пара; c_p — теплоемкость сплошной среды при постоянном давлении.

Исходя из выражений (4), (5) и (6), получим изменения с высотой z горизонтальной составляющей импульса ρu_x , температуры T и плотности пара ρ_w для стационарных условий. Пренебрегая источниками и стоками рассматриваемых характеристик в приземном слое (что вполне допустимо) и учитывая стационарные условия, будем иметь

$$K_1 \frac{\partial \rho u_x}{\partial z} = A_1 \quad , \quad (7)$$

$$c_p \rho K_T \frac{\partial T}{\partial z} = A_2 \quad , \quad (8)$$

$$K_w \frac{\partial \rho_w}{\partial z} = A_3 \quad , \quad (9)$$

где A_1 , A_2 и A_3 - константы.

В качестве упрощающих предположений примем, что коэффициенты турбулентности всех изучаемых характеристик равны, то есть

$$K_1 = K_T = K_w = K \quad (10)$$

и будем считать плотность среды ρ в пределах высот от подстилающей поверхности до высоты флюгера (10 - 15 м) постоянной величиной.

Для решения уравнений (7) - (9) запишем соответствующие им граничные условия:

для (7)

$$\text{при } z = 0 \quad \rho u_x = \rho u_0 \quad , \quad \text{при } z = h_a \quad \rho u_x = \rho u_B,$$

для (8)

$$\text{при } z = 0 \quad T = T_{\Pi} \quad , \quad \text{при } z = h_b \quad T = T_B,$$

для (9)

$$\text{при } z = 0 \quad \rho_w = \rho_{w\Pi} \quad , \quad \text{при } z = h_b \quad \rho_w = \rho_{wB},$$

где u - скорость сплошной среды (при наличии скольжения) на поверхности раздела; T_{Π} и $\rho_{w\Pi}$ - температура поверхности раздела и плотность пара на ней; u_B - скорость сплошной среды на высоте флюгера h_a ; T_B и ρ_{wB} - температура сплошной сре-

ды и плотность пара на высоте метеобудки h_b .

Решения этих уравнений есть

$$u_x = u_o + (u_B - u_o) \frac{\eta(z)}{\eta(h_u)} \quad (10a)$$

$$T = T_{\Pi} + (T_B - T_{\Pi}) \frac{\eta(z)}{\eta(h_b)} \quad (11)$$

$$\rho_{\omega} = \rho_{\omega\Pi} + (\rho_{\omega B} - \rho_{\omega\Pi}) \frac{\eta(z)}{\eta(h_b)} \quad (12)$$

В этих формулах функция $\eta(z)$ имеет вид :

$$\eta(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{K(\zeta)} \quad (13)$$

Величины $\eta(h_u)$ и $\eta(h_b)$ определяются также по равенству (13), где вместо верхнего предела интегрирования z подставляется либо высота флюгера h_u , либо высота метеобудки h_b .

Перейдем теперь к выражениям для потоков импульса, тепла и пара к подстилающей поверхности.

Поток горизонтальной составляющей импульса $q_{xz}(0)$

$$q_{xz}(0) = -K(0) \rho \frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

Но (см. уравнение (10))

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{z=0} = - (u_B - u_o) \frac{1}{K(0) \eta(h_u)}$$

и тогда

$$q_{xz}(0) = - \frac{\rho (u_B - u_o)}{\eta(h_u)} \quad (14)$$

Рассуждая аналогично, найдем

$$q_T(0) = - \frac{c_p \rho (T_B - T_{\Pi})}{\eta(h_b)} \quad (15)$$

$$q_{\omega}(0) = - \frac{(\rho_{\omega B} - \rho_{\omega\Pi})}{\eta(h_b)} \quad (16)$$

В этих формулах плотность сплошной среды следует считать зависящей от высоты подстилающей поверхности над уровнем моря.

Чтобы поставленная задача была решена до конца, нам следует получить вид функции $\eta(z)$ задаваясь различными выражениями для коэффициента турбулентности. Строгая теория для вывода структуры коэффициента турбулентности отсутствует и для этой цели используется теория размерности и эвристические предположения. Размерность коэффициента турбулентности равна квадрату длины, деленной на время, а эмпирические данные и некоторые физические соображения заставляют предполагать, что он как-то зависит от высоты z над подстилающей поверхностью и скорости движения сплошной среды u_x .

Возможные варианты

1. Коэффициент турбулентности K линейно зависит от высоты z . Такая зависимость может быть как линейно-однородной

$$K(z) = u^* z, \quad (17)$$

так и линейно-неоднородной

$$K(z) = K_0 + u^* z. \quad (18)$$

В этих формулах K_0 — коэффициент турбулентности на уровне подстилающей поверхности, u^* — параметр, имеющий размерность скорости. Формулу (18) можно записать в виде:

$$K(z) = K_0 \left(1 + \frac{u^*}{K_0} z \right) = K_0 \left(1 + z / z^* \right), \quad (19)$$

где z^* — параметр, имеющий размерность длины.

С физической точки зрения формула (17) некорректная, так как для $z = 0$ $K(0) = 0$ и для подстилающей поверхности все потоки становятся равными нулю (см. (4) — (6)), то есть замирают. Между тем эта формула для коэффициента турбулентности приводит к хорошо известному в гидрометеорологии логарифмическому закону распределения скорости сплошной среды по высоте с дополнительно введенным помимо u^* параметром шероховатости z_0 .

В связи со сказанным, будем использовать формулу (18) или (19). В этом случае

$$\eta(z) = \frac{z^*}{K_0} \ln \left(1 + z / z^* \right) = \frac{1}{u^*} \ln \left(1 + \frac{u^*}{K_0} z \right), \quad (20)$$

$$\frac{\eta(z)}{\eta(h_u)} = \frac{\ln(1 + z/z^*)}{\ln(1 + h_u/z^*)} \quad (21)$$

$$\frac{\eta(z)}{\eta(h_b)} = \frac{\ln(1 + z/z^*)}{\ln(1 + h_b/z^*)} \quad (22)$$

Зависимости (20) - (22) также описывают логарифмический закон изменения с высотой гидрометеорологических характеристик, однако он несколько иной, чем существующий, и имеет смысл даже при $z = 0$.

Поток горизонтальной составляющей импульса при $z = 0$ есть

$$q_{xz}(0) = - \frac{K_0}{z^*} \frac{\rho(u_B - u_0)}{\ln(1 + h_u/z^*)} \quad (23)$$

тепла

$$q_T(0) = - \frac{K_0}{z^*} \frac{c_p \rho(T_B - T_0)}{\ln(1 + h_b/z^*)} \quad (24)$$

пара

$$q_w(0) = - \frac{K_0}{z^*} \frac{(\rho_{wB} - \rho_{w0})}{\ln(1 + h_b/z^*)} \quad (25)$$

Вместо K_0/z^* в этих формулах можно писать u^* .

2. Коэффициент турбулентности K линейно-неоднородно зависит от скорости сплошной среды u_x :

$$K(z) = K_0 + z^* u_x(z) = K_0 \left[1 + \frac{z^*}{K_0} u_x(z) \right] \quad (26)$$

или

$$K(z) = K_0 \left[1 + u_x(z)/u^* \right] \quad (27)$$

Функцию $u_x(z)$ найдем, подставляя (26) или (27) в (7) и используя указанные граничные условия.

$$u_x(z) = u^* \left\{ \left[\left(1 + \frac{u_0}{u^*} \right)^2 + \left[\left(1 + \frac{u_B}{u^*} \right)^2 - \right. \right. \right.$$

$$- \left[\left(1 + \frac{u_o}{u_*} \right)^2 \right] \frac{z}{h_u} \Bigg]^{\frac{1}{2}} - 1 \Bigg\} . \quad (27a)$$

Коэффициент турбулентности при этом будет иметь вид :

$$K(z) = K_o \left\{ \left[\left(1 + \frac{u_o}{u_*} \right)^2 + \left[\left(1 + \frac{u_B}{u_*} \right)^2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left(1 + \frac{u_o}{u_*} \right)^2 \right] \frac{z}{h_u} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (28)$$

Функция $\eta(z)$ запишется

$$\eta(z) = \frac{2 h_u}{K_o} \left\{ \left[\left(1 + \frac{u_o}{u_*} \right)^2 + \left[\left(1 + \frac{u_B}{u_*} \right)^2 - \left(1 + \frac{u_o}{u_*} \right)^2 \right] \frac{z}{h_u} \right]^{\frac{1}{2}} - \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{u_o}{u_*} \right) \right\} / \left[\left(1 + \frac{u_B}{u_*} \right)^2 - \left(1 + \frac{u_o}{u_*} \right)^2 \right] , \quad (29)$$

в функции $\eta(z)/\eta(h_u)$ и $\eta(z)/\eta(h_b)$ выражаются

$$\frac{\eta(z)}{\eta(h_u)} = u_* \left\{ \left[\left(1 + \frac{u_o}{u_*} \right)^2 + \left[\left(1 + \frac{u_B}{u_*} \right)^2 - \left(1 + \frac{u_o}{u_*} \right)^2 \right] \frac{z}{h_u} \right]^{\frac{1}{2}} - \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{u_o}{u_*} \right) \right\} / (u_B - u_o) , \quad (30)$$

$$\frac{\eta(z)}{\eta(h_b)} = \left\{ \left[\left(1 + \frac{u_o}{u_*} \right)^2 + \left[\left(1 + \frac{u_B}{u_*} \right)^2 - \left(1 + \frac{u_o}{u_*} \right)^2 \right] \frac{z}{h_u} \right]^{\frac{1}{2}} - \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{u_o}{u_*} \right) \right\} / \left\{ \left[\left(1 + \frac{u_o}{u_*} \right)^2 + \left[\left(1 + \frac{u_B}{u_*} \right)^2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left(1 + \frac{u_o}{u_*} \right)^2 \right] \frac{h_b}{h_u} \right]^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{u_o}{u_*} \right) \right\} . \quad (31)$$

3. Коэффициент турбулентности K зависит как от высоты z , так и от скорости сплошной среды $u_x(z)$:

$$K(z) = K_0 (1 + z / z^*) [1 + u_x(z) / u^*] . \quad (32)$$

Подставляя (32) в (7), получим выражения для скорости и коэффициента турбулентности как функций от z , а также для $\eta(z)$:

$$u_x(z) = u^* \left\{ \left[\left(1 + \frac{u_o}{u^*} \right)^2 + \left[\left(1 + \frac{u_B}{u^*} \right)^2 - \left(1 + \frac{u_o}{u^*} \right)^2 \right] \frac{\ln(1+z/z^*)}{\ln(1+h_u/z^*)} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} , \quad (33)$$

$$K(z) = K_0 (1 + z / z^*) \left\{ \left[\left(1 + \frac{u_o}{u^*} \right)^2 + \left[\left(1 + \frac{u_B}{u^*} \right)^2 - \left(1 + \frac{u_o}{u^*} \right)^2 \right] \frac{\ln(1+z/z^*)}{\ln(1+h_u/z^*)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} , \quad (34)$$

$$\eta(z) = \frac{2z^*}{K_0} \ln(1 + h_u/z^*) \left\{ \left[\left(1 + \frac{u_o}{u^*} \right)^2 + \left[\left(1 + \frac{u_B}{u^*} \right)^2 - \left(1 + \frac{u_o}{u^*} \right)^2 \right] \frac{\ln(1+z/z^*)}{\ln(1+h_u/z^*)} \right]^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{u_o}{u^*} \right) \right\} / \left[\left(1 + \frac{u_B}{u^*} \right)^2 - \left(1 + \frac{u_o}{u^*} \right)^2 \right] . \quad (35)$$

Функции $\eta(z)/\eta(h_u)$ и $\eta(z)/\eta(h_b)$ будут иметь вид :

$$\frac{\eta(z)}{\eta(h_u)} = u^* \left\{ \left[\left(1 + \frac{u_o}{u^*} \right)^2 + \left[\left(1 + \frac{u_B}{u^*} \right)^2 - \left(1 + \frac{u_o}{u^*} \right)^2 \right] \right\} \times$$

$$\times \frac{\ln(1+z/z^*)}{\ln(1+h_u/z^*)} \Bigg]^{1/2} - \left(1 + \frac{u_o}{u^*} \right) \Bigg\} / \left(u_B - u_o \right), \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta(z)}{\eta(h_b)} = & \left\{ \left[\left(1 + \frac{u_o}{u^*} \right)^2 + \left[\left(1 + \frac{u_B}{u^*} \right)^2 - \left(1 + \frac{u_o}{u^*} \right)^2 \right] \times \right. \right. \\ & \times \frac{\ln(1+z/z^*)}{\ln(1+h_u/z^*)} \Bigg]^{1/2} - \left(1 + \frac{u_o}{u^*} \right) \Bigg\} / \left\{ \left[\left(1 + \frac{u_o}{u^*} \right)^2 + \right. \right. \\ & + \left[\left(1 + \frac{u_B}{u^*} \right)^2 - \left(1 + \frac{u_o}{u^*} \right)^2 \right] \frac{\ln(1+h_b/z^*)}{\ln(1+h_u/z^*)} \Bigg]^{1/2} - \\ & \left. \left. - \left(1 + \frac{u_o}{u^*} \right) \right\} \right\}. \quad (37) \end{aligned}$$

4. Коэффициент турбулентности K , как и в случае 3, зависит от z и $u_x(z)$, но нелинейным образом, а именно,

$$K(z) = K_o \exp(z/z^*) \exp(u_x(z)/u^*). \quad (38)$$

Легко видеть, что выражение (32) является частным случаем выражения (38), когда экспоненты разлагаются в ряд и ограничиваются двумя первыми членами разложения.

Рассуждая аналогично предыдущему, получим:

$$\begin{aligned} u_x(z) = u_B + u^* \ln \left[e^{-(u_B-u_o)/u^*} + \left(1 - e^{-(u_B-u_o)/u^*} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(1 - e^{-z/z^*} \right) / \left(1 - e^{-h_u/z^*} \right) \right], \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(z) = K_o e^{z/z^*} e^{u_B/u^*} \left[e^{-(u_B-u_o)/u^*} + \left(1 - e^{-(u_B-u_o)/u^*} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(1 - e^{-z/z^*} \right) / \left(1 - e^{-h_u/z^*} \right) \right], \quad (40) \end{aligned}$$

$$\eta(z) = \frac{z^* \left(1 - e^{-h_u/z^*} \right)}{K_o \left(1 - e^{-(u_B - u_o)/u^*} \right)} e^{-u_B/u^*} \left\{ (u_B - u_o)/u^* + \right. \\ \left. + \ln \left[e^{-(u_B - u_o)/u^*} + \left(1 - e^{-(u_B - u_o)/u^*} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 - e^{-z/z^*} \right) / \left(1 - e^{-h_u/z^*} \right) \right] \right\}, \quad (41)$$

$$\frac{\eta(z)}{\eta(h_u)} = \left\{ 1 + \frac{u^*}{(u_B - u_o)} \ln \left[e^{-(u_B - u_o)/u^*} + \left(1 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - e^{-(u_B - u_o)/u^*} \right) \left(1 - e^{-z/z^*} \right) / \left(1 - e^{-h_u/z^*} \right) \right] \right\}, \quad (42)$$

$$\frac{\eta(z)}{\eta(h_b)} = \left\{ 1 + \frac{u^*}{(u_B - u_o)} \ln \left[e^{-(u_B - u_o)/u^*} + \left(1 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - e^{-(u_B - u_o)/u^*} \right) \left(1 - e^{-z/z^*} \right) / \left(1 - e^{-h_u/z^*} \right) \right] \right\} / \\ \left\{ 1 + \frac{u^*}{(u_B - u_o)} \ln \left[e^{-(u_B - u_o)/u^*} + \left(1 - e^{-(u_B - u_o)/u^*} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 - e^{-h_b/z^*} \right) / \left(1 - e^{-h_u/z^*} \right) \right] \right\}. \quad (43)$$

О относительно скорости скольжения сплошной среды по подстилающей поверхности u_o или скольжения одного слоя по другому каких либо серьезных исследований нам не известно. Здесь мы предложим следующую гипотезу.

В сплошной среде существует такое критическое касательное напряжение τ_k (вернее его модуль), при превышении которого происходит разрыв поля скорости и образование скольжения. Это критическое касательное напряжение зависит от вида жидкости,

ее давления и температуры, то есть

$$\tau_k = \tau_k(p, \theta),$$

где p — давление и θ — температура жидкости.

Касательное напряжение $\vec{\tau}$, согласно гипотезе Ньютона, пропорционально симметричной части пространственной производной скоростного поля, умноженной на единичный вектор нормали к рассматриваемой поверхности $\vec{n}_s$:

$$\vec{\tau}(\vec{r}, \vec{n}_s) = \mu \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} + \overline{\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}}} \right) \vec{n}_s, \quad (44)$$

где $\overline{\partial \vec{u} / \partial \vec{r}}$ — оператор, сопряженный с оператором пространственной производной скоростного поля.

Сказанное заставляет считать, что модули пространственных производных скорости не могут быть какими угодно, а ограничены условием

$$\left| \mu \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} + \overline{\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}}} \right) \vec{n}_s \right| \leq \tau_k. \quad (45)$$

Если $|\vec{\tau}| \geq |\tau_k|$, то происходит скольжение. Мы здесь не будем рассматривать выражение вектора скорости скольжения для общего случая, а запишем его для рассматриваемого нами одномерного условия.

$$\text{Для } \mu \left| \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|_{z=0} > \tau_k$$

$$k_u \rho u_0^2 = \mu \left| \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|_{z=0} - \tau_k \quad (46)$$

и

$$u_0 = \left[\frac{1}{k_u \rho} \left(\mu \left| \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|_{z=0} - \tau_k \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (47)$$

$$\text{Для } \mu \left| \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|_{z=0} \leq \tau_k$$

$$u_0 = 0. \quad (48)$$

Здесь k_u — безразмерный эмпирический параметр.

Запишем для рассмотренных нами четырех случаев выражения касящиеся производной скорости ветра по высоте при условии, что $u_0 = 0$ и $z = 0$. Так как эта производная всегда положительная, то знак модуля писать не будем.

$$1. \quad \left. \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{u_B}{z^* \ln(1 + h_u/z^*)} ; \quad (49)$$

$$2. \quad \left. \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{u^* [(1 + u_B/u^*)^2 - 1]}{2 h_u} ; \quad (50)$$

$$3. \quad \left. \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{u^* [(1 + u_B/u^*)^2 - 1]}{2 z^* \ln(1 + h_u/z^*)} ; \quad (51)$$

$$4. \quad \left. \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{u^*}{z^*} \left(e^{u_B/u^*} - 1 \right) / \left(1 - e^{-h_u/z^*} \right) . \quad (52)$$

В заключение отметим, что параметры K_0 , z^* и u^* определяются по натурным данным градиентных наблюдений с помощью оптимизационных методов. Эти параметры будут различными для различных типов принятых зависимостей 1 - 4.

По изложенной методике составлена программа расчета рассмотренных характеристик на языке Turbo-Pascal для ПЭВМ.

Список литературы

1. Г а н д и н Л. С. , Л а й х т м а н Д. Л. , М а т - в е е в Л. Т. , К д и н М. И. Основы динамической метеорологии . - Л .: Гидрометеиздат, 1955. - 646 с.

ОБОБЩЕННЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Как известно / 1 /, геометрической основой построения существующих тригонометрических функций является окружность, которую запишем здесь в виде

$$\left(\frac{X}{R} \right)^2 + \left(\frac{Y}{R} \right)^2 = 1, \quad (1)$$

где R - радиус окружности, а X и Y - переменные координаты.

По определению

$$\sin u = \frac{Y}{R}, \quad \cos u = \frac{X}{R}, \quad \operatorname{Tg} u = \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{Y}{X}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим известное тригонометрическое тождество

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1. \quad (3)$$

Но окружность является частным случаем эллипса, когда его эксцентриситет e равен нулю. Это наводит на мысль о том, что обычные тригонометрические функции представляют собой частный случай более общих тригонометрических функций, геометрической основой построения которых будет эллипс:

$$\left(\frac{X}{a} \right)^2 + \left(\frac{Y}{b} \right)^2 = 1, \quad (4)$$

где a и b - большая и малая полуоси эллипса.

Эксцентриситет эллипса e равен

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2}. \quad (5)$$

Определим обобщенный тригонометрический синус $\operatorname{SN}(e, u)$ и обобщенный тригонометрический косинус $\operatorname{CS}(e, u)$ соответственно

$$\operatorname{SN}(e, u) = \frac{Y}{b}; \quad \operatorname{CS}(e, u) = \frac{X}{a}. \quad (6)$$

Тогда обобщенным тангенсом $\operatorname{TG}(e, u)$ будет

$$\text{TG}(\epsilon, u) = \frac{\text{SN}(\epsilon, u)}{\text{CS}(\epsilon, u)} = \frac{a}{b} \frac{Y}{X} = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \frac{Y}{X} . \quad (7)$$

Равенства (6) и (4) показывают, что тригонометрическое тождество (3) справедливо и для обобщенных функций

$$\text{CS}^2(\epsilon, u) + \text{SN}^2(\epsilon, u) = 1 . \quad (8)$$

Сравнивая (7) и третью формулу в (2), получим

$$\text{TG}(\epsilon, u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \text{Tg } u . \quad (9)$$

Поделим (8) на $\text{CS}^2(\epsilon, u)$:

$$1 + \text{TG}^2(\epsilon, u) = \frac{1}{\text{CS}^2(\epsilon, u)} . \quad (10)$$

Подставим (9) в (10) и найдем выражение для $\text{CS}(\epsilon, u)$ через обычные тригонометрические функции :

$$\text{CS}(\epsilon, u) = \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \cos u}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 u}} . \quad (11)$$

Используя (8) и (11), получим формулу для обобщенного синуса :

$$\text{SN}(\epsilon, u) = \frac{\sin u}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 u}} . \quad (12)$$

Как и следовало ожидать, при $\epsilon = 0$ обобщенные тригонометрические функции переходят в обычные, то есть

$$\text{SN}(0, u) = \sin u ; \quad \text{CS}(0, u) = \cos u ; \quad \text{TG}(0, u) = \text{Tg } u .$$

На рис.1 для иллюстрации сказанного приведен график обобщенного синуса для $\epsilon = 0; 0.85; 0.99; 21; 101$ и $0 \leq u \leq 2\pi$.

Приведем без доказательств (их нетрудно сделать) некоторые соотношения для обобщенных тригонометрических функций, вводя предварительно функцию $\rho(\epsilon, u)$, определяемую равенством

$$\rho(\epsilon, u) = \sqrt{1 - \epsilon^2 \text{SN}^2(\epsilon, u)} . \quad (13)$$

Функции суммы и разности углов :

$$\text{SN}(\varepsilon, \alpha \pm \beta) = \frac{\text{SN}(\varepsilon, \alpha) \text{CS}(\varepsilon, \beta) \pm \text{CS}(\varepsilon, \alpha) \text{SN}(\varepsilon, \beta)}{\left[\sqrt{\rho^2(\varepsilon, \alpha) \times \rho^2(\varepsilon, \beta) + \varepsilon^2 [\text{SN}(\varepsilon, \alpha) \text{CS}(\varepsilon, \beta) \pm \text{CS}(\varepsilon, \alpha) \text{SN}(\varepsilon, \beta)]^2} \right]}, \quad (14.)$$

$$\text{CS}(\varepsilon, \alpha \pm \beta) = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} [\text{CS}(\varepsilon, \alpha) \text{CS}(\varepsilon, \beta) \mp (1-\varepsilon^2) \text{SN}(\varepsilon, \alpha) \text{SN}(\varepsilon, \beta)]}{\left[\sqrt{\rho^2(\varepsilon, \alpha) \times \rho^2(\varepsilon, \beta) - \varepsilon^2 [\text{CS}(\varepsilon, \alpha) \text{CS}(\varepsilon, \beta) \mp (1-\varepsilon^2) \text{SN}(\varepsilon, \alpha) \text{SN}(\varepsilon, \beta)]^2} \right]}, \quad (15.)$$

$$\text{TG}(\varepsilon, \alpha \pm \beta) = \frac{\text{TG}(\varepsilon, \alpha) \pm \text{TG}(\varepsilon, \beta)}{[1 \mp (1-\varepsilon^2) \text{TG}(\varepsilon, \alpha) \text{TG}(\varepsilon, \beta)]}. \quad (16.)$$

Обратные обобщенные тригонометрические функции :

$$\text{arcSN}(\varepsilon, x) = \text{arcSin} \left[\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} x}{\sqrt{1-\varepsilon^2 x^2}} \right], \quad (17.)$$

$$\text{arcCS}(\varepsilon, x) = \text{arcCos} \left[\frac{x}{\sqrt{1-\varepsilon^2 + \varepsilon^2 x^2}} \right], \quad (18.)$$

$$\text{arcTG}(\varepsilon, x) = \text{arcTg} [\sqrt{1-\varepsilon^2} x]. \quad (19.)$$

Производные обобщенных тригонометрических функций :

$$\frac{d}{du} \text{SN}(\varepsilon, u) = \frac{\rho^2(\varepsilon, u)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \text{CS}(\varepsilon, u), \quad (20.)$$

$$\frac{d}{du} \text{CS}(\varepsilon, u) = - \frac{\rho^2(\varepsilon, u)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \text{SN}(\varepsilon, u), \quad (21.)$$

$$\frac{d}{du} \text{TG}(\varepsilon, u) = \frac{\rho^2(\varepsilon, u)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{1}{\text{CS}^2(\varepsilon, u)}, \quad (22)$$

$$\frac{d}{du} \rho(\varepsilon, u) = - \frac{\varepsilon^2 \rho(\varepsilon, u)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \text{SN}(\varepsilon, u) \text{CS}(\varepsilon, u). \quad (23)$$

Некоторые интегралы от обобщенных тригонометрических функций :

$$\int \text{SN}(\varepsilon, u) du = - \frac{1}{\varepsilon} \arctg \left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \text{CS}(\varepsilon, u) \right], \quad (24)$$

$$\int \text{CS}(\varepsilon, u) du = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\varepsilon} \ln \left[\frac{1 + \varepsilon \text{SN}(\varepsilon, u)}{1 - \varepsilon \text{SN}(\varepsilon, u)} \right], \quad (25)$$

$$\int \text{TG}(\varepsilon, u) du = - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \ln \left[\frac{\text{CS}(\varepsilon, u)}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \text{SN}^2(\varepsilon, u)}} \right], \quad (26)$$

$$\int \text{SN}(\varepsilon, u) \text{CS}(\varepsilon, u) du = - \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2} \ln \left[1 - \varepsilon^2 \text{SN}^2(\varepsilon, u) \right]. \quad (27)$$

Перейдем к гиперболическим функциям. Геометрической основой их построения является равносторонняя гипербола

$$\left(\frac{X}{A} \right)^2 - \left(\frac{Y}{A} \right)^2 = 1. \quad (28)$$

По определению

$$\text{sh } u = \frac{Y}{A}; \quad \text{ch } u = \frac{X}{A}; \quad \text{th } u = \frac{\text{sh } u}{\text{ch } u} = \frac{Y}{X}. \quad (29)$$

Из (28) и (29) следует тождество для гиперболических функций

$$\text{ch}^2 u - \text{sh}^2 u = 1. \quad (30)$$

В общем случае гип. рбола не является равносторонней и ее

уравнением будет

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1, \quad (31)$$

а эксцентриситет ϵ_h равен

$$\epsilon_h = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2}. \quad (32)$$

Определим обобщенные гиперболические синус $SH(\epsilon_h, u)$, косинус $CH(\epsilon_h, u)$ и тангенс $TH(\epsilon_h, u)$:

$$SH(\epsilon_h, u) = \frac{y}{b}; \quad CH(\epsilon_h, u) = \frac{x}{a}; \quad (33)$$

$$TH(\epsilon_h, u) = \frac{SH(\epsilon_h, u)}{CH(\epsilon_h, u)} = \frac{a}{b} \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_h^2 - 1}} \operatorname{th} u. \quad (34)$$

Из (31) и (33) следует

$$CH^2(\epsilon_h, u) - SH^2(\epsilon_h, u) = 1. \quad (35)$$

Тогда

$$1 - TH^2(\epsilon_h, u) = \frac{1}{CH^2(\epsilon_h, u)}. \quad (36)$$

Найдем из (36) обобщенный гиперболический косинус, выраженный с учетом (34) и (29) через обычные гиперболические функции:

$$CH(\epsilon_h, u) = \frac{\sqrt{\epsilon_h^2 - 1} \operatorname{ch} u}{\sqrt{1 + (\epsilon_h^2 - 2) \operatorname{ch}^2 u}}. \quad (37)$$

Используя соотношения (35) и (37), определим выражение для обобщенного гиперболического синуса:

$$SH(\epsilon_h, u) = \frac{\operatorname{sh} u}{\sqrt{1 + (\epsilon_h^2 - 2) \operatorname{ch}^2 u}}. \quad (38)$$

Для равноостной гиперболы $\epsilon_h = \sqrt{2}$ (формула (32)),

поэтому

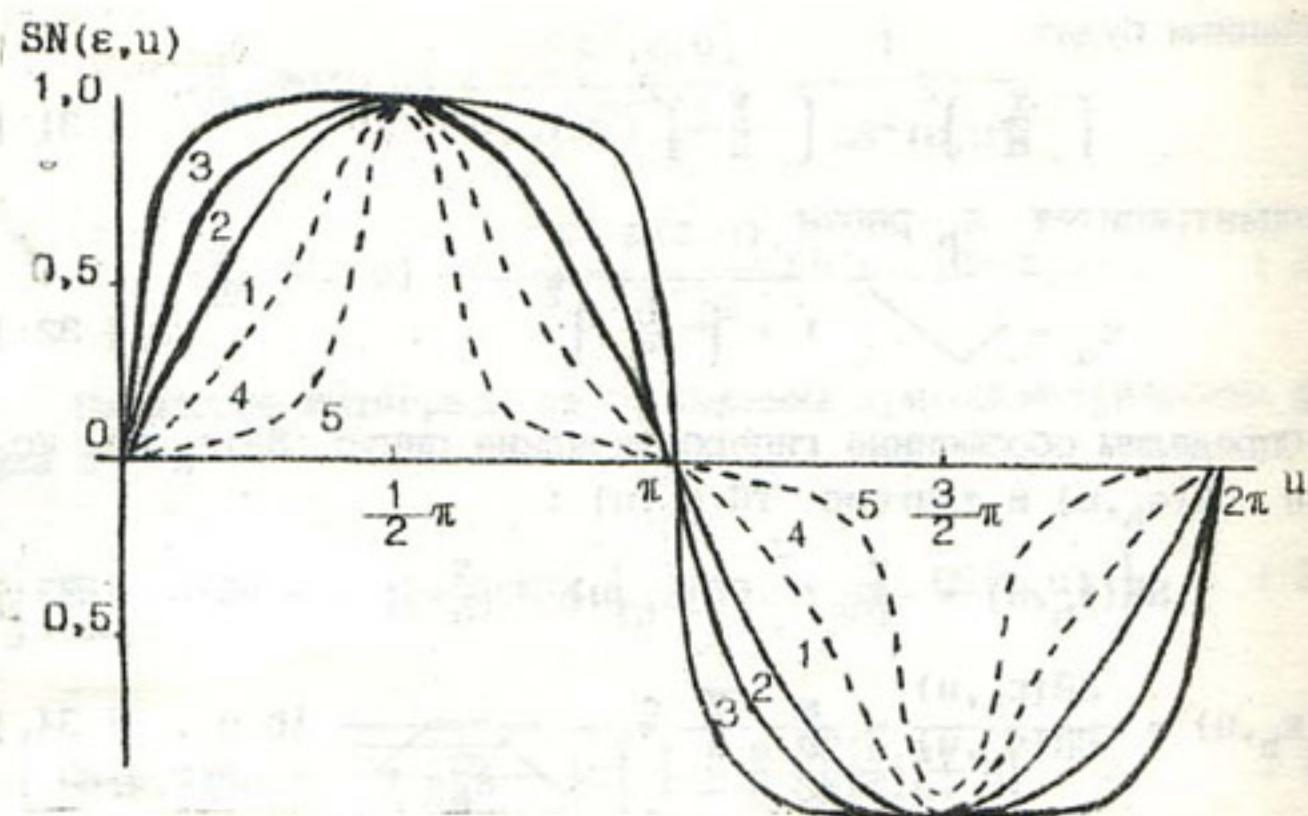


Рис. 1 Значения обобщенного тригонометрического синуса $SN(\epsilon, u)$ для ϵ , равного: 1 - 0,00; 2 - 0,85; 3 - 0,99; 4 - 21; 5 - 101.

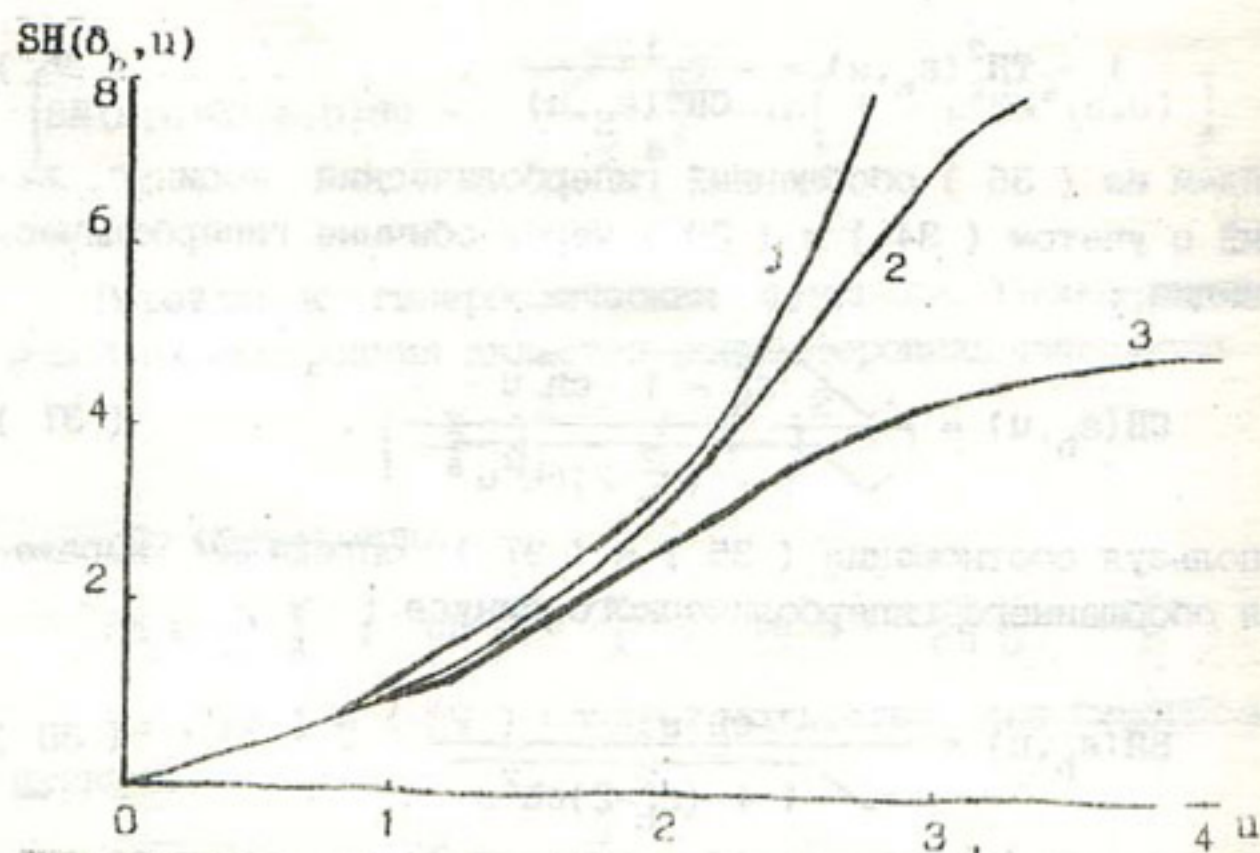


Рис. 2 Значения обобщенного гиперболического синуса $SH(\delta_h, u)$ для δ_h , равного: 1 - 0,00; 2 - 0,10; 3 - 0,20.

$$\text{SH}(\sqrt{2}, u) = \text{sh } u ; \quad \text{CH}(\sqrt{2}, u) = \text{ch } u ; \quad \text{TH}(\sqrt{2}, u) = \text{th } u .$$

Полезно вместо эксцентриситета гиперболы e_h ввести другую величину δ_h , связанную с эксцентриситетом зависимостью

$$\delta_h^2 = e_h^2 - 2 . \quad (39)$$

Тогда (37) и (38) запишутся :

$$\text{CH}(\delta_h, u) = \frac{\sqrt{1 + \delta_h^2 \text{ch } u}}{\sqrt{1 + \delta_h^2 \text{ch}^2 u}} , \quad (40)$$

$$\text{SH}(\delta_h, u) = \frac{\text{sh } u}{\sqrt{1 + \delta_h^2 \text{ch}^2 u}} . \quad (41)$$

При $\delta = 0$ обобщенные гиперболические функции переходят в обычные. На рис. 2 показан обычный и обобщенный гиперболический синус при $\delta_h = 0,10$ и $0,20$. Отметим также, что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \text{SH}(\delta_h, u) = \frac{1}{\delta_h} , \quad (42)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \text{CH}(\delta_h, u) = \sqrt{1 + \frac{1}{\delta_h^2}} , \quad (43)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \text{TH}(\delta_h, u) = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_h^2}} . \quad (44)$$

Список литературы

Г. Новоселов С. И. Специальный курс тригонометрии. — М.: Советская наука, 1957. — 492 с.

УДК 556.166.4.072

Стохастико-детерминированные математические модели стока рек. Денисов Ю. М. Труды САНИГМИ, 1996, вып. 149(230), с. 5 - 21.

Предлагается способ расчета гидрографа стока реки за конкретный год, включающий в себя учет как стохастических, так и детерминированных характеристик процесса. Результатом такого расчета является безусловная плотность вероятности расходов воды для любого момента времени внутри данного года.

Табл. 1. Библ. 6.

УДК 556.16.072

Метод гидрологических расчетов среднегодовых и экстремальных расходов воды для рек с интенсивным хозяйственным использованием водных ресурсов. Денисов Ю. М., Ибрагимова Т. Л. Труды САНИГМИ, 1996, вып. 149(230), с. 22 - 40.

Для описания статистических характеристик стока рек с интенсивным хозяйственным использованием их сток представляется в виде нестационарной случайной последовательности. Нетривиальной проблемой является разработка способов расчета трендов параметров распределения последовательности по одной ее реализации. Эта задача решается методом, отличным от скользящего осреднения.

Библ. 6.

УДК 556.166

Выбор плотности вероятности и функции распределения. Денисов Ю. М., Ибрагимова Т. Л. Труды САНИГМИ, 1996, вып. 149 (239), с. 41 - 50.

Широко используемая в гидрологии плотность распределения Пирсона третьего типа или гамма-распределение имеет жесткую связь между коэффициентом вариации C_v и коэффициентом асимметрии C_s , где $C_s = 2C_v$. В последнее время сотрудниками ГГИ введено так называемое энтропийное трехпараметрическое распределение. В данной работе рассматривается способ определения параметров этого распределения.

Табл. 1. Библ. 2.

УДК 566.166

Расчет смешанных максимальных расходов воды горных рек.
Шахид В. А. Ф. Труды САНИГМИ, 1996, вып. 149 (230), с. 51 - 67.

Для большинства рек Средней Азии максимальные расходы воды формируются путем наложения дождевых пиков на талое основание. Такие максимальные расходы называются смешанными и методы их расчета стали развиваться в гидрологии сравнительно недавно. В данной статье приводится описание существующих методов расчета смешанных максимальных расходов и делается попытка дальнейшего их развития.

Илл. 4. Библи. 11.

УДК 556.189:628

Метод оценки водообеспеченности орошаемой территории.
Денисов Ю. М., Сергеев А. И., Побережский Л. Н. Труды САНИГМИ, 1996, вып. 149(230), с. 68 - 78.

К настоящему времени большинство рек Средней Азии подвержено интенсивному антропогенному воздействию. Основным потребителем водных ресурсов является сельское хозяйство. В данном исследовании предлагается метод оценки водообеспеченности гидромелиоративной системы для различных периодов времени. Метод реализован на примере орошаемой зоны бассейна реки Санзар.

Табл. 6, Илл. 1.

УДК 551.482.54

Инерционный метод сглаживания временных рядов. Мягков С. В. Труды САНИГМИ, 1996, вып. 149(230), с. 79 - 87.

Предлагается метод сглаживания временных рядов, основанный на применении уравнений движения материальной точки в плоском поле сил, которое представляет совокупность центральных полей, сформированных членами временного ряда и функцией влияния. Апробация метода проведена на среднегодовых числах Вольфа с использованием различной степени влияния отдельных членов ряда.

Илл. 2. Библи. 5.

УДК 551.532.54

О двух методах обработки спутниковых снимков. М я г -
к о в С. В. Труды САНИГМИ, 1996, вып.149(230), с.88 - 95.

Описан алгоритм увеличения части экранного изображения спутникового снимка, представляющего цифровую матрицу. Для визуального выделения малых интервалов яркости матрица представляется в виде проекции трехмерной поверхности.

Табл. 1. Илл. 5. Библ. 3.

УДК 551.166.4

Радислокационная и спутниковая информация для прогноза селеопасности в Ферганской долине. Л я х о в с к а я Л. Ф.,
М у х а м и т ь я н о в а Я. Ф. Труды САНИГМИ, 1996, вып.
149(230), с. 96 - 100.

Приводятся результаты анализа данных измерений МРЛ и ИСЗ в совокупности с радиозондированием для случаев с селями в Ферганской долине. Показаны варианты дискриминантных функций для прогноза селеопасности в Ферганской долине с использованием данных МРЛ, ИСЗ и радиозондирования. Даны оценки авторских испытаний нового метода прогноза.

Библ. 8.

УДК 551.556.06

Долгосрочный прогноз притока в Нурекское водохранилище на реке Вахш. А г а л ь ц е в а Ч. А. Труды САНИГМИ, 1996, вып.149(230), с. 101 - 108.

Разработан автоматизированный метод прогноза притока в Нурекское водохранилище на реке Вахш с заблаговременностью до 6 месяцев на основе математической модели, описывающей полный цикл формирования стока в бассейне. Оценка качества прогноза на тридцатилетней выборке в адаптивном режиме показала положительные результаты. Приводятся результаты численного описания поля осадков.

Табл. 1. Илл. 2. Библ. 3.

Долгосрочный прогноз стока реки Кафирниган. А г а л ь -
це в а Н. А., Н о в и к о в а В. А. Труды САНИГМИ, 1996,
вып. 149 (230), с. 109 - 114.

Приводятся результаты исследований по разработке метода прогноза стока реки Кафирниган, который основан на математических моделях. Авторские испытания метода показали положительные результаты. Метод оценки снегозапасов в бассейне реки Кафирниган передан в Гидрометцентр РУз для практического использования.

Табл. 2. Илл. 2. Библи. 2.

Расчет поля осадков и комплексная оценка снегозапасов в бассейне реки Пяндж. П а к А. В., К о р н и л о в а Е. В. Труды САНИГМИ, 1996, вып. 149 (230), с. 115 - 120.

Представлены результаты численного описания поля осадков в бассейне реки Пяндж в виде зависимостей их от высоты местности. В процессе адаптации модели формирования снежного покрова в горах получены расчетные ряды снегозапасов, талого и дождевого поступления и динамика снеговой границы в бассейне Пянджа. Для оценки расчетов привлечены данные наземных и авиационных наблюдений. Полученные результаты будут использованы для разработки методики долгосрочного прогноза вегетационного стока Амударьи.

Табл. 2. Илл. 2. Библи. 5.

Метод расчета боковой приточности на участках рек Нарын, Карадарья и Сырдарья в пределах орошаемой зоны Ферганской долины. С е р г е е в А. И. Труды САНИГМИ, 1996, вып. 149 (230), с. 121 - 130.

Рассматривается формирование боковой приточности в бассейнах рек с интенсивным орошаемым земледелием, которая является результатом трансформации водозабора и стока малых рек на мелиорируемой территории.

Эта задача решается с помощью математического моделирования взаимосвязи системы "река-орошаемый массив", где в единой совокупности рассматриваются процессы формирования стока в гидромелиоративных системах, их поступления в речную сеть и изменение гидрологического режима в створах реки. Численная реализация проведена на примере бассейна реки Сырдарья.

Табл. 1. Илл. 3. Библи. 1.

Метод расчета твердого стока и русловых деформаций. Денисов Ю. М., Туляганов А. Х. Труды САНИГМИ, 1996, вып. 149 (230), с. 131 - 145.

Существующие в настоящее время методы расчета твердого стока и русловых деформаций далеки еще от совершенства и требуют их уточнения. Такое уточнение может быть осуществлено на основе новых теоретических результатов, полученных Ю.М. Денисовым в области механики многофазных и многокомпонентных сред.

В статье получена система дифференциальных и интегродифференциальных уравнений, с соответствующими ей краевыми и начальными условиями для расчета твердого стока и русловых деформаций.

Библ. 10.

Численная схема решения нестационарной задачи распределения влаги, пара и тепла в ненасыщенных почвогрунтах. Сергеев А. И. Труды САНИГМИ, 1996, вып. 149 (230), с. 146 - 160.

Перенос влаги, пара и тепла в ненасыщенных почвогрунтах представлен системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Решение этой системы в общем виде связано с большими математическими трудностями и отсутствием достаточно полной информации о полях водно-физических и тепловых характеристик почвогрунтов. Это привело к необходимости введения некоторых упрощающих предположений при численной реализации системы для естественных условий.

Илл. 3 . Библ. 4.

Расчет испарения воды из почвы. Денисов Ю. М. Труды САНИГМИ, 1996, вып. 149 (230), с. 161 - 171.

Испарение воды из почвы, как физический процесс происходит в зоне аэрации на поверхности раздела вода - воздух. Вынос пара из почвы на дневную поверхность осуществляется путем его диффузии и конвективного переноса влажным воздухом.

Метод расчета построен на основе теории многофазных и многокомпонентных сред. Используя ряд упрощающих предположений, найдена сравнительно простая формула для вычисления испарения воды из почвы.

Табл. 1 Библ. 3.

Некоторые эвристические соотношения по оценке потоков импульса, тепла и пара. Денисов Ю. М. Труды САНИГМИ, 1996, вып. 149 (230), с. 172 - 182.

Потоки импульса, тепла и пара между подстилающей поверхностью и атмосферой из-за трудности определения вертикальной скорости сплошной среды аппроксимируются произведением коэффициента турбулентности на производные соответствующих характеристик по нормали к подстилающей поверхности. Окончательные выражения для этих величин и их потоков будут зависеть от вида аппроксимации коэффициента турбулентности, что и показано в данной работе.

Библ. 1.

Обобщенные тригонометрические и гиперболические функции. Денисов Ю. М. Труды САНИГМИ, 1996, вып. 149 (230), с. 183 - 189.

Как известно, геометрической основой построения существующих тригонометрических функций является окружность. Но окружность представляет собой частный случай эллипса, когда его эксцентриситет равен нулю. Геометрической основой гиперболических функций также является равноосная гипербола. В данной работе проведено построение тригонометрических и гиперболических функций на геометрической основе эллипса и неравноосной гиперболы. Полученные функции обладают рядом интересных и полезных свойств.

Илл. 1. Библ 1.

УЎТ 556.166.4.072

Дарё оқимининг стохастик-детерминар математик моделири. Д е н и с о в Ю. М. УОИТГМИ илмий тўплами, 1996, 149 (230) нашри, 5 - 21 б.

Мақолада дарё оқимининг гидрографини маълум йил учун ҳисоблашларни стохастик ҳамда детерминар тавсифлар жараёнини ўз ичига олган ҳисоблаш усулини баёни келтирилади. Ҳисоблаш натижалари эса мазкур йилнинг ҳоҳлаган вақтидаги сув сарфининг эҳтимоллик зичлигидан иборат бўлади.

Жадв.1. Фойд. ад.6.

УЎТ 556.16.072

Хўжаликда сув ресурслари жадал фойдалиналаётган дарёларнинг ўртача йиллик ва экстремал сув сарфини гидрологик ҳисоблаш усули. Д е н и с о в Ю. М., И б р а г и м о в а Т. Л. УОИТГМИ илмий тўплами, 1996, 149 (230) нашри, 22 - 40 б.

Хўжаликда сув ресурслари жадал ишлатилаётган дарёларнинг статистик тавсифларини баён қилишда турғун бўлмаган, тасодифий кетма-кетликдан фойдаланилади. Уларнинг алоҳида ҳисоби эса ҳали тривиал муаммо бўлмаган, тренд параметрларини тақсимланишини ҳисоблаш усуллари ишлаб чиқишдан иборат бўлади. Мазкур масала мақолада узлуксиз сирғанма ўртачаларни ҳисоблашдан фарқлироқ равишдаги усулларда ҳал қилинган.

Фойд. ад.6.

УЎТ 556.166

Эҳтимоллик зичлигини ва тақсимланиш функциясини танлаш. Д е н и с о в Ю. М., И б р а г и м о в а Т. Л. УОИТГМИ илмий тўплами, 1996, 149 (230) нашри, 41 - 50 б.

Гидрологияда кенг қўлланиладиган Пирсоннинг зичликни тақсимланишини учинчи тоифаси ёки гамма-тақсимланиш вариация коэффиценти C_{vy} ва асимметрия коэффиценти C_{sy} билан, бу ерда $C_{sy} = 2C_{vy}$ қатъий боғланиши билан ажралиб туради. Кейинги вақтларда Россия гидрологик институти ходимлари томонидан энтропий учпараметрлик тақсимланиш тушунчаси амалиётга киритилган бўлиб, мазкур мақолада ушбу параметрларни аниқлаш усули баён қилинади.

Жадв.1. Фойд. ад.2.

УЎТ 556.166

Тоғ дарёларининг аралаш максимал сув сарфини ҳисоблаш.
Ш о х и д в А. Ф. УОИТГМИ илмий тўплами, 1996, 149 (230)
нашри, 51 - 67 б.

Ўрта Осиё дарёларининг кўпчилигида максимал сув сарфи қор ва музликларни эришидан ҳосил бўлган оқим асосига ёмғир сувларининг ҳам оқими қўшилишидан ҳосил бўлади. Ушбу аралаш максимал сув сарфи деб аталмиш миқдорни ҳисоблаш усули гидрологияда нисбатан яқин йилларида ривожлана бошланган.

Мазкур мақолада аралаш максимал сув сарфини ҳисоблашларни мавжуд усуллари баёни келтирилади ва уларни такомиллаштириш йўллари бўйича фикр билдирилади.

Расм. 4. Фойд. ад. 11.

УЎТ 556.189:628

Сўғориладиган зарҳадларни сув билан таъминланишини баҳолаш усули. Д е н и с о в Ю. М., С е р г е е в А. И.,
П о б е р е ж с к и й Л. Н. УОИТГМИ илмий тўплами, 1996,
149(230) нашри, 68 - 78 б.

Мақолада, сув ресурсларини асосий истъеъмолчилари қишлоқ хўжалиги бўлган ва ҳозирги вақтида интенсив антропоген таъсирига мойил бўлган Ўрта Осиё дарёлари мисолида, турли даврлар учун гидромелиоратив тизимларни сув билан таъминлашни баҳолаш усули келтирилади. Бу усул Санзор дарёсини сув ҳавзасидаги сўғориладиган минтақалар мисолида амалиётда кўрилади.

Жадв. 6. Расм. 1.

УЎТ 551.482.54

Вақтли қаторларни инерцион усул билан силлиқлаш. М я г -
к о в С. В. УОИТГМИ илмий тўплами, 1996, 149 (230) на-
шри, 79 - 87 б.

Мақолада вақтли қаторларни каср ҳадларидан ва функция таъсирида ташкил топган ҳамда марказий майдонлар мажмуаси кўринишда бўлган, нуқтани ясси тексликдаги ҳаракат тенгламаларига асосланган қаторларни силлиқлаш усули тавсия қилинади. Мазкур усул, Вольф сонларининг ўртача йиллик миқдорларини асосида ҳадлар қаторига турли даражадаги таъсирдан фойдаланилган ҳолда кўлланилди.

Расм. 2. Фойд. ад. 5.

УЎТ 551.532.54

Ер йўлдошларидан олинган тасвирларни қайта ишлашнинг икки усули. М я г к о в С. В. УОИТГМИ илмий тўплами, 1996, 149 (230) нaшри, 88 - 95 б.

Мақолада ер йўлдошларидан олинган тасвирларни катталаштириш учун сонли матрица кўринишидаги алгоритмининг баёни келтирилади. Кичик интервалдаги очикликларни кўз билан чама-лашда матрица юзalarини уч ўлчамли проекциялар шаклида тах-лил қилинди.

Жадв. 1. Расм. 5. Ғойд.ад. 3.

УЎТ 551.166.4

Ғарғона водийсида сел ходисalarини ҳафтини прогнозида радиолокацион ва ер йўлдошлари маълумотларидан фойдаланиш. Д я х о в с к а я Л. Ғ., М у х а м и т ъ я н о в а Я. Ғ. УОИТГМИ илмий тўплами, 1996, 149 (230) нaшри, 96 - 100 б.

Мақолада Ғарғона водийсида сел ходисalarни кузатишган вақтлардаги МРЛ ва ИСЗда, радиозондлаш билан бирга ўлчанган маълумотлари тахилининг натижалари ёритилган. МРЛ ва ИСЗ, ҳам-да радиозондлаш маълумотларидан фойдаланишган ҳолда мазкур минтақада сел ходисalarни кузтувини прогнози учун дискриминант функциялар вариантлари тавсия қилинган. Янги усулни му-аллиф томонидан сиғаш намижалари ҳам алоҳида кўрсатиб ўтил-ган.

Ғойд.ад. 8.

УЎТ 551.556.06

Вахш дарёсидаги Нурек сув омборига келадиган оқимнинг узок муддатли прогнози. А г а л ь ц е в а Н. А., УОИТГМИ илмий ишлар тўплами, 1996, 149 (230) нaшри, 101 - 108 б.

Мақолада хавзадаги оқимни тўлиқ шаклланишини қамраган ва математик моделга асосланган Вахш дарёсидаги Нурек сув омборига оқимнинг 6-ой олдинги прогнозини автоматлаштирилган усули тўғрисида маълумот берилган. Адаптив режимдаги ўттиз йиллик танланма учун башорат сифати баҳоланиши яхши натижа берганлиги кўрсатилган, ҳамда ёғин майдонларининг сонли миқ-дорлари келтирилган.

Жадв. 1. Расм. 2. Ғойд.ад. 3.

Кафирниган дарёсининг оқимини узоқ муддатли прогнози.
 А г а л ь ц е в а Н. А. , Н о в и к о в а В. А. УОИТГМИ
 илмий ишлар тўплами, 1996 , 149 (230) нашри, 109 - 114 б.

Кафирниган дарёсининг оқимни математик моделларга асосланган узоқ муддатли прогноз усули ишлаб чиқилган бўлиб, муаллиф синови яхши натижа берганлиги тўғрисида хабар қилинади. Кафирниган дарёсининг хавзаси учун қор захираларини баҳолаш усули амалиётга тадбиқ қилиш учун берилган.

Жадв. 2. Расм. 2. Фойд.ад. 2.

Пяндж дарёсининг хавзаси учун ёғин майдонларини ҳисоблаш ва қор захираларини комплекс баҳолаш. П а к А. В. , К о р - н и л о в а Е. В. УОИТГМИ илмий тўплами , 1996 , 149(230) нашри, 115 - 120 б.

Пяндж дарёсининг хавзаси учун жойнинг баландликлар бўйича боғланишлари кўринишида бўлган ёғин майдонларини сонли миқдорларини натижалари келтирилган.

Тоғларида қор ётқиқиқларини шаклланишини адаптив жараёнида , қор эришида ва ёғингарилиқдан ҳосил бўлган ҳисобланган маълумотлар келтирилган.

Жадв. 2. Расм. 2. Фойд.ад. 5.

Фарғона водийсининг суғориш минтақасидаги Норин, Қорадарё ва Сирдарёларнинг алоҳида қисмларидаги ён оқимларини ҳисоблаш усули. Сергеев А.И. УОИТГМИ илмий тўплами, 1996, 149(230) нашри, 121 - 130 б.

Мақолада мелиорация ишлари ривожланган ҳудудларда суғоришни ва кичик дарёлар оқимларини ўзгариши натижасида дарё хавзаларидаги ён оқимларни ҳосил бўлиши таҳлил қилинган. Мазкур масала, гидрометрикатив тизимлардаги оқимни ҳосил бўлиш жараёнини, яъни уларни дарё тармоқларига тушишни, маълум қисмларида гидрологик режимини ўзгаришларини ягона мажмуада "Дарё - суғориладиган массив"ларни ўзаро боғланишлар тизимидаги математик моделлаштириш ёрдамида ҳал қилинди. Амалий сонли ҳисоблашлар Сирдарё сув хавзасининг мисолида кўрилди.

Жадв. 1. Расм. 3. Фойд. ад. 1.

УЎТ 551.311.21

Лойиқа оқизиклари ва ўзан ўзгаришларини ҳисоблаш усули. Денисов Ю. М., Туляганов А. Х. УОИТГМИ илмий тўплами, 1996, 149 (230) нaшpи, 131 - 145 б.

Дарёларнинг лойиқа оқизикларини ва ўзан ўзгаришларини ҳозирги кундаги бизга маълум бўлган ҳисоблаш усуллари мукаммал бўлмай, уларга аниқлик киритишни ва амалиёт талабига жавоб берадиган даражасига етказишни тақазо қилади. Бунини эса, Ю.М.Денисов томонидан кўп фазали ва кўп компонентлик муҳитлар механикаси соҳасида эришилган янги назарий ишларининг натижаларини қўллаган ҳолда амалга ошириш мумкин.

Мақолада лойиқа оқизиклари ва ўзан ўзгаришларини ҳисоблаш учун мос равишда чегаравий ва бошланғич шароитларни ўз ичига олган дифференциал ва интегродифференциал тенгламалар тизими ҳавола қилинади.

Фойд. ад. 10

УЎТ 551.579.5

Тўйинмаган тупроқ - грунтларда турғун бўлмаган намлик, буғ ва иссиқлик тарқалиши масалаларини сонли ечилмаси. Сергеев А. И. УОИТГМИ илмий тўплами, 1996, 149 (230) нaшpи, 146 - 160 б.

Тўйинмаган тупроқ - грунтларда намлик, буғ ва иссиқлик кўчишини, чизикли бўлмаган дифференциал тенгламалар системасини ҳосилаларида ўрганилган. Бирок, бу системаларни ечиш вақтида мураккаб математик ҳисоблар, тупроқ - грунтларни физик ва иссиқлик тавсифлари тўғрисидаги тўлиқ маълумотлар талаб қилганлиги собабли, мазкур масала қатор соддалаштиришлар ва фаразлар натижасида дала шароитлари мисолида сонли ечими амалга оширилганлиги баён қилинган.

Расм. 3. Фойд. ад. 4.

УЎТ 631.43

Тупроқлардан бўладиган сув буғланишини ҳисоблаш. Денисов Ю. М. УОИТГМИ илмий тўплами, 1996, 149 (230) нaшpи, 161-171 б.

Тупроқ қатламларидан бўладиган сув буғланишлар физик жараён бўлиб, азрация минтақасидаги сув-ҳаво айриғич юзасида рўй беради. Бунда, тупроқлардаги сув буғлари диффузия ва нам ҳавонинг конзектив ҳаракати туфайли ер юзасига олиб чиқилади.

Шунга кўра, изланилаётган ҳисоблаш усули кўп фазали ва кўп компонентли муҳитлар назариясига асосланган ҳолда, бир қатор соддалаштирилган фаразлардан фойдаланиб бирмунча содда ҳисоблаш тенгламаси таклиф қилинади.

Жадв. 1. Фойд. ад. 3.

Иссиқ ва буғ оқимларини импульсини баҳолаш бўйича айрим эвристик ўзаро боғланишлар. Денисов Ю. М. УОИТГМИ илмий тўплами, 1996, 149 (230) нәшри, 172 - 182 б.

Яхлит муҳиятларда вертикал тезликларни аниқлаш мураккаб бўлганлиги сабабли, юза тўшамалар ва атмосфера орасидаги иссиқлик ва буғ оқимларини импульсини турбулент коэффициентини кўпайтмасини юза тўшамаларига нормал бўлган, мос тавсифларини ҳосила миқдорларини аппроксимация қилиш орқали амалга оширилади. Мақолада энг сўнгги ифодаши миқдорлар ва оқимлар учун турбулент коэффициентни аппроксимациясини кўринишга боғлиқ эканлиги уқдириб ўтилади.

Фойд. ад. 1.

Тригонометрик ва гиперболик функцияларни умумлаштириш. Денисов Ю. М. УОИТГМИ илмий тўплами, 1996, 149 (230) нәшри, 183 - 189 б.

Мавжуд тригонометрик функцияларни тузишнинг геометрик асоси айлана ҳисобланади. Бироқ, унинг эксцентриситети нолга тенг бўлганда, айлана жуъзий ҳолларда эллипс кўринишда бўлади. Шу қаторда, гиперболик функцияларни ҳам геометрик асоси тенг ҳажмли гипербола ҳисобланади. Мазкур мақолада эллипс ва ўқлари тенг бўлмаган гиперболаларнинг геометрияси асосида, тригонометрик ва гиперболик функцияларни тузиш бўйича фикр билдирилади. Таклиф қилнган функциялар қатор қизиқарли ва фойдали хусусиятлари билан алоҳида ажралиб туради.

Расм. 1. Фойд. ад. 1.

UDC 556.166.4.072

Stochastic-determinate mathematical models of the rivers runoff. Denisov U.M., Transactions of SANIGMI, 1996, vol 149(230), p. 5 - 21.

The method of computation of discharge hydrograph is suggested for concrete year, including stochastic and determinate processes characteristics. Result of the computation is unconditional density of discharge probability for any moment in the year.

Tabl.1. Ref.6.

UDC 556.16.072

Method of hydrological computations of mean annual and extreme discharge for rivers with intensive economic employment of water resources. Denisov U.M., Ibragimova T.L. Transaction of SANIGMI, 1995, vol. 149(230), p. 22 - 40.

The rivers runoff with intensive economic employment is represented as insteady accidental sequence for description his statistical characteristics. The elaboration of methods computations trends of parameters distribution sequence on one it realization is untrivial problem. This problem is decided by the method different from sliding something in between.

Ref.6.

UDC 556.166

The choice of function and density of distribution. Denisov U.M., Ibragimova T.L. Transaction of SANIGMI, 1996, vol 149(230), p. 41 - 50.

The density Pirsons distribution of third tipe or γ -distribution have cruel connection between coefficient of variation C_v and coefficient of asymmetri C_s , where $C_s = 2C_v$, and it is used in hydrology widely. At the last time third-parameters distribution are introduced by research workers of Hydrological institute. In this article the method of determinate parametres of such distribution is considered.

Tabl.1. Ref.2.

UDC 556.166.

Computation of mixed maximum discharges of the mountains rivers. S h a h i d o v A.F., Transactions of SANIGMI, 1996, vol. 149(230), p. 51 - 67.

The maximum discharges are formed by imposition the rain peaks on the snow melt foundation for majority rievvers of Central Asia. That kind of maximum discharges are called mixed and methods of them computation are developed in Hydrology recently. The descriptions of methods of computation maximum mixed discharge is adduced in this article.

Fig.4. Ref.11.

UDC 556.189.628

Method for estimate of water supply of the irrigational territory. D e n i s o v J.M., S e r g e e v A.I., P o b e r e j s k i y L.N. Transactions of SANIGMI, 1996, vol.149 (230), p. 68 - 78.

At present time the most of Central Asia rivers are subjected to the intensive anthropogenical influence. The main consumer of water resources is appeared agriculture. In this investigation the method of estimate water provision hydrometeorological system is suggested for other times periods. The method is realized on example of the irrigational zone of Sanzar river basin.

Tabl.6. Fig.1.

UDC 551.482.54

The inercial method of interpolation of the time-row. M y a g k o v S.V., Transactions of SANIGMI, 1996, vol. 149(230), p. 79 - 87.

The method of interpolation of the time-row based on use equation a movement of material, point in plane field forces is presented. The field is considered a centr fields formed of row elements and iunction influences. The method has been approbation on annual Wolf-numbers by use different influence for different points.

Fig.2. Ref.5.

UDC 551.532.54

Two methods for analysing satellite pictures. M y a g-
k o v S.V., Transactions of SANIGMI, 1996, vol. 149(230),
p. 88 - 95.

The algorithm for the enhancement of the part of screen's
image of satellite picture is presented, in the form of
numerical matrix. The matrix for visual analysis of small
brightness intervals is presented in three-dimension surface
image form.

Tabl.1. Fig.5. Ref.3.

UDC 551.166.4

Radiolocational and satellite information for the fore-
cast of danger from mud-streams in Fergana valley. L j a-
h o v s k a j a L.P., M u h a m e t j a n o v a J.P.
Transactions of SANIGMI, 1996, vol.149(230), p. 96 - 100.

The results of analysis data of measurements by Meteo-
rological Radiolocator and Artificial Satellite of Earth
the jointly with radio-seusing for the chances with mud-
flows in Fergana valley are presented. The variants of des-
criminated functions for forecast of mudblow damage from
mud-flows in Fergana valley with using of data of Meteo-
rological Radiolocator, Artificial Satellite of Earth and
radio-seusing are showed. The estimates of authors tests for
the new method of forecast.

Ref.8.

UDC 551.556.06

The long-term forecast of the water inflow into the Nu-
reck reservoir on the Vahsh river. A g a l t s e v a N.A.
Transactions of SANIGMI, 1996, vol.149(230), p. 101 - 108.

The automated method of long-term forecast of the water
inflow into the Nureck reservoir on the Vahsh river with the
six months earliness is developed on the basis of mathemati-
cal models, describing total cycle of runoff formation in ba-
sin. Estimation of the quality of forecasts on 30-years samp-
le in adaptive regime is showed the positive results. The
results of the numerical description of the fields of preci-
pitations are presented.

Tabl.1. Fig.2 Ref.3.

Long-term forecast of the Kafirnigan river runoff. Agaltseva N.A., Novikova V.A., Transactions of SANIGMI, 1996, vol.149(230), p. 109 - 114.

The results of the investigations on developing out the forecasting method of runoff Kafirnigan river, which is based on the mathematical models are presented. The verification of the method of forecast showed positive results. The method of appraisal of snow supply has been passed in the Hydrological Centre of the Uzbekistan for the practical use.

Tabl.2. Fig.2. Ref.2.

The computation of the field precipitation and complex appraisal water equivalent of snow cover in the Pundj river basin. Pak A.v., Kornilova E.V. Transaction of SANIGMI, 1996, vol.149(230), p. 115 - 120.

The results of numerical description the field precipitation in Pundj river basin in form dependences its from altitude locality are presented. The computing series of water equivalent of snow cover, snow melt and rain water are obtained by process of adaptation the model forming snow cover in the mountains.

The data of ground and avia distance observations are attached for the appraisal of computation. The obtaining results will have been used for elaboration long-term forecast vegetation runoff of Amudarya.

Tabl.2. Fig.2. Ref.5.

Method for computation of side inflow on the parts of Narin, Karadarya and Syrdarya rivers in the bounds of the Ferganion valley. Sergeev A.I. Transactions of SANIGMI, 1996, vol.149(230), p. 121 - 130.

The formation of side inflow is examined in the rivers basin with intensive irrigating agriculture, it is appeared by result of water intake transformation and of the little rivers runoff on the reclamational territory.

This problem is decided on the base of mathematical model of correlation system "River - Irrigational massif", where the processes of runoff formation in water reclamational systems, entering in the rivers network and change of hydrological regime in the gauge lines rivers are examined in united totality. Numerical realization is made on example of the Syrdarya basin river.

Tabl.1. Fig.3. Ref.1.

UDC 551.311.21

A method for computation of sediment runoff and deformation of the bed rivers. Denisov U.M., Tulagano v A.N., Transactions of SANIGMI, 1996, vol.149(230), p. 131 - 145.

At present time the methods for computation of sediment runoff and deformation of the bed rivers are not absolute and its demand of greater accuracy. This greater accuracy may be put into practice on the basis of the new theoretical research of J.M. Denisov in the fields of mechanics multiphase and multicomponental environments.

In this article the system of differential equations has been passed with the primary and regional conditions for computation of the sediment runoff and deformation of the bed rivers.

Ref.10.

UDC 551.579.5

Numerical scheme of solution unstationary problem of the distribution moisture, stream and warmth in unsaturated soil. Sergeev A.I. Transactions of SANIGMI, 1996, vol. 149(230), p. 146 - 160.

The transfer of moisture, stream and warmth in unsaturated soil is represented by system of unlinear differential equations in the private derivatives. The decision of this system is tied with great difficulties and with absence of full information about fields of water physical and thermal characteristics. This is led to the need to introduce to some simple supposition by numerical realization of system for natural conditions.

Fig.3. Ref.4.

UDC 631.43

Computation of soil evaporation. Denisov U.M., Transactions of SANIGMI, 1996, vol.149(230), p. 161 - 1771.

The soil evaporation, as physical process, take place in the aerations area on the surface of section 4 water - air 47. The waste of stream from soil on the day surface is carried out by it diffusion and convection carrying by humid air.

The method of computation is built on the base of theory multiphase and multicomponent environments. Comparatively simple formula is found for computation of soil evaporation.

Tabl.1. Ref.3.

Some evristical correlations on the appraisal of the streams of impulse, heat and steam. D e n i s o v U.M., Transactions of SANIGMI, 1996, vol. 149(230), p. 172 - 182.

The streams of impulse, heat and steam between the bedding surface and atmosphere are approximated by product of coefficient turbulence on the derivative of corresponding characteristics on the normal to the bedding surface because of the difficulty of difinition vertical speed of compact environment. The final expressions for these values and streams will be depend of the kind approximation of coefficient turbulence.

Ref.1.

Generalized trigonometrical and hyperbolical functions. D e n i s o v J.M. Transaction of SANIGMI, 1996, vol.149 (230), p. 183 - 189.

It is well-known, the geometrical base for construction of trigonometrical functions is appeared the circle. But the circle is presented only the special case of ellipse, when it axcentrisity is equal to zero. Also the geometrical base of the hyperbolic functions is appeared the equalaxisional hyperbola. In the article the construction of trigonometrical and hyperbolic functions on the geometrical base of the ellipse and unequalaxisional hyperbola is conducted. These functions have many interesting and useful qualities.

Fig.1. Ref.1.

Сборник научных трудов
Труды САНИГМИ, вып. 149 (230)
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
СТОКА ГОРНЫХ РЕК

Редактор кан. геогр. наук С. И. Инагамова
Технический редактор Н. А. Шелаева
Перевод на узбекский язык А. Х. Туляганов
Перевод на английский язык С. В. Мягков, Н. А. Агальцева

Набрано на компьютере в издательском отделе САНИГМИ.
Подписано к печати 03.96. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Уч. изд. л. 9,4. Усл. печ. л. 13,0.

Тираж 150. Заказ 412.

Издательский отдел САНИГМИ, Типография Главгидромета РУз,
Ташкент, 700052, Обсерваторская, 72.